سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(0) = 1 + f(1) = 1 + (f(0))^2 - f(0)$$

$$\Rightarrow (f(0) - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

با داشتن $f(0)$ و $f(1)$ تابع زوج مرتبی f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f = \{(a,b), (0,1), (1,2a), (1,0)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید $(1,2a) = (1,0)$، در نتیجه:

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

و همچنین با داشتن مقدار a داریم:

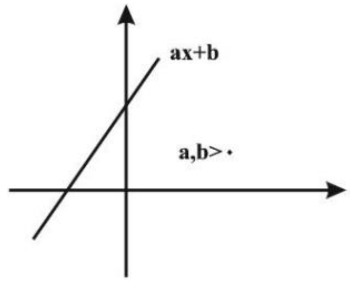
$$(a,b) = (0,b) = (0,1) \Rightarrow b = 1$$

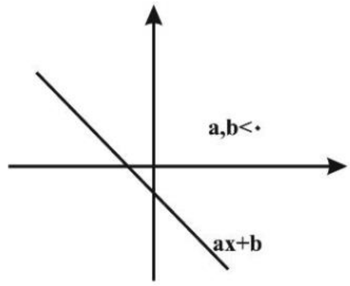
سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

علامت $\frac{m-۱}{m}$ و $m(m-۱)$ در دامنه مشترک‌شان همواره مثل هم است؛ بنابراین برای حل سؤال، کافی است خط $y = ax+b$ را که $ab > ۰$ در نظر بگیریم. حالات زیر امکان دارد:





بنابراین، این خط همواره از ربع‌های دوم و سوم می‌گذرد.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تابع f همانی است، پس ضابطه آن به‌صورت $f(x) = x$ است.

$$\frac{ax^۳-bx^۲+cx+d}{x^۲+x+۱} = x$$

$$\Rightarrow ax^۳ - bx^۲ + cx + d = x^۳ + x^۲ + x$$

$$\xrightarrow{\text{به ازای هر } x \text{ برقرار است}} \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \\ c = ۱ \\ d = ۰ \end{cases}$$

تابع g ثابت است، پس ضابطه آن به‌صورت $g(x) = k$ است $(k \in R)$.

$$\frac{ax^۲+۳}{۳x^۲+e} = k \Rightarrow ax^۲ + ۳ = ۳kx^۲ + ke$$

$$\xrightarrow{\text{به ازای هر } x \text{ برقرار است}} \begin{cases} ۳k = a \xrightarrow{a=۱} k = \frac{۱}{۳} \\ ke = ۳ \xrightarrow{k=\frac{۱}{۳}} e = ۹ \end{cases}$$

$$y = ax - e - c \Rightarrow y = x - ۹ - ۱ = x - ۱۰$$

خط $y = x - ۱۰$ محور xها را در $x = ۱۰$ قطع می‌کند.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

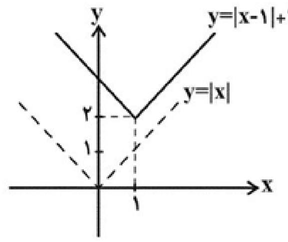
f(x) نمایش یک تابع است بنابراین برای هر عضو از دامنه آن تنها یک عضو نظیر از برد داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow (۰, -۳), (۰, ۶(۰) - ۳a) \Rightarrow -۳ = ۰ - ۳a$$
$$\Rightarrow a = ۱ \quad (۱)$$

$$x = ۳ \Rightarrow (۳, ۶(۳) - ۳a) \ , \ (۳, a(۳)^۲ + b(۳)) \Rightarrow ۱۸ - ۳a = ۹a + ۳b$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۱۸ - ۳(۱) = ۹(۱) + ۳b \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

با رسم نمودار $|x - ۱| + ۲$ با استفاده از انتقال نمودار $y = |x|$ برد آن را به دست می‌آوریم.

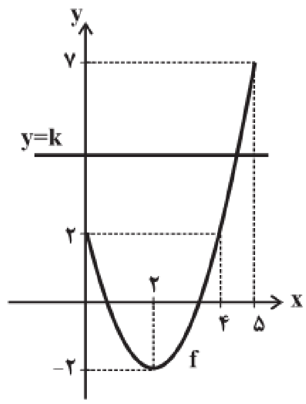


بنابراین برد این تابع برابر بازه $[۲, +\infty)$ است.

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



اگر خط $y = k$ و نمودار تابع f در یک نقطه مشترک باشند، k می‌تواند مقادیر ۲-، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را داشته باشد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ باشد، داریم:

$$f(۱) = a + b = ۲ \Rightarrow b = ۲ - a$$

$$f(-۱) = -a + b \Rightarrow f(f(-۱)) = f(-a + b)$$
$$= a(-a + b) + b$$

$$= -a^۲ + ab + b = -۸$$

$$\Rightarrow -a^۲ + a(۲ - a) + ۲ - a = -۸ \Rightarrow -a^۲ + ۲a - a^۲$$
$$+ ۲ - a = -۸$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ - a - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ a = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

چون شیب نمودار f منفی است، $a = \frac{۵}{۲}$ قابل قبول نیست. بنابراین داریم:

$$a = -۲ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow f(x) = -۲x + ۴ \Rightarrow f(۲) = ۰$$

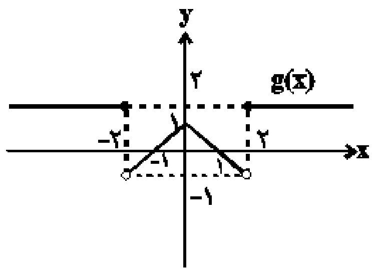
سوال ۷

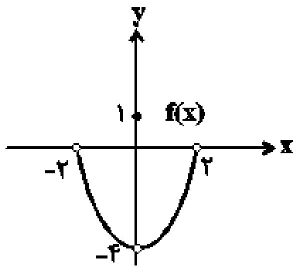
پاسخ: گزینه ۴

ضابطه توابع f و g به‌صورت زیر است:

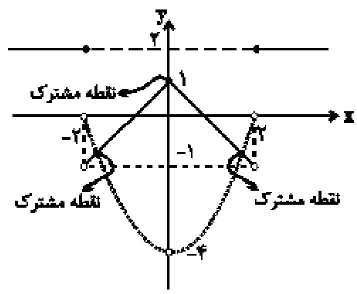
$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۴ & -۲<x<۰ \\ ۱ & x=۰ \\ x^۲-۴ & ۰<x<۲ \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} ۲ & x\le ۲ \\ ۱-x & -۲<x<۲ \\ ۲ & x\ge ۲ \end{cases}$$

نمودار توابع f وg در شکل‌های زیر رسم شده‌اند:





در شکل زیر، نموداری که به‌صورت نقطه‌چین نشان داده شده است، مربوط به تابع f(x) است:



همان‌طور که از نمودار بالا پیداست، نمودار دو تابع f(x) و g(x) سه نقطه مشترک دارند.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

با انتقال تابع به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست و به اندازهٔ ۵ واحد به سمت پایین، ضابطهٔ تابع به صورت زیر می‌شود:

$$g(x)=\begin{cases} (x-۲)^۲-۱۰-۵ & x-۲\ge ۱ \\ ۳(x-۲)-۱-۵ & x-۲<۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} x^۲-۴x-۱۱ & x\ge ۳ \\ ۳x-۱۲ & x<۳ \end{cases}$$

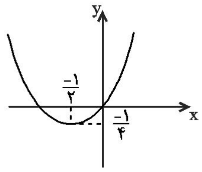
سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

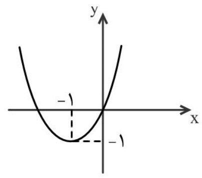
با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $y = x^{۲}$ و تبدیل نمودارها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_{۱} = x^{۲} + x = (x + \frac{۱}{۲})^{۲} - \frac{۱}{۴} \\ y_{۲} = x^{۲} + ۲x = (x + ۱)^{۲} - ۱ \end{cases}$$

بنابراین برای رسم نمودار تابع $y_{۱}$، کافی است نمودار تابع $y = x^{۲}$ را $\frac{۱}{۲}$ واحد به چپ و سپس $\frac{۱}{۴}$ واحد به پایین انتقال دهیم.



به طریق مشابه، برای رسم نمودار تابع $y_{۲} = x^{۲} + ۲x$، کافی است نمودار تابع $y = x^{۲}$ را ۱ واحد به چپ و سپس ۱ واحد به پایین انتقال دهیم.



بنابراین اگر بخواهیم نمودار $y_{۱} = x^{۲} + x$ را به $y_{۲} = x^{۲} + ۲x$ تبدیل کنیم، باید نمودار $y_{۱}$، $\frac{۱}{۲}$ واحد به چپ و سپس $\frac{۳}{۴}$ واحد به پایین انتقال یابد.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مقدار $f(۳)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار کافی است $\frac{x-۱}{x}$ را برابر ۳ قرار دهیم و x را پیدا کنیم و در معادله داده شده قرار دهیم:

$$\frac{x-۱}{x} = ۳ \Rightarrow x - ۱ = ۳x \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(۳) + f(۳) = ۵ \times (-\frac{۱}{۲}) + ۴ \Rightarrow ۲f(۳) = \frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow f(۳) = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x-۱}{x}) + \frac{۳}{۴} = ۵x + ۴ \Rightarrow f(\frac{x-۱}{x}) = ۵x + \frac{۱۳}{۴}$$

حال کافی است $\frac{x-۱}{x}$ را برابر ۹ قرار داده، x را پیدا کنیم و در معادله قرار دهیم تا حاصل $f(۹)$ به‌دست آید:

$$\frac{x-۱}{x} = ۹ \Rightarrow x - ۱ = ۹x \Rightarrow x = -\frac{۱}{۸} \Rightarrow f(۹) = ۵ \times (-\frac{۱}{۸}) + \frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(۹) = \frac{۲۶-۵}{۸} \Rightarrow f(۹) = \frac{۲۱}{۸}$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه تابع خطی به صورت $y = ax + b$ است، پس ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$a^2 - \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow a\left(a - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(1)$$

$$\xrightarrow{\text{عضو تابع } (2,10)} 10 = 0 + 2a \times 2 + 4 \Rightarrow 6 = 4a \Rightarrow a = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$y = 3x + 4 \xrightarrow{y=0} 0 = 3x + 4 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

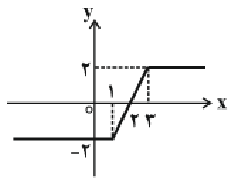
این تابع خطی محور طول‌ها را در نقطه $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ قطع می‌کند.

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به نمودار زیر، مشخص است که $-2 \le |x-1| - |x-3| \le 2$ است.



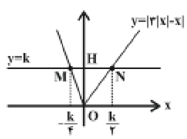
حال با قرار دادن $t = \frac{1}{|x-1|-|x-3|}$، واضح است که $t \ge \frac{1}{2}$ یا $t \le -\frac{1}{2}$ است، بنابراین داریم:

$$f(x) = \frac{2}{|x-1|-|x-3|} \Rightarrow f(x) \ge 1 \quad f(x) \le -1$$

$$\Rightarrow R_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = R - (-1, 1)$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲



واضح است برای اینکه مثلث ایجاد شود، باید $k > 0$ باشد؛ بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}|MN||OH| \Rightarrow S(k) = \frac{3}{8}k^2; k > 0$$

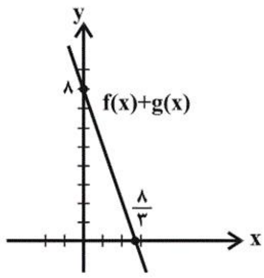
سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

$$x+f(x-1)=x+2 \Rightarrow f(x-1)=2 \Rightarrow f(x)=2$$

$$2x+g(x)=-x+6 \Rightarrow g(x)=-3x+6$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=-3x+8$$



سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$y=x-\frac{5x-9}{x}=\frac{x^2-5x+9}{x} \Rightarrow xy=x^2-5x+9$$

$$\Rightarrow x^2-(5+y)x+9=0$$

$\Delta \geq 0$ باید $\Rightarrow (5+y)^2-36 \geq 0 \Rightarrow (5+y)^2 \geq 36$

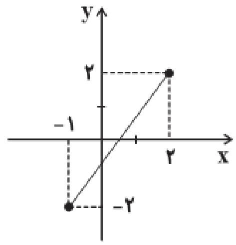
$$\Rightarrow \begin{cases} 5+y \geq 6 & \Rightarrow y \geq 1 \\ 5+y \leq -6 & \Rightarrow y \leq -11 \end{cases}$$

با توجه به کسر $y=\frac{x^2-5x+9}{x}$ چون عبارت درجه دوم صورت همواره مثبت است $(a>0,\ \Delta<0)$ و مقادیر x منفی هستند، پس حاصل کسر یک عبارت منفی خواهد بود. بنابراین فقط $y \leq -11$ قابل قبول خواهد بود.

