**۱** گزینه ۱

می‌دانیم که $x \to (\frac{۱}{۴})^{+}$ یعنی $x = \frac{۱}{۴} + \varepsilon$، پس:

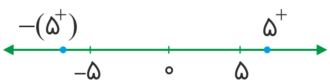
$$A = \lim_{x \to (\frac{۱}{۴})^{+}} [\frac{۱}{x}] = [\frac{۱}{\frac{۱}{۴} + \varepsilon}] = [\frac{۱}{(\frac{۱}{۴})^{+}}] = [۴^{-}] = ۳$$

همچنین $x \to (\frac{۱}{۵})^{-}$ یعنی $x = \frac{۱}{۵} - \varepsilon$، پس:

$$B = \lim_{x \to (\frac{۱}{۵})^{-}} [\frac{-۱}{x}] = [\frac{-۱}{\frac{۱}{۵} - \varepsilon}] = [-\frac{۱}{(\frac{۱}{۵})^{-}}]$$

$$B = [-(۵^{+})] = [(-۵)^{-}] = -۶$$

احتمالاً در قسمت $[-(۵^{+})] = [(-۵^{-})]$ کمی مشکل دارید. کافی است که در $[-(۵^{+})]$ به‌ترتیب اتفاقاتی که روی عدد ۵ افتاده است را اِعمال کنید. $(۵^{+})$ یعنی بیشتر از $(۵)$ و $-(۵^{+})$ یعنی قرینهٔ بیشتر از ۵. روی محور زیر ببینید:




حال مقدار C را به دست می‌آوریم.

$x \to (-\frac{۱}{۶})^{-}$ یعنی $x = -\frac{۱}{۶} - \varepsilon$، پس:

$$C = \lim_{x \to (-\frac{۱}{۶})^{-}} [\frac{-۴}{x}] = [\frac{-۴}{-\frac{۱}{۶} - \varepsilon}] \overset{\text{صورت و مخرج قرینه شوند}}{=} [\frac{۴}{\frac{۱}{۶} + \varepsilon}] = [\frac{۴}{(\frac{۱}{۶})^{+}}] = [۲۴^{-}] = ۲۳$$

پس $A + B + C = ۲۰$ خواهد بود.

۲

گزینه ۳

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x)$ ابتدا باید $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+۴-۲}{x+۱}=\lim_{x\to+\infty}(۴-\frac{۲}{x+۱})=۴$$

$$\lim_{x\to+\infty}fog(x)=\lim_{x\to ۴^-}f(x)=[۰^-]=-۱$$

چون تابع f، دارای جزءصحیح است، باید معلوم شود که داخل جزءصحیح $۰^+$ ایجاد می‌شود یا $۰^-$.
برای این کار می‌توان از ضرب مزدوج در صورت و مخرج تابع f استفاده کرد.

$$\lim_{x\to ۴^-}f(x)=\lim_{x\to ۴^-}[\frac{(x-\sqrt{x+۱۲})(x+\sqrt{x+۱۲})}{x+\sqrt{x+۱۲}}]=\lim_{x\to ۴^-}[\frac{x^۲-x-۱۲}{x+\sqrt{x+۱۲}}]$$

$$=\lim_{x\to ۴^-}[\frac{(x-۴)(x+۳)}{x+\sqrt{x+۱۲}}]=[۰^-]=-۱\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=-۱$$

دقت کنید از طریق رسم نمودار $y_۱=x$ و $y_۲=\sqrt{x+۱۲}$، هم می‌توان فهمید داخل جزءصحیح $۰^-$ ایجاد می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty}(gof)(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+۲}{x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x}{x}=۴$$

دقت کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x-\sqrt{x+۱۲}]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$

و درنهایت چون $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)=۴$ ، پس $[\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)]=۴$. بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)+[\lim_{x\to+\infty}(gof(x))]=-۱+۴=۳$$

۳

گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۲+۱}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+x+۱}{x(x+۱)}}-\sqrt{\frac{x^۲+۱-x^۲}{x^۲(x^۲+۱)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x^۲+x}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۴+x^۲}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x+۱}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۳+x}}\right)=\sqrt{۲}-۰=\sqrt{۲}$$

**۴** گزینه ۴

اگر $n < ۴$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+۳x^۴}{۲x^۳+(a-۱)x^۴}=\lim_{x\to\infty}\frac{۳x^۴}{(a-۱)x^۴}=\frac{۳}{a-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{a-۱}=۲\Rightarrow ۲a-۲=۳\Rightarrow a=۲/۵$$