سوال ۱۶

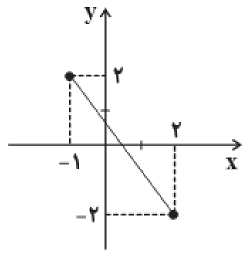
پاسخ: گزینه ۴

تابع f خطی است و با توجه به دامنه و بردش، نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است:



$$y-۲=\frac{۲-(-۲)}{۲-(-۱)}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۴}{۳}x-\frac{۲}{۳} \Rightarrow f(۰)=-\frac{۲}{۳} \quad , \quad f(۱)=\frac{۲}{۳} \quad ,$$
$$f(\frac{۱}{۲})=۰$$



$$y-۲=\frac{-۲-۲}{۲-(-۱)}(x+۱) \Rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲}{۳} \Rightarrow f(۱)=-\frac{۲}{۳} \quad , \quad f(\frac{۱}{۲})=۰ \quad ,$$
$$f(۰)=\frac{۲}{۳}$$

همانطور که دیده می‌شود نقطه $(۱ , \frac{۱}{۲})$ به هیچ وجه نمی‌تواند روی نمودار تابع f قرار گیرد.

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۲

f(x) تابع ثابت است، پس مقدار آن همواره برابر یک عدد است.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=(۲m-۴)x-m^۲+۳ \\ f(x): \text{تابع ثابت} \Rightarrow ۲m-۴=۰ \Rightarrow m=۲ \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow f(x)=-m^۲+۳$$

$$\xrightarrow{m=۲} f(x)=-۱$$

پس f(x) به ازای هر عدد حقیقی x برابر ۱- است.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

$f(x) = \left|\frac{x-۱+۲}{۲}\right| - ۱ = \left|\frac{x+۱}{۲}\right| - ۱$

راه‌حل اول:

$-۱ \le x \le ۳ \Rightarrow f(x) = \frac{x+۱}{۲} - ۱ = \frac{x-۱}{۲} \Rightarrow -۱ \le f(x) \le ۱$

$-۲ \le x \le -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{-x-۱}{۲} - ۱ = \frac{-x-۳}{۲} \Rightarrow -۱ \le f(x) \le -\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow R_f = [-۱, ۱]$

راه‌حل دوم:

$-۲ \le x \le ۳ \Rightarrow -۱ \le x+۱ \le ۴ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le \frac{x+۱}{۲} \le ۲$

$\Rightarrow ۰ \le \left|\frac{x+۱}{۲}\right| \le ۲ \Rightarrow -۱ \le \left|\frac{x+۱}{۲}\right| - ۱ \le ۱$

$\Rightarrow$ برد تابع $= R_f = [-۱, ۱]$

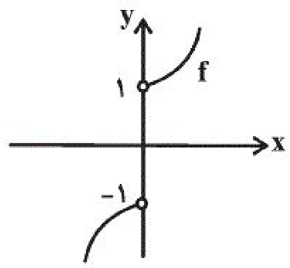
سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا توجه کنید که

$$x > ۰ \Rightarrow f(x) = x(x + \frac{۱}{x}) = x^۲ + ۱$$
$$x < ۰ \Rightarrow f(x) = -x(x + \frac{۱}{x}) = -x^۲ - ۱$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع $R - [-۱, ۱]$ است.



سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

رابطه‌ای تابع است که به ازای هر x یک مقدار برای y وجود داشته باشد، حال به بررسی تک تک موارد می‌پردازیم:

الف) $x = ۰ \Rightarrow ۰^۲ + |y - ۱| = ۴ \Rightarrow |y - ۱| = ۴$

$\Rightarrow y - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} y = ۵ \\ y = -۳ \end{cases}$ تابع نیست.

ب) $|x - ۱| + |y| = ۰ \xrightarrow[\text{پس هریک برابر صفر است}]{\text{مجموع دو مقدار نامنفی } ۰}$

$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \{(۱, ۰)\}$ تابع است.

پ) $x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ = ۰$

$\Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۰$

مجموع دو مقدار نامنفی صفر شده است پس هریک برابر صفر است.

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۲ \end{cases} \Rightarrow \{(۱, -۲)\}$ تابع است.

ت) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ۲ \xrightarrow{x, y \neq ۰} x^۲ + y^۲ - ۲xy = ۰$

$\Rightarrow (x - y)^۲ = ۰ \rightarrow y = x$ تابع است.

ث) $x^۲ - ۲x + ۱ + |y| = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + |y| = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \{(۱, ۰)\}$ تابع است.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

$R = \{(-۱, -۲), (-۱, ۲), (۰, -۲), (۰, ۲), (۱, -۲), (۱, ۲)\}$

تابع نیست

$S = \{(-۱, ۱), (۰, ۱), (۱, ۱), (۱, -۱), (۱, ۰)\}$

تابع نیست

$T = \{(۰, ۲), (۰, -۲)\}$

تابع نیست

$U = \{(-۱, -۲), (۰, -۲), (۱, -۲)\}$

تابع است

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

چون دامنه‌ی تابع f برابر با R و برد آن تک‌عضوی است یعنی تابع، تابع ثابت است و مقادیر آن به x وابسته نیست. بنابراین باید ضرایب x و $x^۲$ صفر باشند. یعنی:

$$\begin{cases} b-۲=۰ \Rightarrow b=۲ \\ a-b-۱=۰ \Rightarrow a-۲-۱=۰ \Rightarrow a=۳ \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر a و b در f داریم:

$$f(x)=c+۲$$

از طرفی چون برد تابع f برابر با $\{۲c-۳\}$ است، پس:

$$۲c-۳=c+۲ \Rightarrow c=۵$$

بنابراین:

$$a+b+c=۱۰$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۲

نمودار داده شده مربوط به تابع خطی می‌باشد، با ساده کردن ضابطه‌ی تابع داریم:

$$y=\frac{ax^۲+bx+c}{x}=ax+b+\frac{c}{x}$$

برای این‌که رابطه به حالت خطی درآید باید فرم غیر خطی آن از بین برود پس $c=۰$ می‌باشد.

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $y=ax+b$ است. با توجه به نمودار، $(-۱,۰)\in f$ است. البته باید دقت کنید که تابع در $x=۰$ تعریف نشده است، به همین دلیل به ازای $x=۰$ نمودار تابع به صورت توخالی می‌باشد و تعریف نشده است. همچنین اگر تابع خطی در $x=۰$ تعریف شده بود، مقدارش برابر با ۲- می‌شد، پس:

$$x=۰: -۲=a(۰)+b \Rightarrow b=-۲$$

$$x=-۱ \Rightarrow ۰=a(-۱)-۲ \Rightarrow a=-۲$$

پس ضابطه‌ی تابع به فرم زیر می‌باشد:

$$y=-۲x-۲$$

بنابراین داریم:

$$a+b+c=-۲-۲+۰=-۴$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases} f(x-۱) & x>۰ \\ |x| & x\le ۰ \end{cases} \Rightarrow f(۲)=f(۱)=f(۰)$$
$$=|۰|=۰$$

$$f(\sqrt{۲})=f(\sqrt{۲}-۱)=f(\sqrt{۲}-۱-۱)$$

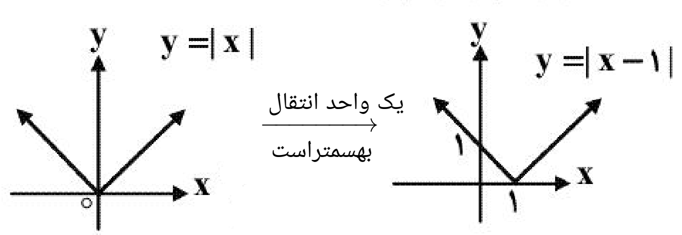
$$=f(\sqrt{۲}-۲)=|\sqrt{۲}-۲|=۲-\sqrt{۲}$$

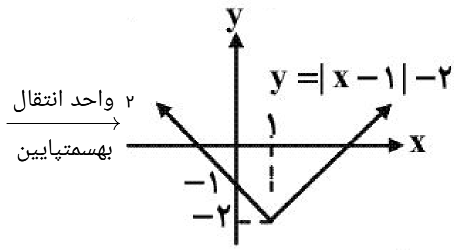
$$\text{عبارت}=\frac{۲}{f(\sqrt{۲})-f(۲)}=\frac{۲}{۲-\sqrt{۲}-۰}=۲+\sqrt{۲}$$

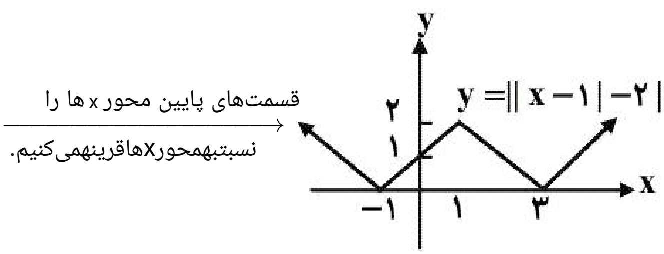
سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:





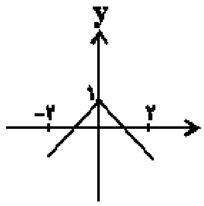


در بین گزینه‌ها، تنها در محدوده‌ی $\{x|x\ge ۳\}$ هر خط موازی محور xها، حداکثر نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»



$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۲,۲]$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & , \quad -۲ \le x \le ۰ \\ -x+۲ & , \quad ۰ < x \le ۲ \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-۱ & , \quad -۲ \le x \le ۰ \\ -۱ & , \quad ۰ < x \le ۲ \end{cases}$$

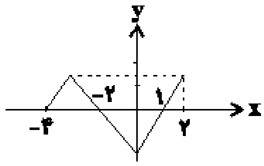
$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} x+۱ & , \quad -۲ \le x \le ۰ \\ -x+۱ & , \quad ۰ < x \le ۲ \end{cases}$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

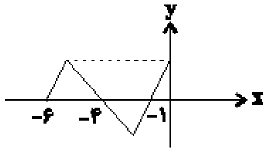
گزینهٔ «۳»

ابتدا نمودار را ۲ واحد به چپ می‌بریم تا نمودار تابع $f(x)$ به‌دست آید.



$D_{f(x)} = [-۴,۲]$

سپس دو واحد دیگر به چپ می‌بریم تا نمودار تابع $f(x+۲)$ به‌دست آید.



$D_{f(x+۲)} = [-۶,۰]$

دامنهٔ $\frac{f(x)}{f(x+۲)}$، برابر اشـــتراک دامـــنه‌ها، منهـــای ریشـــه‌های مخرج یعنی $f(x+۲) = ۰$ است.

$$D = [-۴,۰] - \{-۴,-۱,-۶\} = (-۴,۰] - \{-۱\}$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$f(x) = \sqrt{x-۳} \Rightarrow D_f : x \geq ۳$
$g = \{(۲,-۱)(۴,۴)(-۱,۵)(۷,۳)\}$
$\Rightarrow D_g = \{-۱,۲,۴,۷\}$

اکنون دامنه و زوج مرتب‌های ۲f + ۳g را به‌دست می‌آوریم:

$D_{۲f+۳g} = D_f \cap D_g \Rightarrow D_{۲f+۳g} = \{۴,۷\}$

$۲f + ۳g = \{(۴, \overset{۲\times۱}{\cancel{۲f(۴)}} + \overset{۳\times۴}{\cancel{۳g(۴)}}),$
$(۷, \overset{۲\times۲}{\cancel{۲f(۷)}} + \overset{۳\times۳}{\cancel{۳g(۷)}})\}$

$۲f + ۳g = \{(۴, \underset{\downarrow}{۱۴}), (۷, \underset{\downarrow}{۱۳})$

max min

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

هر چهار تابع، تابع $y = |x|$ را با دامنهٔ R مشخص می‌کنند.

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

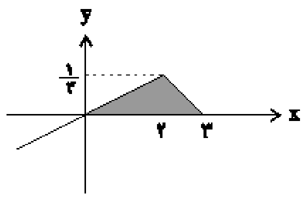
ابتدا ضابطهٔ تابع $y = f + g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & , \quad x \le ۲ \\ ۱ & , \quad x > ۲ \end{cases} \quad , \; g(x) = \frac{-x}{۳} \; , \; (x \le ۳)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} - \frac{x}{۳} & , \quad x \le ۲ \\ ۱ - \frac{x}{۳} & , \quad ۲ < x \le ۳ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{۶} & , \quad x \le ۲ \\ ۱ - \frac{x}{۳} & , \quad ۲ < x \le ۳ \end{cases}$$

حال نمودار $f + g$ را رسم می‌کنیم:



مساحت محصور: $\frac{\frac{۱}{۳} \times ۳}{۲} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$

سوال ۳۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$A = \sqrt{۴ + \sqrt{۷}} + \sqrt{۴ - \sqrt{۷}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$A^{۲} = ۴ + \sqrt{۷} + ۴ - \sqrt{۷} + ۲\sqrt{۴ + \sqrt{۷}} \times \sqrt{۴ - \sqrt{۷}}$$

$$\Rightarrow A^{۲} = ۸ + ۲\sqrt{۱۶ - ۷} = ۸ + ۲\sqrt{۹} = ۸ + ۶ = ۱۴$$

عبارت داده شده $= [\sqrt{۱۴}] = ۳$

سوال ۳۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه«۲»

می‌دانیم: $0 \le x - [x] < 1$. بنابراین داریم:

$$f(x) = x - 5[\frac{x}{5}] + 3 = 5(\frac{x}{5} - [\frac{x}{5}]) + 3$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{x}{5} - [\frac{x}{5}] < 1 \xrightarrow{\times 5} 0 \le 5(\frac{x}{5} - [\frac{x}{5}]) < 5$$

$$\xrightarrow{+3} 3 \le R_f < 8$$

درنتیجه: $a = 3, b = 8 \Rightarrow b - a = 8 - 3 = 5$

سوال ۳۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا ضابطه وارون تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = 4 - (x-4)^3 \Rightarrow y - 4 = -(x-4)^3 \Rightarrow x - 4 = -\sqrt[3]{y-4}$$

$$\Rightarrow x = 4 - \sqrt[3]{y-4} \Rightarrow y = 4 - \sqrt[3]{x-4}$$

دو تابع را با هم تلاقی می‌دهیم:

$$4 - \sqrt[3]{x-4} = 4 - (x-4)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x-4} = (x-4)^3$$

$$x - 4 = t \Rightarrow \sqrt[3]{t} = t^3 \xrightarrow{\text{توان}\,3} t = t^9$$

$$\Rightarrow t^9 - t = t(t^8 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = 4 \\ t = 1 \Rightarrow x = 5 \\ t = -1 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

پس در سه نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

سوال ۳۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

فرض کنیم نمودار تابع g در نقطه $(a,-a)$ که $a<0$ است، نیمساز ربع دوم را قطع کند.

پس داریم:

$$g(a) = -f^{-1}(a+1) = -a \Rightarrow f^{-1}(a+1) = a$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} f(a) = a+1 \Rightarrow 2a + \sqrt{a+2} = a+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+2} = 1-a; -2 \le a < 0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a+2 = a^2 - 2a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 1 = 0 \xrightarrow{-2\le a<0} a = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

سوال ۳۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

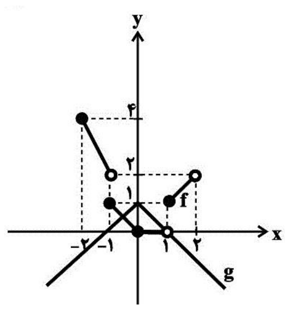
راه اول: نمودارهای دو تابع $f(x) = [x]x$ و $g(x) = 1 - |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$-2 \le x < -1 : f(x) = -2x$

$-1 \le x < 0 : f(x) = -x$

$0 \le x < 1 : f(x) = 0$

$1 \le x < 2 : f(x) = x$



با توجه به شکل فوق، نمودارهای دو تابع f و g فقط در یک نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادله صورت سؤال یک جواب دارد. دقت کنید که $f(1) = 1$ است.

راه دوم:

واضح است که اگر $x \ge 0$ باشد، $[x] \ge 0$ و در نتیجه $x[x] \ge 0$است و اگر $x < 0$ باشد، $[x] < 0$ و در نتیجه $x[x] > 0$ است، بنابراین در هر حالت $x[x] \ge 0$ خواهد بود، برای این‌که معادله جواب داشته باشد، باید $1-|x| \ge 0$ یعنی $-1 \le x \le 1$ باشد. حال اگر $0 \le x < 1$ باشد، معادله به صورت $1-x = 0$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-1 \le x < 0$ باشد، معادله به صورت $-x = 1+x$ در می‌آید که جواب آن $x = -\frac{1}{2}$ است و اگر $x = 1$ باشد، معادله به صورت $1 = 1-1$ در می‌آید که برقرار نیست. پس تنها جواب معادله (طول تنها نقطه مشترک دو نمودار) $x = -\frac{1}{2}$ است.

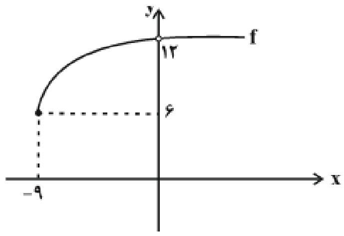
سوال ۳۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+9}-3}=2(\sqrt{x+9}+3); D_f=[-9,+\infty)-\{0\}$

نمودار تابع f در شکل زیر ترسیم شده است:



با توجه به شکل تابع، اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱۲ در برد تابع قرار ندارند.

سوال ۳۷

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع f به صورت $[0,+\infty)-\{1\}$ و دامنه تابع g به صورت $R-\{1\}$ است. بنابراین داریم:

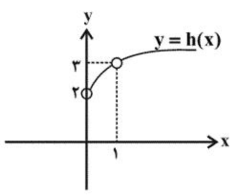
$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=(0,+\infty)-\{1\}$

دقت کنید که از $g(x)=0$ نتیجه می‌شود که $x=0$ است.

از طرف دیگر داریم:

$h(x)=\frac{xf(x)}{g(x)}=\frac{x(\frac{\sqrt{x}+2}{x^3-1})}{\frac{x}{x^3-1}}=\sqrt{x}+2$

بنابراین نمودار تابع h به صورت زیر است.



$\Rightarrow R_h=(2,+\infty)-\{3\}$

اعداد طبیعی ۱، ۲ و ۳ در برد h قرار ندارند.

سوال ۳۸

پاسخ: گزینه ۴

$$D_f: \begin{cases} x+۴ \geq ۰ \\ ۱-۲x \geq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۴ \leq x \leq \frac{۱}{۲}$$

$$D_g: \begin{cases} x+۴ \geq ۰ \\ ۱-۲x \geq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۴ \leq x \leq \frac{۱}{۲}$$

دامنه $f.g$ را حساب می‌کنیم:

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = [-۴, \tfrac{۱}{۲}] \cap [-۴, \tfrac{۱}{۲}] = [-۴, \tfrac{۱}{۲}]$$

ضابطه $f.g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x+۴)-(۱-۲x) = ۳x+۳$$

حال از روی دامنه، برد $f.g$ را حساب می‌کنیم:

$$-۴ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۳} -۱۲ \leq ۳x \leq \frac{۳}{۲} \xrightarrow{+۳}$$
$$-۹ \leq ۳x+۳ \leq ۴/۵$$

پس برد $f.g$ ، بازه $[-۹, ۴/۵]$ است که شامل ۱۴ عدد صحیح است.

سوال ۳۹

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}$، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{matrix} D_f: x+a \geq ۰ \Rightarrow x \geq -a \\ D_g: b-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = [-۱, ۴]$$
$$= [-a, b]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۴ \end{cases}$$

از طرفی $x = ۰$ در دامنه تابع $\frac{f}{g}$ قرار ندارد، پس مخرج کسر یعنی $g(x)$ به‌ازای $x = ۰$ برابر صفر می‌شود.

$$g(۰) = ۰ \Rightarrow \sqrt{b-۰} + d = ۰ \Rightarrow \sqrt{۴} + d = ۰$$
$$\Rightarrow ۲ + d = ۰ \Rightarrow d = -۲$$

حال داریم:

$$f(x) = \sqrt{x+۱} - c \ , \ g(x) = \sqrt{۴-x} - ۲$$

$$f(۳)+g(۳) = ۵ \Rightarrow (۲-c)+(-۱) = ۵$$
$$\Rightarrow ۱-c = ۵ \Rightarrow c = -۴$$
$$\Rightarrow a+b+c+d = ۱+۴-۴-۲ = -۱$$

سوال ۴۰

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه f را به صورت $f(x) = ax+b$ در نظر می‌گیریم.

وارون تابع f را حساب می‌کنیم:

$$y = ax+b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \xrightarrow[y,x]{\text{عوض کردن}} y = \frac{x-b}{a}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

پس:

$$f(x) = f^{-1}(x)+۴ \Rightarrow ax+b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}+۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \to a = \pm ۱ \\ b = \frac{-b}{a}+۴ \end{cases}$$

اگر $a = -۱$ باشد، معادله دوم جواب ندارد پس باید a برابر با ۱ باشد:

$$b = \frac{-b}{a}+۴ \xrightarrow{a=۱} b = -b+۴ \to b = ۲$$

ضابطه f به شکل $f(x) = x+۲$ درآمد و داریم:

$$f(۴) = ۴+۲ = ۶$$

سوال ۴۱

پاسخ: گزینه ۱

اگر نمودار تابع f نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن باشد، نمودارهای f و f^{-1} بر هم منطبق هستند. یعنی: $(fof)(x) = x$

$$\frac{(a-۱)\times\frac{(a-۱)x}{x-۱}}{\frac{(a-۱)x}{x-۱}-۱} = x \Rightarrow \frac{(a-۱)^۲x}{(a-۱)x-x+۱} = x$$

$$\Rightarrow (a-۱)^۲x = (a-۱)x^۲-x^۲+x \Rightarrow (a-۱)^۲x - x = (a-۲)x^۲$$

$$\Rightarrow ((a-۱)^۲-۱)x-(a-۲)x^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a-۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \\ (a-۱)^۲-۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = ۰ \end{cases} \end{cases}$$

که فقط $a = ۲$ قابل قبول است.

سوال ۴۲

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تابع f را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۳x+۳ & ; \quad -۲ \le x < -۱ \\ \frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳} & ; \quad -۱ \le x < ۲ \end{cases}$$

حال برای وارون تابع f داریم:

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}x-۱ & ; \quad -۳ \le x < ۰ \\ ۳x-۱ & ; \quad ۰ \le x < ۱ \end{cases}$$

دقت کنید که بازه‌های دامنه تابع $f^{-۱}$ را از روی برد تابع f به‌دست آورده‌ایم. حال داریم:

$$D_g = D_f \cap D_{f^{-۱}} = D_f \cap R_f = [-۲,۲) \cap [-۳,۱) = [-۲,۱)$$

$$g(-۱) = f(-۱) + f^{-۱}(-۱) = ۰ + (-\frac{۱}{۳} - ۱) = -\frac{۴}{۳}$$

سوال ۴۳

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باید دامنه توابع برابر باشد:

$D_g : R - \{\pm a\}$ ، $D_f : R - \{-a\}$

که برای برابر بودن دامنه‌ها، a باید صفر باشد.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^۲-(c-۱)x+۶-b}{x} \\ g(x) = \dfrac{x^۳+bx}{x^۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^۲-(c-۱)x+۶-b}{x} = \frac{x^۳+bx}{x^۲}$$

$$\Rightarrow x^۴-(c-۱)x^۳+(۶-b)x^۲ = x^۴+bx^۲$$

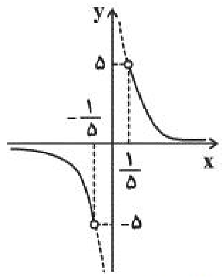
$$\Rightarrow \begin{cases} c-۱=۰ \Rightarrow c=۱ \\ ۶-b=b \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c = ۰+۳+۱ = ۴$$

سوال ۴۴

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow R_f = (-۵\ ,\ ۵) - \{۰\}$$

برد این تابع شامل ۸ عدد صحیح ±۱ ، ±۲ ، ±۳ و ±۴ است.

سوال ۴۵

پاسخ: گزینه ۲

$$g^{-1}(۲) = ۴ \Rightarrow g(۴) = ۲$$

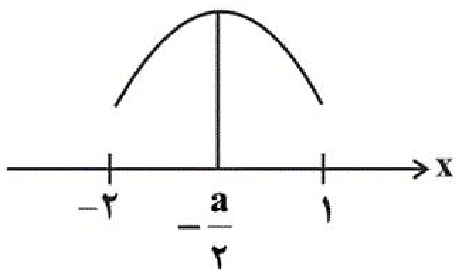
با قراردادن x = ۲ در رابطه داده شده داریم:

$$f(۵) = ۲g(۴) - ۱ \Rightarrow f(۵) = ۲(۲) - ۱$$
$$\Rightarrow f(۵) = ۳ \Rightarrow f^{-1}(۳) = ۵$$

سوال ۴۶

پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل اگر طول رأس سهمی $(x = -\frac{a}{2})$ در داخل بازه $(-2,1)$ قرار گیرد، تابع در این بازه یک‌به‌یک نمی‌شود. بنابراین $-\frac{a}{2}$ به جز بازه $(-2,1)$ هر مقدار حقیقی دیگری می‌تواند اختیار کند.



$$-2 < -\frac{a}{2} < 1 \Rightarrow -4 < -a < 2 \Rightarrow -2 < a < 4$$

بنابراین:

$$\Rightarrow a \in R - (-2,4)$$

سوال ۴۷

پاسخ: گزینه ۳

زوج مرتب‌های تابع g را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(-3,4),(-2,5),(-1,2),(1,1),(2,2),(3,-1),(4,0),(7,2)\}$$

$$\Rightarrow D_g = \{-3,-2,-1,1,2,3,4,7\}$$

دامنه تابع f نیز برابر $D_f = [-a,+\infty)$ است. همچنین مقدار تابع f در $x = 1-a$ برابر صفر است.

حال برای $D_{\frac{g}{f}}$ داریم: $D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x|f(x) = 0\}$

$$= [-a,+\infty) \cap \{-3,-2,-1,1,2,3,4,7\} - \{1-a\}$$

برای اینکه $D_{\frac{g}{f}}$ شامل سه عضو باشد، از آنجا که یک عضو از مجموعه اشتراک باید حذف شود، مقدار $(-a)$ را از بین مقادیر ۲ یا ۳ باید انتخاب کنیم. با امتحان کردن، به سادگی $a = -2$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت داریم: $D_f = [2,+\infty), f(3) = 0$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \{2,4,7\}$$

$$\Rightarrow g(a) = g(-2) = 5$$

سوال ۴۸

پاسخ: گزینه ۴

تابع g را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x) = x - ۲ + |x - ۲| = \begin{cases} ۲x - ۴ ; x > ۲ \\ ۰ ; x \leq ۲ \end{cases}$$

دامنه تابع f برابر R است و دامنه تابع $\frac{f}{g}$، بازه $(۲, +\infty)$ است.