و اگر $n=۴$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+۳x^۴}{۲x^۳+(a-۱)x^۴}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+۳)x^۴}{۲x^۳+(a-۱)x^۴}=\frac{a+۳}{a-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{a+۳}{a-۱}=۲\Rightarrow ۲a-۲=a+۳\Rightarrow a=۵$$

و اگر $n > ۴$ باشد، حاصل حد بی‌نهایت می‌شود؛ پس مجموع مقادیر ممکن برای a عبارت است از: $۲/۵+۵=۷/۵$

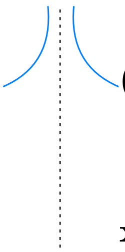
**۵** گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{x}-\frac{۱}{x}=۲-\frac{۱}{\infty}=۲^- \quad,\quad \lim_{x\to ۲^-}[-x]=[-۲^-]=-۲$$

$$\lim_{x\to+\infty}(gof)(x)=\lim_{x\to ۲^-}g(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{۴}{۰^-}=-\infty$$

**۶** گزینه ۴

چون نمودار تابع اطراف $x=۱$ به‌صورت زیر است، مخرج کسر در $x=۱$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، یعنی عامل $(x-۱)^۲$ در مخرج موجود باشد، پس:



$$(x+c)^۲=(x-۱)^۲\Rightarrow c=-۱$$

ازطرفی نمودار، در $x=۲$ نقطه‌ای توخالی است، یعنی $x=۲$ هم ریشهٔ صورت است و هم ریشهٔ مخرج:

$$x=۲\xrightarrow{\text{در صورت}}۲m-۲=۰\Rightarrow m=۱$$

$$x=۲\xrightarrow{\text{در مخرج}}۴a+۲b=۰\Rightarrow ۲a+b=۰\Rightarrow b=-۲a$$

درنهایت داریم:

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{(ax^۲-۲ax)(x-۱)^۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{x-۲}}{ax\cancel{(x-۲)}(x-۱)^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۱\ ,\ b=-۲\Rightarrow a+b=-۱$$

**۷** گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\tan ۲x}-\frac{۱}{\sin ۲x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}}-\frac{۱}{\sin ۲x}\right)$$

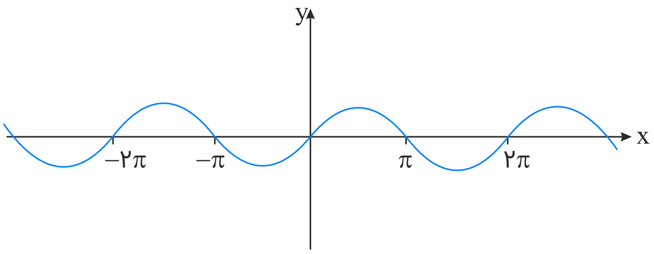
$$=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\cos ۲x-۱}{\sin ۲x}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-۲\sin^{۲}x-۱}{۲\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin^{۲}x}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x}{\cos x}=۰$$

**۸** گزینه ۳

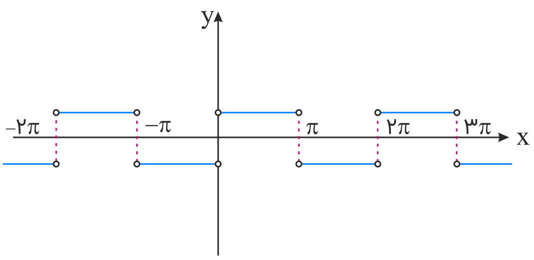
$$\frac{f(x)}{|f(x)|}=\frac{\sin x}{|\sin x|}=\begin{cases} ۱ & ;\ \sin x>۰ \\ -۱ & ;\sin x<۰ \end{cases}$$

می‌دانیم نمودار تابع $\sin x$ به‌صورت زیر است:




نمودار تابع $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ در قسمت‌هایی از نمودار sinx که بالای محور xها است برابر با ۱ و در قسمتی که زیر محور xها است برابر با ۱- است.

**تذکر:** تابع $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ در نقاطی که $\sin x=۰$ است، تعریف نشده است.




باتوجه‌به نمودار رسم‌شده و گزینه‌های صورت سوال، تابع تنها در بازهٔ $(\pi, ۲\pi)$ پیوسته است.