تابع $\frac{f}{g}$ را با شرط $x > ۲$ تشکیل می‌دهیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{۸ - ۲x^۲}{۲x - ۴} = \frac{-۲(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)} = -(x+۲)$$

حال داریم:

$$x > ۲ \Rightarrow x + ۲ > ۴ \Rightarrow -(x+۲) < -۴ \Rightarrow R_{\frac{f}{g}} = (-\infty, -۴)$$

سوال ۴۹

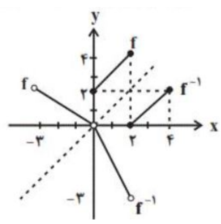
پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه تابع $f(x) + f^{-1}(x)$ را می‌یابیم که برابر $D_f \cap D_{f^{-1}}$ است.

می دانیم $D_{f^{-1}} = R_f$. با توجه به شکل داریم:

$$D_f = (-۳, ۲], R_f = (۰, ۴] = D_{f^{-1}} \Rightarrow D_{f+f^{-1}} = (-۳, ۲] \cap (۰, ۴] = (۰, ۲]$$

حال در این بازه ضابطه‌های f و f^{-1} را می‌یابیم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:



$$x \in (۰, ۲] : f(x) = x + ۲$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{۳}{۲}x & , ۰ < x < ۲ \\ ۰ & , x = ۲ \end{cases}$$

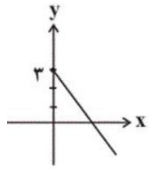
$$(f + f^{-1})(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x + ۲ & , ۰ < x < ۲ \\ ۴ & , x = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲ > -\frac{۱}{۲}x + ۲ > ۱ \Rightarrow (f + f^{-1}) \text{ برد} = (۱, ۲) \cup \{۴\}$$

سوال ۵۰

پاسخ: گزینه ۱

تابع f را برای $x \geq ۰$ رسم می کنیم:



و چون می‌دانیم نمودار $x^{۲} - ۲x + k$ رو به بالا است در نتیجه باید کم‌ترین مقدار آن بیش‌تر از ۳ باشد.

$$y = x^{۲} - ۲x + k = x^{۲} - ۲x + ۱ + k - ۱$$

$$= (x-۱)^{۲} + (k-۱) \Rightarrow y = (x-۱)^{۲} + (k-۱)$$

کم‌ترین مقدار این ضابطه به ازای $x < ۰$ در نقطه مرزی اتفاق می افتد. بنابراین:

$$y = k \geq ۳$$

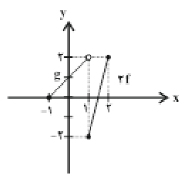
سوال ۵۱

پاسخ: گزینه ۳

$$D_h = D_f \cap D_g = [-۱, ۲]$$

$$h(x) = \begin{cases} ۲f(x) & ; ۱ \leq x \leq ۲ \\ g(x) + ۱ + m & ; -۱ \leq x < ۱ \end{cases}$$

ابتدا نمودار $y = \begin{cases} ۲f(x) & ; ۱ \leq x \leq ۲ \\ g(x) & ; -۱ \leq x < ۱ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، برای این که تابع h یک به یک شود، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۱ + m > ۲ \Rightarrow m > ۱ \\ \text{یا} \\ ۱ + m \leq -۴ \Rightarrow m \leq -۵ \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, -۵] \cup (۱, +\infty)$$

سوال ۵۲

پاسخ: گزینه ۲

عبارت زیر رادیکال $> ۰ \Rightarrow x - x^{۲} > ۰ \Rightarrow x^{۲} - x < ۰$

$\Rightarrow x(x-۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱$

از آنجا که در این فاصله مقدار [x] برابر صفر است، در نتیجه: $f(x) = ۰$ پس برد تابع برابر $\{۰\}$ است که شامل یک عدد صحیح است.

سوال ۵۳

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم دامنه تابع گویای f به صورت:

$D_f = R-$ {ریشه‌های مخرج} می‌باشد. بنابراین، $b-1$ و $-b$ ریشه‌های عبارت $x^2+ax-12$ هستند، حال از آنجایی که مجموع این ریشه‌ها برابر است با $(-a)$، پس داریم:

$$(-b)+(b-1)=(-a) \Rightarrow -1=-a \Rightarrow a=1$$

از طرفی برای به‌دست آوردن دامنه تابع $g(x)$، داریم:

$$|x|-4>0 \Rightarrow |x|>4 \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<-4 \end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیح بازه $[-4, 6]$ که عضو D_g می‌باشند عبارتند از $\{5, 6\}$.

سوال ۵۴

پاسخ: گزینه ۲

دامنه تابع $f(x)=\frac{x^2+3+\frac{1}{x}}{x^2+6x+k}$، عدد صفر را شامل نمی‌شود، پس یکی از اعداد a و b برابر با صفر است. (مثلاً $a=0$) با توجه به این‌که فقط یک عدد دیگر (b) در دامنه تابع f وجود ندارد، دو حالت به وجود می‌آید:

۱) مخرج ریشه مضاعف دارد:

$$\Delta_{\text{مخرج}}=0 \Rightarrow 36-4k=0 \Rightarrow k=9$$

حال مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا b به‌دست آید:

$$x^2+6x+9=0 \Rightarrow (x+3)^2=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow b=-3$$

$$\Rightarrow |k+a+b| = |9+0+(-3)| = 6$$

۲) مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها صفر است:

$$x=0 \text{ ریشه مخرج است } \Rightarrow 0^2+6(0)+k=0 \Rightarrow k=0$$

حال با جای‌گذاری $k=0$، ریشه دیگر مخرج را حساب می‌کنیم:

$$x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-6 \Rightarrow b=-6 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |k+a+b| = |0+0+(-6)| = 6$$

سوال ۵۵

پاسخ: گزینه ۲

وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = ax+۲ \Rightarrow x = \frac{y-۲}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن x و y}} y = \frac{x-۲}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{a}x - \frac{۲}{a}$$

اگر f و $f^{-۱}$ در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هر دو توابعی خطی هستند، باید بر هم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = f^{-۱}(x) \Rightarrow ax+۲ = \frac{۱}{a}x - \frac{۲}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{a} \\ ۲ = -\frac{۲}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -۱$$

پس ضابطه f و $f^{-۱}$ به صورت $f(x) = f^{-۱}(x) = -x+۲$ درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-۱}(۳) = -۳+۲ = -۱$$

سوال ۵۶

پاسخ: گزینه ۳

شرط دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج:

$$f^{-۱}(x) - f(x) \geq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) \geq f(x)$$

با توجه به این‌که $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند xهایی که به ازای آن‌ها $f^{-۱}(x)$ بالاتر از $y = x$ یا مساوی با آن است، جواب سوال می‌باشند. در محدوده $[۴ , +\infty)$ خط $y = x$ بالاتر از $f(x)$ یا مساوی با آن می‌باشد، پس $f^{-۱}(x)$ هم بالاتر از $f(x)$ یا مساوی با آن خواهد بود.

سوال ۵۷

پاسخ: گزینه ۱

برای آن که f در بازه $[-۱ , ۳]$ یک به یک باشد، باید $-\frac{a}{۲}$ داخل این بازه قرار نگیرد، پس:

$$\left.\begin{array}{ll} (۱) & -\frac{a}{۲} \geq ۳ \Rightarrow a \leq -۶ \\ (۲) & -\frac{a}{۲} \leq -۱ \Rightarrow a \geq ۲ \end{array}\right\}$$

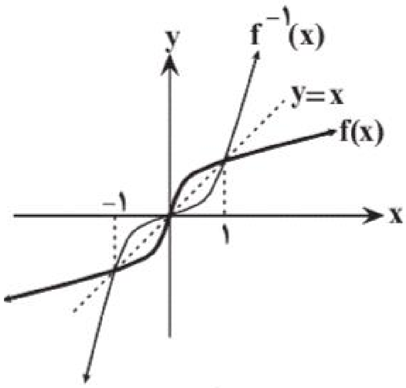
پس $a \leq -۶$ یا $a \geq ۲$ است.

سوال ۵۸

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم و نمودار را در چهار بازهٔ زیر بررسی می‌کنیم:

می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد.



	$x=-۱$		$x=۰$	$x=۱$
بازه / رابطه	$(-\infty,-۱)$	$(-۱,۰)$	$(۰,۱)$	$(۱,+\infty)$
$f(x)-f^{-۱}(x)$	+	−	+	−
$x^{۲}-۱$	+	−	−	+
$\dfrac{f(x)-f^{-۱}(x)}{x^{۲}-۱}$	+	+	−	−

تعریف نشده (در $x=-۱$)   تعریف نشده (در $x=۱$)

بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f^{-۱}(x)}{x^{۲}-۱}}$ به‌صورت $(-\infty,۰]-\{-۱\}$ است.

سوال ۵۹

پاسخ: گزینه ۲

رابطه داده شده مشابه رابطه بین سه جمله متوالی از دنباله حسابی است. بنابراین تابع f به فرم جمله عمومی دنباله حسابی و خطی است؛ یعنی $f(x)=\alpha x+\beta$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱)=-۳ \Rightarrow -\alpha+\beta=-۳ \\ f(۲)=-۱ \Rightarrow ۲\alpha+\beta=-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{۲}{۳} \\ \beta=-\frac{۷}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲x-۷}{۳} \Rightarrow f(۵)=۱$$

سوال ۶۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه (۱): با فرض $x=-۲$ در رابطه، به معادله $\sqrt{y+۲}=y+۲$ می‌رسیم، که دو جواب دارد. از آن جایی که به ازای $x=-۲$ دو مقدار برای y به دست آمده،پس این رابطه، یک تابع نیست.

گزینه (۲): با فرض $x=۱$ در رابطه، به معادله $y^۳-۴y=۰$ می‌رسیم، خواهیم داشت:

$$y^۳-۴y=۰ \Rightarrow y(y^۲-۴)=۰$$

$$\Rightarrow y=۰\ ,\ y=۲\ ,\ y=-۲$$

از آن جایی که به ازای $x=۱$ سه مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، یک تابع نیست.

گزینه (۳): با فرض $x=۰$ در رابطه، به معادله $|۲y+۱|+y=۰$ می‌رسیم، با حل این معادله خواهیم داشت:

$$|۲y+۱|=-y \xrightarrow{y\le ۰} (۲y+۱)^۲=y^۲$$
$$\Rightarrow ۴y^۲+۴y+۱=y^۲ \Rightarrow ۳y^۲+۴y+۱=۰$$
در این معادله $a+c=b$ است، پس:

$$y=-۱ \text{ و } y=\frac{-۱}{۳}$$

از آن جایی که به ازای $x=۰$ دو مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، یک تابع نیست.

گزینه (۴): ابتدا با ضابطه بندی داریم:

$$x=y^۳+y+|y|=\begin{cases} y^۳+۲y & , \quad y\ge ۰ \\ y^۳ & , \quad y<۰ \end{cases}$$
$$(\text{ضابطه ۱})\ x_۱=x_۲ \Rightarrow y_۱^۳+۲y_۱=y_۲^۳+۲y_۲$$

$$\Rightarrow y_۱^۳-y_۲^۳+۲(y_۱-y_۲)=۰$$

$$\Rightarrow (y_۱-y_۲)(y_۱^۲+y_۲^۲+y_۱y_۲)+۲(y_۱-y_۲)=۰$$

$$\Rightarrow (y_۱-y_۲)(\underbrace{y_۱^۲+y_۲^۲+y_۱y_۲+۲}_{\ge ۲})=۰ \Rightarrow y_۱-y_۲$$
$$=۰ \Rightarrow y_۱=y_۲$$

$$(\text{ضابطه ۲})\ x_۱=x_۲ \Rightarrow y_۱^۳=y_۲^۳ \Rightarrow y_۱=y_۲$$

که در هر حالت به ازای هر $x\in R$ فقط یک y حقیقی پیدا می‌شود.

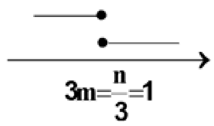
سوال ۶۱

پاسخ: گزینه ۲

$D_f : n - ۳x \ge ۰ \Rightarrow n \ge ۳x \Rightarrow x \le \frac{n}{۳}$

$D_g : x - ۳m \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۳m$

طبق زوج مرتب داده شده، متوجه می‌شویم که $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۱\}$ اشتراک دامنه‌ها باید $x = ۱$ باشد، در نتیجه:



$۳m = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱}{۳}$

$\frac{n}{۳} = ۱ \Rightarrow n = ۳$

حال با جایگذاری مقادیر فوق در توابع داریم:

$$f(x) + g(x) = \sqrt{۳ - ۳x} + \sqrt{x - ۳(\frac{۱}{۳})} = \sqrt{۳ - ۳x} + \sqrt{x - ۱}$$

$$\xrightarrow{x=۱} f(۱) + g(۱) = \sqrt{۳ - ۳} + \sqrt{۱ - ۱} = ۰ + ۰ = ۰ \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{(f+g)(۱)=a} a = ۰$$

بنابراین:

$$am + n = ۰ \times \frac{۱}{۳} + ۳ = ۳$$

سوال ۶۲

پاسخ: گزینه ۱

تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(-x+۱)-(-x-۳) & x<-۳\\ (-x+۱)-(x+۳) & -۳\le x\le ۱\\ (x-۱)-(x+۳) & x>۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۴ & x<-۳\\ -۲x-۲ & -۳\le x\le ۱\\ -۴ & x>۱\end{cases}$$

f در بازه $[-۳,۱]$ یک‌به‌یک است. ضابطه وارون آن را در این بازه به‌دست می‌آوریم.

$$y=-۲x-۲ \ \Rightarrow\ x=\frac{-۲-y}{۲}=-۱-\frac{y}{۲}\Rightarrow\ f^{-۱}(x)$$
$$=\frac{-x}{۲}-۱$$

برد تابع f را در این بازه به‌دست می‌آوریم که همان $D_{f^{-۱}}$ است:

$$-۳\le x\le ۱\ \xrightarrow{\times(-۲)}\ -۲\le -۲x\le ۶$$
$$\xrightarrow{-۲}\ -۴\le -۲x-۲\le ۴$$

پس ضابطه $f^{-۱}$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=\frac{-x}{۲}-۱$ و دامنه آن $[-۴\ ,\ ۴]$ است.

سوال ۶۳

پاسخ: گزینه ۲

دامنه توابع f و g برابر $R-\{۰\}$ است. پس دامنه f-g که از اشتراک دامنه توابع f و g حاصل می‌شود نیز $R-\{۰\}$ است.

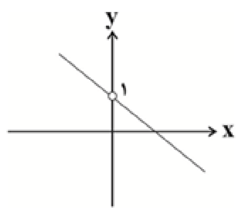
حال ضابطه f-g را می‌یابیم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x}-\frac{x^۲+۱}{x}$$
$$=\frac{x+۱-x^۲-۱}{x}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=\frac{x-x^۲}{x}=\frac{x(۱-x)}{x}=۱-x$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=۱-x,\ (x\neq ۰)$$

نمودار تابع را رسم و برد تابع را تعیین می‌کنیم:



$\Rightarrow$ برد $=R-\{۱\}$

سوال ۶۴

پاسخ: گزینه ۱

باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$(\frac{f}{g})(x) \geq 0$$

از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	
f			ت ن صفر	+	−	−		
g		−	− ت ن	−	−	+	+	
$\frac{f}{g}$			ت ن صفر ت ن	−	+ ت ن	−		

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \geq 0 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-1, 0) \cup [1, 2) \cup \{3\}$$

سوال ۶۵

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا عبارت زیر رادیکال را به فرم مربع کامل تبدیل می‌کنیم و سپس با مشخص کردن محدوده عبارت زیر رادیکال، برد تابع را به دست می‌آوریم.

$$x^2 - 2x + 5 = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 4 = (x-1)^2 + 4$$

$$(x-1)^2 \geq 0 \xrightarrow{+4} (x-1)^2 + 4 \geq 4$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq 2$$

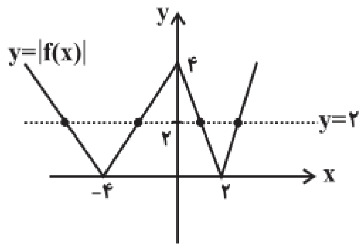
$$\xrightarrow{+1} \sqrt{(x-1)^2 + 4} + 1 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3 \Rightarrow R_f = [3, +\infty)$$

بنابراین برد تابع بازه $[3, +\infty)$ می‌باشد و اعداد طبیعی ۱ و ۲ را شامل نمی‌شود.

سوال ۶۶

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار $y = |f(x)|$ را رسم می‌کنیم:



در تابع $g(x)$ با توجه به این‌که عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، داریم: $۲ - |f(x)| \geq ۰ \Rightarrow |f(x)| \leq ۲$

واضح است که باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن‌ها $|f(x)| = ۲$ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x+۴ & , x < ۰ \\ -۲x+۴ & , x \geq ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{|f(x)|=۲} \begin{cases} x+۴ = ۲ \Rightarrow x = -۲ \\ x+۴ = -۲ \Rightarrow x = -۶ \\ -۲x+۴ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \\ -۲x+۴ = -۲ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

دامنه تابع $g(x)$، نقاطی می‌شود که در آن مقدار تابع $y = |f(x)|$ کمتر یا مساوی ۲ باشد.

$$D_g = [-۶, -۲] \cup [۱, ۳]$$

سوال ۶۷

پاسخ: گزینه ۱

از تساوی f و g نتیجه می‌گیریم که $b = -۲$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنه دو تابع باشد. دامنه تابع f را در دو حالت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱) $a \geq -۲$

$$D_f = [-۲, +\infty)$$

x		$b=-۲$		a	
$(x-a)^۲(x-b)$	−	۰	+	۰	+

۲) $a < -۲$

$$D_f = \{a\} \cup [-۲, +\infty)$$

x		a		$b=-۲$	
$(x-a)^۲(x-b)$	−	۰	−	۰	+

از طرفی چون $D_g = [-۲, +\infty)$ است، پس برای آن‌که $D_f = D_g$ باشد، باید $a \in [-۲, +\infty)$ باشد، پس:

$$a \geq -۲ \xrightarrow{+b} a+b \geq \underbrace{-۲+b}_{-۴} \Rightarrow a+b \geq -۴$$

سوال ۶۸

پاسخ: گزینه ۴

وارون f را به‌دست می‌آوریم:

$$y = x^۲+۲x+۴ \Rightarrow y = (x+۱)^۲+۳ \Rightarrow (x+۱)^۲ = y-۳$$

$$\Rightarrow |x+۱| = \sqrt{y-۳} \xrightarrow{x \leq -۱} -x-۱ = \sqrt{y-۳} \Rightarrow x = -\sqrt{y-۳}-۱$$

پس ضابطه $f^{-۱}$ به‌صورت روبه‌رو است: $f^{-۱}(x) = -\sqrt{x-۳}-۱$

اکنون معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x) = x+۲ \Rightarrow -\sqrt{x-۳}-۱ = x+۲$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x-۳} = x+۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۳ = x^۲+۶x+۹$$

$$\Rightarrow x^۲+۵x+۱۲ = ۰$$

معادله جواب ندارد ($\Delta < ۰$).

سوال ۶۹

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} D_f : x \geq -۲ \\ D_g : x \leq ۲ \end{cases} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۲, ۲]$$

همچنین $D_{f-g} = [-۲,۲]$.

از طرفی $(f-g)(x) = ۰$ نتیجه می‌دهد $f(x) = g(x)$ بنابراین $x = ۰$ است. در نتیجه: $D_{\frac{f+g}{f-g}} = [-۲,۲] - \{۰\}$

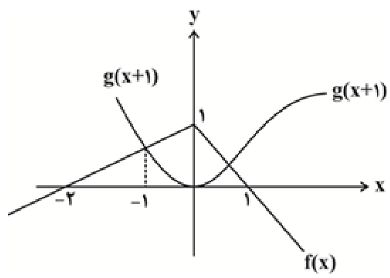
دامنه تابع مورد نظر شامل ۴ عدد صحیح است.

سوال ۷۰

پاسخ: گزینه ۳

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(۰) = f(۰) + g(۰)$$

با توجه به نمودار $f(۰) = ۱$ است. با توجه به اینکه نمودار $g(x+۱)$ را داریم، برای پیدا کردن $g(۰)$ باید x را برابر ۱- بگذاریم. ضابطه پاره‌خطی که $g(۰)$ روی آن است را پیدا می‌کنیم. شیب خط برابر $m = \frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأ آن ۱ است.



$$y = \frac{۱}{۲}x + ۱ \xrightarrow{x=-۱} y = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} = g(۰)$$

پس: $h(۰) = f(۰) + g(۰) = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$

سوال ۷۱

پاسخ: گزینه ۳

در دامنه‌های مشترک دو تابع f و g، می‌بایست تابع $f \times g$ را محاسبه کرد.

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (-\infty, -۵) \cup (۱, ۲)$$

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} (x)(۲x^۲) & , \quad ۱ < x < ۲ \\ (x)(\frac{۱}{x}) & , \quad x < -۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \times g = \begin{cases} ۲x^۳ & , \quad ۱ < x < ۲ \\ ۱ & , \quad x < -۵ \end{cases}$$

سوال ۷۲

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی $|x-۳|$ و $|y-۱|$ زمانی برابر صفر است که هر دو عبارت صفر شوند، بنابراین:

$$\begin{cases} |x-۳| = ۰ \Rightarrow x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ |y-۱| = ۰ \Rightarrow y-۱ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \end{cases} \Rightarrow f = \{(۳, ۱)\}$$

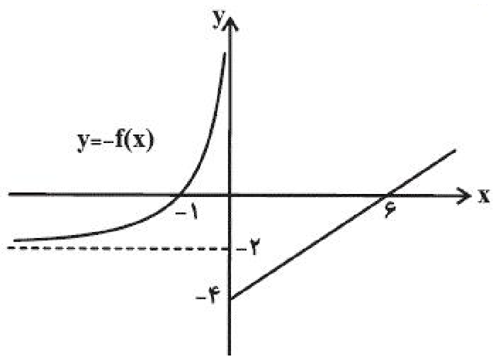
بنابراین رابطه موجود در گزینه «۴» نشان‌دهنده یک تابع است.

با کمک مثال نقض نشان می‌دهیم سایر رابطه‌ها، تابع نیستند، در گزینه «۱» زوج‌مرتب‌های $(۲, ۲)$ و $(۲, ۴)$، در گزینه «۲» زوج‌مرتب‌های $(۰, ۰)$ و $(۰, ۱)$ و در گزینه «۳» با جای‌گذاری $x = ۱$ در هر یک از ضابطه‌ها، دو زوج‌مرتب $(۱, ۲)$ و $(۱, ۳)$ تابع بودن را نقض می‌کنند.

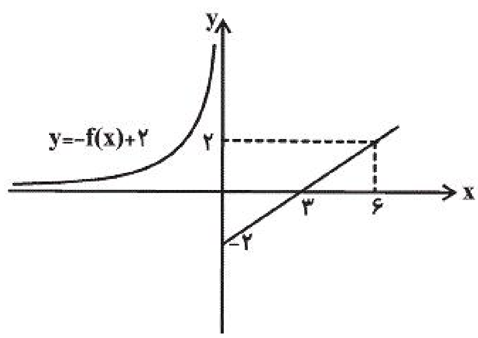
سوال ۷۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا نمودار تابع $y = -f(x)$ را رسم می‌کنیم (باید نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم)



اکنون نمودار تابع $y = -f(x)$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -f(x)+۲$ به‌دست آید. چون $-f(x)+۲$، زیر رادیکال است، نقاطی از تابع $y = -f(x)+۲$ جزء دامنه تابع مورد سؤال است که در آن $-f(x)+۲ \geq ۰$ باشد.



$$\Rightarrow D = (-\infty, ۰) \cup [۳, +\infty)$$

سوال ۷۴

پاسخ: گزینه ۳

شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که:

۱- دامنه دو تابع یکسان باشد.

۲- برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

$$۱)\ D_f = D_g = R\ ,\ \ f(-۲) = ۲, g(-۲) = -۲$$
$$\Rightarrow f(-۲) \neq g(-۲)$$

$$۲)\ D_f = D_g = R - \{۰\}, f(-\frac{۱}{۲}) = ۱, g(-\frac{۱}{۲}) = -۱$$
$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}) \neq g(-\frac{۱}{۲})$$

$$۴)\ D_f = R, D_g = R - \{۰\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$۳)\ D_f = R, |x| + ۱ = ۰ \Rightarrow |x| = -۱$ معادله جواب ندارد

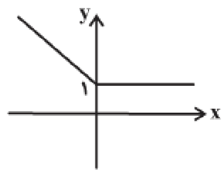
$$\Rightarrow D_g = R \Rightarrow D_f = D_g = R$$

$$f(x) = |x| - ۱\ ,\ \ g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{|x| + ۱} \xrightarrow{x^۲ = |x|^۲}$$
$$g(x) = \frac{|x|^۲ - ۱}{|x| + ۱} = \frac{(|x| - ۱)(|x| + ۱)}{|x| + ۱}$$
$$\Rightarrow g(x) = |x| - ۱ \Rightarrow f(x) = g(x)$$

سوال ۷۵

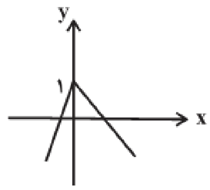
پاسخ: گزینه ۴

شرط آن‌که تابع وارون‌پذیر باشد آن است که یک‌به‌یک باشد، برای بررسی یک به یک بودن نمودار توابع را رسم می‌کنیم:



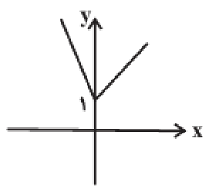
«۱» گزینهٔ : $y = |x| + ۱ - x = \begin{cases} ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ -۲x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$

یک‌به‌یک نیست.



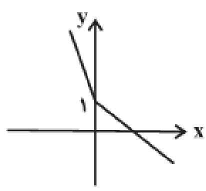
«۲» گزینهٔ : $y = ۱ - ۳|x| + x = \begin{cases} -۲x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ ۴x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$

یک‌به‌یک نیست.



«۳» گزینهٔ : $y = ۱ + ۳|x| - x = \begin{cases} ۲x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ -۴x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$

یک‌به‌یک نیست.