**۹** گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}=\frac{0}{0}$$

$$\sqrt{x}-1=(\sqrt{x}-1)\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\sqrt[3]{x}-1=(\sqrt[3]{x}-1)\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\sqrt[4]{x}-1=(\sqrt[4]{x}-1)\times\frac{(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

بنابراین عبارت‌های به‌دست‌آمده را در صورت سؤال جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)^3(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{1}{(2)(3)(2)(2)}=\frac{1}{24}$$

روش دوم:

نکته: وقتی توابع $f$ و $g$ به‌سمت ۱ میل کنند، آنگاه حد تابع $f-g$ با حد تابع $\frac{f^n-g^n}{n}$ برابر است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{2}\right)\left(\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{3}\right)\left(\frac{(\sqrt[4]{x})^4-1^4}{4}\right)}{(x-1)^3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\cancel{(x-1)^3}}{2\times 3\times 4}}{\cancel{(x-1)^3}}=\frac{1}{24}$$

**۱۰** گزینه ۴

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ (گزینهٔ $\lim\limits_{x\to ۱^-} \log[x] = \log[۱^-] = \log ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده

۲ (گزینهٔ $\lim\limits_{x\to ۰^+} \cot[x] = \cot[۰^+] = \cot ۰ \Rightarrow$ تعریف نشده

۳ (گزینهٔ $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۱}{[x]-۲}$ تعریف نشده

$\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۱}{۱-۲} = -۱$ $\Rightarrow$ حد راست موجود نیست.

۴ (گزینهٔ $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{|x|} = \frac{[۰^+]}{x} = ۰ \Rightarrow$ حاصل حد موجود است.

**۱۱** گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} \left[\frac{-۲}{x^۲}\right] = \left[\frac{-۲}{\left(\frac{۱}{۴}\right)^-}\right] = [-(۸^+)] = -۹$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} \left[\frac{۳}{x^۲}\right] = \left[\frac{۳}{\left(\frac{۱}{۴}\right)^-}\right] = [۱۲^+] = ۱۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+} \frac{۱۶x+۹}{۲۴x+۱۲} = \frac{۱}{(-۱۲)^+ + ۱۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

**۱۲** گزینه ۳

نکته: اعداد $۰^+$ یا $۰^-$ را صفر حدی می‌نامیم. درواقع این اعداد به‌معنای صفر اصلی (صفر مطلق) نیستند، بلکه یک عدد بسیار نزدیک به صفر هستند؛ بنابراین توجه شود که:

الف) $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ حدی}} = \infty$

ب) $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ مطلق}} =$ تعریف نشده

$$\lim_{x\to(-۳)^-} \frac{[x+۵]}{x+۳} = \frac{[(-۳)^- + ۵]}{(-۳)^- + ۳} = \frac{[۲^-]}{۰^-} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to(-۳)^+} \frac{x+۴}{[x+۳]} = \frac{-۳+۴}{[(-۳)^+ + ۳]} = \frac{۱}{[۰^+]} = \frac{۱}{\text{۰ مطلق}} =$ تعریف نشده

۱۳ گزینه ۳

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می‌توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم‌ارز است.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x \to ۰^- \Rightarrow \frac{۱}{x} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x\to ۰^-} x(\frac{۱}{x}) = ۱$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x \to ۰^+ \Rightarrow \frac{۱}{x} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x\to ۰^+} x(\frac{۱}{x}) = ۱$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^- \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = (-\infty)(-۱) = +\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x \to -\infty$ متناهی نیست.

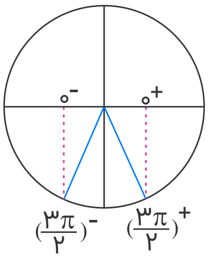
بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^+ \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = ۰$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = (+\infty)(۰) = ۰$$

**۱۴** گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه عبارات داخل جزء صحیح به ازای $x \to \frac{۱}{۴}$، عدد صحیح می‌شود، باید حد چپ و راست را بررسی کنیم. مقدار کتانژانت به ازای $(\frac{\pi}{۴})^+$ کمی کمتر از یک و به ازای $(\frac{\pi}{۴})^-$ کمی بیشتر از یک است. زیرا که مقدار سینوس برای زوایای بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{۴}$ از مقدار کسینوس آن بیشتر می‌باشد. همچنین مقدار کسینوس به ازای $(\frac{۳\pi}{۲})^+$ کمی بیشتر از صفر و به ازای $(\frac{۳\pi}{۲})^-$ کمی کمتر از صفر است. (به دایرهٔ مثلثاتی زیر توجه کنید)




بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to (\frac{۱}{۴})^+} (\sin \pi x[\cot \pi x] + [\cos ۶\pi x] \cos \pi x) = \sin (\frac{\pi}{۴})^+ [\cot (\frac{\pi}{۴})^+] + [\cos (\frac{۶\pi}{۴})^+] \cos (\frac{\pi}{۴})^+$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times [۱^-] + [۰^+] \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۰ + ۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

$$\lim_{x \to (\frac{۱}{۴})^-} (\sin \pi x[\cot \pi x] + [\cos ۶\pi x] \cos \pi x) = \sin (\frac{\pi}{۴})^- [\cot (\frac{\pi}{۴})^-] + [\cos (\frac{۶\pi}{۴})^-] \cos (\frac{\pi}{۴})^-$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times [۱^+] + [۰^-] \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱ - ۱ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

حد چپ و راست برابر و هر دو مساوی صفر هستند. پس حاصل حد برابر با صفر است.