«۴» گزینهٔ : $y = ۱ - ۳x + |x| = \begin{cases} -۲x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ -۴x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$

یک‌به‌یک است، وارون‌پذیر است.

سوال ۷۶

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۴y+۱}{۴} = \left(\sqrt{x} + \frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۴y+۱}}{۲} \Rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{۴y+۱} - ۱}{۲}\right)^{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{عوض می کنیم.}]{\text{جای x و y را}} y = \left(\frac{\sqrt{۴x+۱} - ۱}{۲}\right)^{۲} = f^{-۱}(x)$$

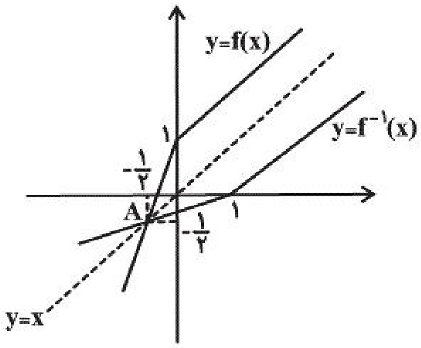
$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۲$$

سوال ۷۷

پاسخ: گزینه ۱

تابع را دو ضابطه‌ای کرده و رسم می‌کنیم:

$$f(x) = ۲x - |x| + ۱ = \begin{cases} x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ ۳x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم $(y = x)$ قرینه می‌کنیم. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y = x$ است و نقطه‌ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x < ۰ : ۳x + ۱ = x \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow A(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}) \Rightarrow a + b = -\frac{۱}{۲} + (-\frac{۱}{۲}) = -۱$$

سوال ۷۸

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۱ - \sqrt{x}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱ - \sqrt{x}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = ۱ - ۲y$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = (۱ - ۲y)^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جای x و y را عوض می کنیم}} y = (۱ - ۲x)^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = (۱ - ۲x)^{۲}$$

دقت کنید که قبل از به توان دو رساندن $\sqrt{x} = ۱ - ۲y$، باید بگوییم که چون $\sqrt{x} \geq ۰$ است، پس باید $۱ - ۲y \geq ۰$ باشد، یعنی $y \leq \frac{۱}{۲}$ است و چون در تابع وارون جای x و y عوض می‌شود، پس شرط $y \leq \frac{۱}{۲}$ برای تابع $f(x)$ تبدیل به شرط $x \leq \frac{۱}{۲}$ برای تابع $f^{-۱}(x)$ می‌گردد، پس وارون $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f^{-۱}(x) = (۱ - ۲x)^{۲}, \quad x \leq \frac{۱}{۲}$$

سوال ۷۹

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم به‌ازای $(x \in D_f)$، $f\circ f(x)^{-۱} = x$ چون دامنه‌ی f برابر $(-\infty,۱]$ پس به‌ازای $x \in (-\infty,۱]$ داریم $f\circ f(x)^{-۱} = x$.

داریم $y = \sqrt{۱+f\circ f^{-۱}(x)} = \sqrt{۱+x}$، برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع فوق، زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۱+x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \xrightarrow{x\in(-\infty,۱]} -۱ \leq x \leq ۱$$

سوال ۸۰

پاسخ: گزینه ۳

$$x+۴ > ۰ \Rightarrow x > -۴ \qquad (۱)$$

$$-۲x+۱ \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow x \in \left(-۴, \tfrac{۱}{۲}\right]$$

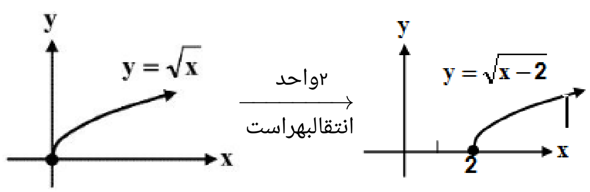
سوال ۸۱

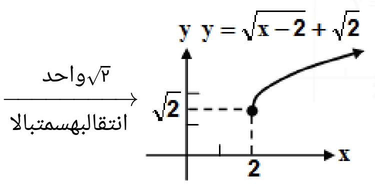
پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به نمودار، دامنه‌ی تابع باید برابر با $D = \{x|x \geq ۲\}$ باشد، پس گزینه‌ی «۳» جواب نیست. در گزینه‌های «۱» و «۲» مقادیر تابع کمتر یا مساوی مقادیر تابع $y = \sqrt{x}$ است که این با نمودار نشان داده شده همخوانی ندارد. تابع گزینه‌ی «۴» را ساده می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x+۲\sqrt{۲x-۴}}$$
$$= \sqrt{x+۲\times\sqrt{۲}\sqrt{x-۲}+۲-۲}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{x-۲})^{۲}+۲\sqrt{۲}\sqrt{x-۲}+(\sqrt{۲})^{۲}}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{(\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲})^{۲}} = |\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲}|$$
$$\xrightarrow{(\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲})>۰} y = \sqrt{x-۲}+\sqrt{۲}$$

با استفاده از انتقال تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار تابع $y = \sqrt{x-۲}+\sqrt{۲}$ را رسم می‌کنیم:





سوال ۸۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

واضح است که دامنه تابع بازه $[1,28]$ است. حال داریم:

$$f(x^3+1) < f(4x+1) \xrightarrow{\text{اکیدا نزولی است}} 4x+1 < x^3+1$$

$$\xrightarrow{\text{برقراری شرط برونده}} 1 \le 4x+1 < x^3+1 \le 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+1 \ge 1 \Rightarrow x \ge 0 \quad (1) \\ x^3+1 > 4x+1 \Rightarrow x^3-4x = x(x^2-4) > 0 \Rightarrow x \in (-2,0)\cup(2,+\infty) \quad (2) \\ x^3+1 \le 28 \Rightarrow x^3 \le 27 \Rightarrow x \le 3 \quad (3) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) مجموعه جواب‌های نامعادله اصلی به دست می‌آید:

$$\Rightarrow x \in (2,3]$$

سوال ۸۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

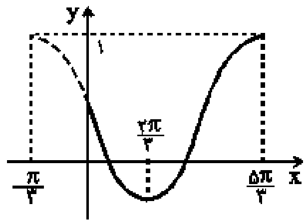
ضابطه قرینه نمودار f نسبت به خط $x = 1$ به صورت $y = f(2-x)$ است. پس در این سؤال ضابطه تابع جدید به صورت $y = (2-x)^3$ است.

$$\xrightarrow{\text{تقاطع دو نمودار}} x^3 = (2-x)^3 \Rightarrow x = 2-x \Rightarrow x = 1$$

سوال ۸۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



ابتدا نمودار تابع f را روی بازه داده شده رسم می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که بزرگترین بازه‌ای که تابع f با دامنه داده شده روی آن نزولی است، بازه $[0, \frac{2\pi}{3}]$ می‌باشد. اکنون ضابطه تابع جدید را تشکیل می‌دهیم:

$\frac{\pi}{2}$ به سمت راست یعنی $y = f(x - \frac{\pi}{2})$ و طول تمام نقاط را ۳ برابر می‌کنیم یعنی $g(x) = f(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{2})$.

از طرفی می‌دانیم که تابع f روی $[0, \frac{2\pi}{3}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع g نیز روی بازه‌ای نزولی است که $0 \le \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3}$ باشد:

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \le \frac{1}{3}x \le \frac{7\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\times 3} \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$$

سوال ۸۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر دو تابع f و g در فاصله I اکیداً صعودی باشند، تابع f + g نیز در این بازه اکیداً صعودی است.

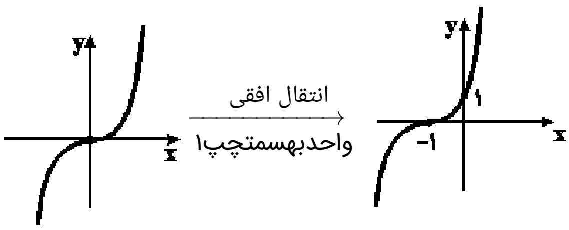
می‌دانیم تابع $f_1(x) = \tan x$ در بازه $I_1 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است. همچنین نمودار تابع $f_2(x) = \tan 2x$ با استفاده از انقباض افقی نمودار تابع $f_1(x) = \tan x$ با نسبت $\frac{1}{2}$ به دست می‌آید. پس نمودار تابع $f_2(x) = \tan 2x$ در بازه $I_2 = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است. پس تابع $f(x) = \tan 2x + \tan x$ در بازه $I_1 \cap I_2(x) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است.

سوال ۸۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار مورد نظر، مربوط به تابع $y=(x+1)^{۳}$ می‌باشد.



$$y=(x+1)^{۳}=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=۳ \end{cases} \Rightarrow a+b=۶$$

سوال ۸۷

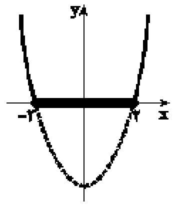
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$-۲<x<۲ \Rightarrow \frac{۱}{۵}<\frac{x+۳}{۵}<۱ \Rightarrow \left[\frac{x+۳}{۵}\right]=۰$$

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ \quad ; \ x\geq ۲ \text{ و } x\leq -۲ \\ ۰ \ ; \ -۲<x<۲ \end{cases}$$

حال نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:



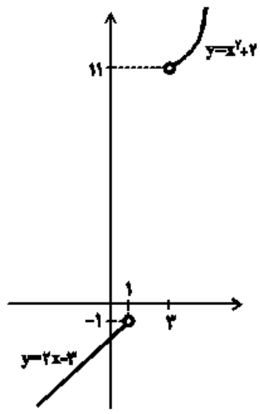
بنابراین با توجه به نمودار تابع g در بازه $(-\infty,۲)$ نزولی است.

سوال ۸۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ((۲))

نمودار تابع f به ازای x<۱ و x>۳ به‌صورت مقابل است.



برای این‌که سهمی $y = x^۲ - (۲m - ۱)x + ۲$ در بازه [۱,۳] اکیداً صعودی باشد، باید شروط زیر برقرار باشند.

اولاً: طول رأس سهمی کوچکتر یا مساوی ۱ باشد.

$$\frac{۲m-۱}{۲} \le ۱ \Rightarrow m \le \frac{۳}{۲}$$

ثانیاً:

$$-۱ \le f(۱) \Rightarrow -۱ \le ۴ - ۲m \Rightarrow m \le \frac{۵}{۲}$$

ثالثاً:

$$f(۳) \le ۱۱ \Rightarrow ۱۴ - ۶m \le ۱۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le m$$

و از اشتراک ۳ شرط به دست می‌آید: $m \in [\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \text{کمترین} & a = \frac{۱}{۲} \\ \text{بیشترین} & b = \frac{۳}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow b - a = ۱$$

سوال ۸۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$x \in [۳,۵) \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۳} < \frac{۵}{۳} \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = ۱ \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+۱}$

$\xrightarrow[\text{است.} fog^{-۱}]{\text{صفر تابع } x=۲} f(\underbrace{g^{-۱}(۲)}_{t}) = ۰ (*)$

اگر فرض کنیم $g^{-۱}(۲) = t$ باشد، داریم:

$g^{-۱}(۲) = t \Rightarrow g(t) = \sqrt{t+a} = ۲ \Rightarrow t = ۴ - a$

$\xrightarrow{(*)} f(۴-a) = \sqrt{۴-a+۱} = \sqrt{۵-a} = ۰ \Rightarrow a = ۵$

سوال ۹۰

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم که $(fof^{-۱})(x) = x$ برای همه مقادیر عضو $D_{f^{-۱}}$ برقرار است. از طرفی $D_{f^{-۱}} = R_f$ و $R_f = [\frac{۳}{۲}, ۲) \cup [۳, ۴)$. بنابراین باید معادله $x = x^۲ - ۳x + ۳$ را حل کنیم. البته تنها جواب‌هایی قابل قبول هستند که عضو R_f باشند. با حل این معادله به $x = ۱$ و $x = ۳$ می‌رسیم که تنها $x = ۳$ قابل قبول است.

سوال ۹۱

پاسخ: گزینه ۴

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

$= \{x \leq ۲ | \sqrt{۴-۲x} \in \{-۲, -۱, ۲\sqrt{۲}, \sqrt{۶}, ۲\}\}$

$$\begin{cases} \sqrt{۴-۲x} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۴-۲x = ۸ \Rightarrow x = -۲ \\ \sqrt{۴-۲x} = \sqrt{۶} \Rightarrow ۴-۲x = ۶ \Rightarrow x = -۱ \\ \sqrt{۴-۲x} = ۲ \Rightarrow ۴-۲x = ۴ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow D_{fog} = \{۰, -۱, -۲\}$

$\Rightarrow fog = \{(-۲, ۰), (-۱, -۱), (۰, ۰)\}$

$D_{\frac{f}{fog}} = D_f \cap D_{fog} - \{x | fog = ۰\} = \{-۱\}$

مجموع اعضای دامنه $\frac{f}{fog} = -۱$

سوال ۹۲

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به رابطه داده شده داریم:

$$(۱)\ f^{-۱}(۱) = g(۰) \Rightarrow (fog)(۰) = f(g(۰)) = f(f^{-۱}(۱)) = ۱$$

$$(۲)\ (g^{-۱} of^{-۱})(۱) = g^{-۱}(f^{-۱}(۱)) = g^{-۱}(g(۰)) = ۰$$

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)} (fog)(۰) + (g^{-۱} of^{-۱})(۱) = ۱$$

سوال ۹۳

پاسخ: گزینه ۱

$$D_f = [۰, +\infty)\ ,\ D_g = R,\ D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \left\{x | x \in R, ۲[x] - [x]^۲ \geq ۰\right\}$$

اگر فرض کنیم $t = [x]$ نامعادله بالا به‌صورت $۲t - t^۲ \geq ۰$ به‌دست می‌آید که جواب آن $۰ \leq t \leq ۲$ است. بنابراین داریم:

$$۰ \leq t = [x] \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq x < ۳$$

$$\Rightarrow D_{fog} = [۰, ۳)$$

اکنون برد fog را به‌دست می‌آوریم: $(fox)(x) = \sqrt{۲[x] - [x]^۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x] = ۰ : (fog)(x) = ۰ \\ [x] = ۱ : (fog)(x) = ۱ \\ [x] = ۲ : (fog)(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow R_{fog} = \{۰, ۱\}$$

مجموع اعضای برد fog برابر ۱ است.

سوال ۹۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ $f(x)$ را به‌دست آورده و سپس از روی آن دامنهٔ $g(x) = ۳f(۴x - ۲) - ۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-۲ \leq x \leq ۶ \Rightarrow -۴ \leq ۲x \leq ۱۲ \Rightarrow -۵ \leq ۲x - ۱ \leq ۱۱$$

پس دامنهٔ $f(x)$ به‌صورت $[-۵, ۱۱]$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن دامنهٔ g داریم:

$$-۵ \leq ۴x - ۲ \leq ۱۱ \Rightarrow -۳ \leq ۴x \leq ۱۳ \Rightarrow -\frac{۳}{۴} \leq x \leq \frac{۱۳}{۴}$$

سوال ۹۵

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تفریق fog و gof برابر اشتراک دامنهٔ آن‌ها است.

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

$D_g : x + |x| \neq ۰ \Rightarrow x > ۰$

$D_f : ۱۰x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱۰$

$\Rightarrow ۰ \leq \frac{۱}{x+|x|} \leq ۱۰$

چون می‌دانیم $x > ۰$، داریم:

$\frac{۱}{۲x} \leq ۱۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲۰} \leq x$

$\Rightarrow D_{fog} = [\frac{۱}{۲۰}, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

$D_f : ۰ \leq x \leq ۱۰$

$f(x) \in D_g : \sqrt{۱۰x - x^۲} > ۰ \Rightarrow x \neq ۰, ۱۰$

$\Rightarrow D_{gof} = (۰, ۱۰)$

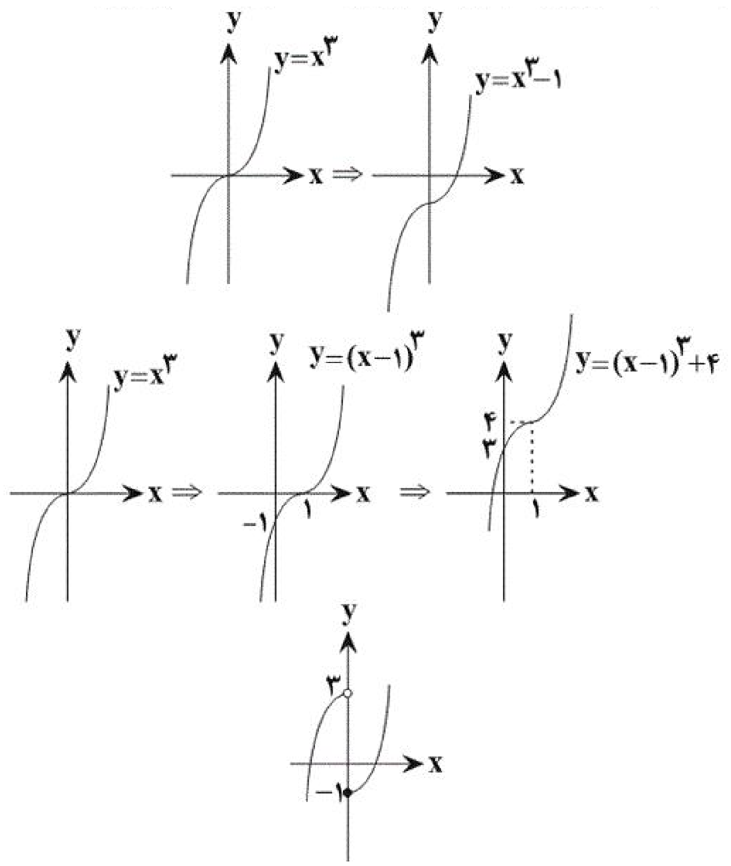
$D_{fog} \cap D_{gof} = [\frac{۱}{۲۰}, ۱۰)$

سوال ۹۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا باید نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنیم. برای این کار ابتدا نمودار $y = x^{۳} - ۱$ و $y = (x-۱)^{۳} + ۴$ را رسم می‌کنیم و بازه مد نظر را نگه می‌داریم.



با توجه به نمودار تابع $f(x)$ واضح است که اگر $a \in [-۱,۳)$ باشد، آن‌گاه معادله $f(x) = a$ دو جواب دارد. پس خط $y = a$ به‌ازای $a = \{-۱,۰,۱,۲\}$ در دو نقطه با نمودار تابع $f(x)$ برخورد می‌کند. پس ۴ مقدار صحیح برای a وجود دارد.

سوال ۹۷

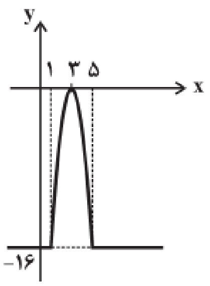
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(x)=\begin{cases}-۴ & ;x\le ۱\\ ۲(x-۳) & ;۱\le x\leqslant\\ ۴ & ;x\ge ۵\end{cases}\quad\Rightarrow f^{۲}(x)$$

$$=\begin{cases}۱۶ & ;x\le ۱\\ ۴(x-۳)^{۳} & ;۱\le x\le ۵\\ ۱۶ & ;x\geqslant ۵\end{cases}$$

و با توجه به ضابطه $f^{۲}$، نمودار $g=-f^{۲}$ به‌صورت زیر خواهد بود.



با توجه به نمودار، تابع g در بازه $[۳,۵]$ اکیداً نزولی است که بازه $\left[۴,\frac{۹}{۲}\right]$ زیر بازه‌ای از آن است.

سوال ۹۸

پاسخ: گزینه ۳

تابع $-f$ اکیداً صعودی با دامنه R است، پس تابع f اکیداً نزولی با دامنه R است.

$$f(|x|)>f\left(\frac{x+۴}{۳}\right)\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی است}}|x|<\frac{x+۴}{۳}$$

در دو حالت $x\ge ۰$ و $x<۰$، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}x\ge ۰: x<\dfrac{x+۴}{۳}\Rightarrow ۳x<x+۴\Rightarrow x<۲\\ \xrightarrow{\cap(x\ge ۰)} ۰\le x<۲\\ x<۰: -x<\dfrac{x+۴}{۳}\Rightarrow -۳x<x+۴\Rightarrow x>-۱\\ \xrightarrow{\cap(x<۰)} -۱<x<۰\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\cup}-۱<x<۲\Rightarrow a=-۱\gg b=۲$$

پس حداکثر $b-a$ برابر است با: $۲-(-۱)=۳$.

سوال ۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f = \{(۲,-۲),(۳,x^۲+b),(۴,ax)\} \xrightarrow{\text{تابع صعودی است}} x^۲+b \le ax$$

$$x^۲ - ax + b \le ۰$$

از آن‌جا که جواب این نامعادله بازه $[-۱,۲]$ است، پس $x = -۱$ و $x = ۲$ باید ریشه‌های معادله درجه ۲ بالا باشند.

$$\left.\begin{array}{l} a = S = ۲-۱ = ۱ \\ b = P = (۲)(-۱) = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow a-b = ۳$$

لازم به ذکر است که با مقدار $b = -۲$، شرط $x^۲+b \ge -۲$ نیز برقرار خواهد بود.

سوال ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$D_{f+g} = \{۱,۲,۳\}$$

$$\Rightarrow h = f+g = \{(۱,۲),(۲,۱+x^۲),(۳,۵)\}$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی باشد}h} x_۱ < x_۲ \Rightarrow h(x_۱) \le h(x_۲)$$

$$\Rightarrow ۲ \le x^۲+۱ \le ۵ \Rightarrow ۱ \le x^۲ \le ۴ \Rightarrow x \in [-۲,-۱] \cup [۱,۲]$$

بنابراین x می‌تواند ۴ عدد صحیح ۲-، ۱-، ۱ و ۲ باشد.

سوال ۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\frac{f(۲x+۱)}{f(x-۲)} \ge ۱ \xrightarrow{\times f(x-۲)<۰} f(۲x+۱) \le f(x-۲)$$

$$\xrightarrow{\text{اکیدا نزولی است}} ۲x+۱ \ge x-۲ \Rightarrow x \ge -۳$$

سوال ۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(x) = |2x| - |x-1| = \begin{cases} -x-1; & x < 0 \\ 3x-1; & 0 \le x < 1 \\ x+1; & x \ge 1 \end{cases}$$

تابع f در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = -x - 1$$

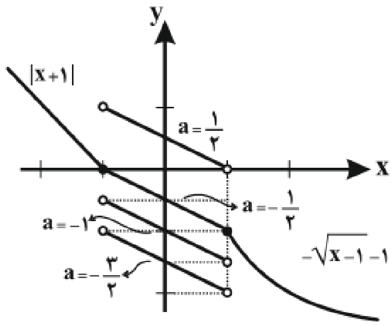
$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \xrightarrow{x \le 0} x = -1$$

سوال ۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

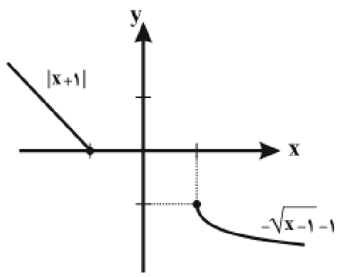
گزینه «۲»

راه حل اول: نمودار تابع $f(x)$ را برای مقادیر داده شده a رسم می‌کنیم:



واضح است برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، فقط مقدار $a = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

راه حل دوم: ابتدا ضابطه‌ها را رسم می‌کنیم:



حال برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، باید شروط زیر برقرار باشد:

$$x = -1: \frac{1}{2} + a \le 0 \Rightarrow a \le -\frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$x = 1: \frac{-1}{2} + a \ge -1 \Rightarrow a \ge -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

بنابراین داریم:

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

سوال ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که $(f^{-1}of)(x)$ و $(fof^{-1})(x)$ هر دو تابع همانی می‌باشند.

$f^{-1}of(x)$ تابعی همانی روی دامنه f و $(fof^{-1})(x)$ تابعی همانی روی برد f است، لذا:

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad (f^{-1}of)(x) = x$$

$$\forall x \in R_f \quad ; \quad (fof^{-1})(x) = x$$

دامنه f بازه $(-\infty , ۴]$ و برد آن بازه $[۲ , +\infty)$ است. بنابراین:

$$\forall x \in (-\infty , ۴] \quad ; \quad (f^{-1}of)(x) = x$$

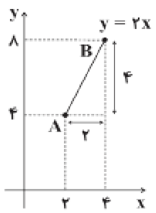
$$\forall x \in [۲ , +\infty) \quad ; \quad (fof^{-1})(x) = x$$

بنابراین از آنجایی که دامنه مجموع دو تابع، اشتراک دامنه‌های آنهاست، می‌توان نوشت:

$$h(x) = (f^{-1}of)(x) + (fof^{-1})(x) = x + x = ۲x$$

$$D_{h(x)} = (-\infty , ۴] \cap [۲ , +\infty) = [۲ , ۴]$$

بنابراین نمودار $h(x)$ به شکل زیر است:



طول پاره‌خط AB برابر است با: $\sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$

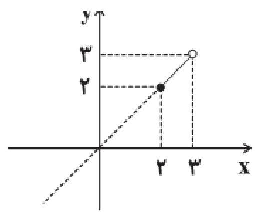
سوال ۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

اگر $x \in [۱ , ۲)$ باشد، آن‌گاه $f(x) = x + [x] = x + ۱$ می‌شود.

می‌دانیم $D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$ است و با توجه به نمودار $R_f = [۲ , ۳)$ می‌شود. در نتیجه:

$$(fof^{-1})(x) = x \quad ; \quad ۲ \le x < ۳$$



نمودار حاصل گزینهٔ «۲» است.

سوال ۱۰۶

پاسخ: گزینه ۴

از روی شکل مشخص است $D_g = (-\infty, ۰]$ و $D_f = [۰, +\infty)$ حال با توجه به تعریف دامنه fog یعنی $D_{fog} = \{x|x \in D_g, g(x) \in D_f\}$ دامنه تابع fog را تعیین می‌کنیم:

$$D_{fog} = \{x|x \in (-\infty, ۰], g(x) \in [۰, +\infty)\}$$

به ازای xهای عضو مجموعه $(-\infty, -۲]$ مقادیر g در بازه $[۰, +\infty)$ قرار دارند. پس: $D_{fog} = (-\infty, -۲]$

از بین اعداد صحیح منفی، دامنه تابع تنها شامل عدد ۱- نمی‌باشد.

سوال ۱۰۷

پاسخ: گزینه ۳

داریم:

$$(fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$$

$$(fog)^{-۱}(۲x-۴) = \frac{x}{۲} \Rightarrow (g^{-۱}of^{-۱})(۲x-۴) = \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۲x-۴)) = \frac{x}{۲} \quad (*)$$

محل برخورد نمودار وارون تابع f(x) با محورyها، همان $f^{-۱}(۰)$ است. پس کافی است در رابطه (*)، x را ۲ قرار دهیم:

$$\xrightarrow[x=۲]{(*)} g^{-۱}(f^{-۱}(۲(۲)-۴)) = \frac{۲}{۲}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۰)) = ۱ \xrightarrow{f^{-۱}(۰)=a} g^{-۱}(a) = ۱$$

$$\Rightarrow a = g(۱) \xrightarrow{g(x)=۲x^۳+۱} a = ۲(۱)^۳+۱ = ۲+۱ = ۳$$

$$\xrightarrow{a=f^{-۱}(۰)} f^{-۱}(۰) = ۳$$

سوال ۱۰۸

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا دقت کنیم که اگر $x = -۳$ باشد، داریم: $g(-۳) = f(-۱)$

حال در عبارت صورت سؤال به‌جای $f(-۱)$، $g(-۳)$ قرار می‌دهیم:

$$f^{-۱}(g^{-۱}(f(-۱))) = f^{-۱}(g^{-۱}(g(-۳)))$$

$$= f^{-۱}(-۳) = \frac{(-۳)^۳}{۹} + \sqrt[۳]{۹(-۳)} = -۳+(-۳) = -۶$$

توجه داشته باشید: $(x \in D_g) : g^{-۱}(g(x)) = x$

سوال ۱۰۹

پاسخ: گزینه ۴

در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، با شرط $a+d=۰$ تابع f و $f^{-۱}$ بر هم منطبق می‌شوند ($f=f^{-۱}$). در این جا با توجه به این که $(fof)(x)=x$ شده، پس نتیجه می‌گیریم $f(x)=f^{-۱}(x)$ است و داریم:

$$f(x)=\frac{ax+۲}{x+a-۲}\xrightarrow{f=f^{-۱}}a+a-۲=۰\Rightarrow a=۱$$

بنابراین ضابطه f به‌صورت $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ درمی‌آید و مقدار $f^{-۱}(a-۱)$ برابر است با:

$$f^{-۱}(a-۱)=f(a-۱)=f(۱-۱)=f(۰)=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

سوال ۱۱۰

پاسخ: گزینه ۱

$$y=۲f^{-۱}(x-۱)+۳\xrightarrow{(۳,۷)}۷=۲f^{-۱}(۲)+۳$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲)=۲\Rightarrow f(۲)=۲$$

یعنی نقطه $(۱,۲)$ روی نمودار $f(x+۱)$ قرار دارد. چون $f^{-۱}$ وجود دارد، f یک به یک است، بنابراین $f(x+۱)$ نیز یک به یک است و هیچ نقطه دیگری با عرض ۲ ندارد. در نتیجه $(۳,۲)$ قطعاً روی نمودار $y=f(x+۱)$ قرار ندارد.

سوال ۱۱۱

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به آن‌که تابع f اکیداً صعودی است، به‌ازای $x<۱$ منفی و به‌ازای $x>۱$ مثبت است. حال با تعیین علامت عبارت زیر رادیکال داریم:

$$(x^۳-x)f(x)\geq ۰$$

$$x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$$

		−۱		۰		۱	
$x^۳-x$	−		+		−		+
$f(x)$	−		−		−		+
P	+		−		+		+

دامنهٔ $\sqrt{(x^۳-x)f(x)}$ برابر $R-(-۱,۰)$ است، بنابراین:

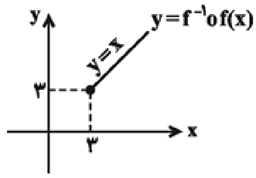
$$\begin{cases}a=-۱\\b=۰\end{cases}\Rightarrow a+b=-۱$$

سوال ۱۱۲

پاسخ: گزینه ۴

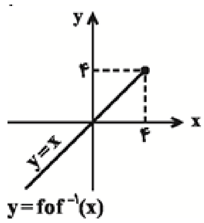
می‌دانیم $y = f^{-1}of(x)$ تابعی همانی روی دامنه f است. پس نمودار $y = f^{-1}of(x)$ به شکل مقابل است:

$(D_f = [۳,+\infty))$



از سوی دیگر $y = fof^{-1}(x)$ تابع همانی روی برد f (دامنه f^{-1}) است پس نمودار $y = fof^{-1}(x)$ به شکل مقابل است:

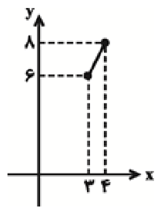
$(R_f = (-\infty,۴])$



دامنه g(x) اشتراک دامنه‌های $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ می‌باشد یعنی: $D_g = [۳,۴]$ و ضابطه g(x) نیز جمع ضابطه‌های $f^{-1}of(x) = x$ و $fof^{-1}(x) = x$ می‌باشد. بنابراین:

$$g(x) = ۲x \qquad ۳ \le x \le ۴$$

پس نمودار $y = g(x)$ به شکل مقابل است:



بنابراین طول نمودار تابع g(x) برابر است با:

$$d = \sqrt{(۳-۴)^۲ + (۶-۸)^۲} = \sqrt{۵}$$

سوال ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۱

چون fog از درجهٔ اول است، پس f و g توابعی از درجهٔ اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x)=ax+b$ خواهیم داشت:

$$f(x)+g(x)=4 \Rightarrow g(x)=4-ax-b$$

$$f(g(x))=7-4x \Rightarrow ag(x)+b=7-4x$$

$$\Rightarrow a(4-ax-b)+b=7-4x$$

$$\Rightarrow -a^2x+4a-ab+b=7-4x$$

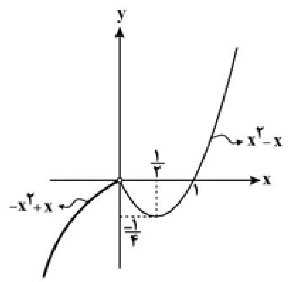
$$\Rightarrow \begin{cases} -a^2=-4 \Rightarrow a=\pm 2 \\ 4a-ab+b=7 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} 2 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow g(x)=-2x+3 \Rightarrow g(2)=-1 \\ a=-2 \Rightarrow b=5 \Rightarrow g(x)=2x-1 \Rightarrow g(2)=3 \end{cases}$$

سوال ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل تابع در بازه $(0,\frac{1}{2}]$ نزولی است که ضابطه آن در این بازه $y=x^2-x$ می‌باشد و برد آن هم $[-\frac{1}{4},0)$ است. حالا ضابطه معکوس آن را پیدا می‌کنیم:

$$y=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \Rightarrow y+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+\frac{1}{4}}=|x-\frac{1}{2}|$$

$$\xrightarrow{0<x\le\frac{1}{2}} \sqrt{y+\frac{1}{4}}=-(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \qquad -\frac{1}{4}\le x<0$$

سوال ۱۱۵

پاسخ: گزینه ۱

می‌توان نوشت:

$$(f+g)+(f-g)=۲f=\{(۱,۶),(۲,۸),(۳,۲),(۴,۴)\}$$

$$(f+g)-(f-g)=۲g=\{(۱,۴),(۲,۰),(۳,۲),(۴,۲)\}$$

لذا:

$$f=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۲)\}$$

$$g=\{(۱,۲),(۲,۰),(۳,۱),(۴,۱)\}$$

اما این فقط ظاهر قضیه است، $f+g$ و $f-g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف شده است یعنی f و g به جز زوج‌های مرتب مشخص شده شاید زوج‌های مرتب دیگری را هم شامل باشند. یعنی f و g حداقل این ۴ زوج‌مرتب مشخص شده را دارند، در این حالت:

$$fog=\{(۱,۴),(۳,۳),(۴,۳)\}$$

یعنی fog حداقل شامل ۳ زوج‌مرتب است، در نتیجه تعداد اعضای fog نمی‌تواند ۲ باشد.

سوال ۱۱۶

پاسخ: گزینه ۴

در تابع وارون می‌دانیم که:

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-۱}(b)=a$$

در این مسأله f و g وارون یکدیگرند. با انتخاب دو عدد مناسب داریم:

$$f(۰)=۱ \Leftrightarrow f^{-۱}(۱)=۰ \Rightarrow g(۱)=۰ \Rightarrow \frac{۱+b}{۲}=۰ \Rightarrow b=-۱$$

$$g(۲)=\frac{۴+(-۱)}{۲\times۲}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow f(\frac{۳}{۴})=۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}a+\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۱}=۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}a+\frac{۵}{۴}=۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}a=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow a=۱ \Rightarrow a+b=۰$$

سوال ۱۱۷

پاسخ: گزینه ۱

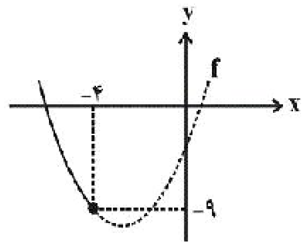
$$y = x^۲ + ۶x - ۱ \xrightarrow{+۱۰} y + ۱۰ = (x+۳)^۲ \xrightarrow{x \le -۴}$$

$$\Rightarrow x + ۳ = -\sqrt{y+۱۰} \Rightarrow x = -۳ - \sqrt{y+۱۰}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = -۳ - \sqrt{x+۱۰}$$

از طرفی برد تابع f به ازای $x \le -۴$ فاصله $[-۹, +\infty)$ است. چون:

$$f(x) = x^۲ + ۶x - ۱ = (x+۳)^۲ - ۱۰ \; ; \; (x \le -۴)$$
$$\Rightarrow f(x) \ge -۹$$



پس دامنه $f^{-۱}$ برابر $x \ge -۹$ است.

سوال ۱۱۸

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به ریشه‌های داخل هر قدر مطلق، تابع f را بعد از تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق، بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۶ + x + ۱ & x < -۱ \\ -۲x + ۶ - x - ۱ & -۱ \le x \le ۳ \\ ۲x - ۶ - x - ۱ & x > ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + ۷ & , \quad x < -۱ \\ -۳x + ۵ & , \quad -۱ \le x \le ۳ \\ x - ۷ & , \quad x > ۳ \end{cases}$$

با توجه به شیب خط‌های حاصل، تابع f در فاصله‌ی $x > ۳$ صعودی است (ضریب x مثبت است). پس ضابطه‌ی معکوس تابع را در این فاصله می‌یابیم: $f(x) = x - ۷$ و $x > ۳$

$y = x - ۷ \Rightarrow x = y + ۷ \Rightarrow$ تابع معکوس: $y = x + ۷$

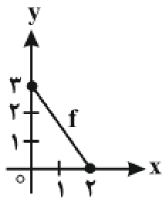
دامنه‌ی تابع معکوس که همان برد تابع f است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$x > ۳ \Rightarrow x - ۷ > -۴ \Rightarrow f^{-۱}$ دامنه‌ی: $x > -۴$

پس ضابطه‌ی تابع معکوس عبارت است از: $y = x + ۷$ و $x > -۴$

سوال ۱۱۹

پاسخ: گزینه ۳



با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f برابر $D_f = [۰,۲]$ است.

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع fof ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به‌دست می‌آوریم. شیب خط داده شده برابر $m = -\frac{۳}{۲}$ و عرض از مبدأ آن $h = +۳$ است. پس داریم:

$$\text{ضابطه‌ی}\ f : f(x) = mx + h \xrightarrow[h=۳]{m=-\frac{۳}{۲}} f(x) = -\frac{۳}{۲}x + ۳$$

پس داریم:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ x \in [۰,۲] \,\middle|\, \underbrace{۰ \le -\frac{۳}{۲}x + ۳ \le ۲}_{(*)} \right\}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۰ \le -\frac{۳}{۲}x + ۳ \le ۲ \xrightarrow{-۳} -۳ \le -\frac{۳}{۲}x \le -۱$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{۲}{۳})} ۲ \ge x \ge \frac{۲}{۳}$$

بنابراین:

$$D_{fof} = \{x \in [۰,۲], x \in [\tfrac{۲}{۳},۲]\} = [\tfrac{۲}{۳},۲]$$

که شامل ۲ عدد صحیح ۱ و ۲ است.

سوال ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه‌ی نمودار انتقال‌یافته را می‌یابیم:

$$\sqrt{۱-۲x} \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = \sqrt{۱-۲(x+۱)}$$

$$= \sqrt{۱-۲x-۲}$$

$$\sqrt{-۱-۲x} \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = ۱ + \sqrt{-۱-۲x}$$

حال ضابطه‌ی معکوس را می‌یابیم. دقت کنید که برد تابع حاصل بازه‌ی$[۱,+\infty)$است. پس دامنه‌ی $y^{-۱}$ به صورت$x \ge ۱$ است:

$$y = ۱ + \sqrt{-۱-۲x} \Rightarrow y - ۱ = \sqrt{-۱-۲x}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y-۱)^{۲} = -۱-۲x$$

$$\Rightarrow y^{۲} - ۲y + ۱ = -۱ - ۲x \Rightarrow -۲x = y^{۲} - ۲y + ۲$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^{۲}-۲y+۲}{-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + x - ۱$$