**۱۵** گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳^{a-x}+۳^{x}-۱۲}{۳^{x}-۳^{۲-x}}=\frac{۳^{a-۱}+۳-۱۲}{۳-۳}=\frac{۳^{a-۱}-۹}{۰}$$

ازآنجاکه حد مخرج کسر برابر صفر است، پس حاصل حد صورت کسر نیز باید صفر باشد تا حالت $\frac{۰}{۰}$ اتفاق بیفتد.

$$۳^{a-۱}-۹=۰\Rightarrow ۳^{a-۱}=۹=۳^{۲}\Rightarrow a-۱=۲\Rightarrow a=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳^{۳-x}+۳^{x}-۱۲}{۳^{x}-۳^{۲-x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۲۷}{۳^{x}}+۳^{x}-۱۲}{۳^{x}-\frac{۹}{۳^{x}}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $t=۳^{x}$ می‌توان نوشت:

$$x\to ۱\Rightarrow t\to ۳$$

$$\lim_{t\to ۳}\frac{\frac{۲۷}{t}+t-۱۲}{t-\frac{۹}{t}}=\lim_{t\to ۳}\frac{t^{۲}-۱۲t+۲۷}{t^{۲}-۹}=\lim_{t\to ۳}\frac{\cancel{(t-۳)}(t-۹)}{\cancel{(t-۳)}(t+۳)}=-۱$$

**۱۶** گزینه ۱

$$f(x)=\left[\frac{-۵x+۵-۲}{x-۱}\right]=\left[-۵-\frac{۲}{x-۱}\right]$$

$$f\left(\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^{۲}}\right)=f\left(\overbrace{\frac{x-۲}{x^{۲}}}^{t}\right)\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x\to-\infty}\ \lim\limits_{t\to ۰^{-}}f(t)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\left[-۵-\frac{۲}{x-۱}\right]=[-۳^{-}]=-۴\\ \xrightarrow{x\to ۰^{+}}\ \lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=[-۵+۰^{+}]=[-۵^{+}]=-۵\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}}f\left(\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^{۲}}\right)-\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^{۲}}\right)=-۵-(-۴)=-۱$$

**۱۷** گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{\sqrt{x}+\sqrt{۳-x}-\sqrt{۳}}=\frac{۰}{\sqrt{۳}+۰-\sqrt{۳}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{۳}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{۳}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{۳}}{\sqrt{x}+\sqrt{۳}}\right)=\frac{x-۳}{\sqrt{x}+\sqrt{۳}}$$

$$\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{\sqrt{x}-\sqrt{۳}+\sqrt{۳-x}}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{\sqrt{۳+x}\times\sqrt{۳-x}}{\frac{x-۳}{\sqrt{x}+\sqrt{۳}}+\sqrt{۳-x}}$$

$$=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{\sqrt{۳+x}\times\cancel{\sqrt{۳-x}}}{\cancel{\sqrt{۳-x}}\left(-\frac{\sqrt{۳-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{۳}}+۱\right)}=\frac{\sqrt{۶}}{(۰+۱)}=\sqrt{۶}$$

۱۸ گزینه ۳

$$\lim_{x\to -\infty} (ax-\sqrt{x^۲+bx}) = \lim_{x\to-\infty} (ax-\left|x+\frac{b}{۲}\right|) = \lim_{x\to-\infty} ((a+۱)x+\frac{b}{۲}) = ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱ \\ \frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow b=۴ \end{cases} \Rightarrow a+b=۳$$

۱۹ گزینه ۲

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x\to ۰^-$ عبارت $x^۳-x$ به سمت $۰^+$ میل می کند یا $۰^-$. برای این کار از تغییر متغیر $x^۳-x=t$ استفاده می کنیم. با تعیین محدودهٔ $t$ حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه های داده شده به دست می آوریم.

$$x\to ۰^- \Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow x^۳>x \Rightarrow x^۳-x>۰ \xrightarrow{x^۳-x=t} t>۰ \Rightarrow t\to ۰^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x^۳-x)$ یا همان $\lim\limits_{t\to ۰^+} f(t)$ باید از ضابطهٔ بالا که مربوط به xهای مثبت است، استفاده کنیم:

$$t\to ۰^+ \Rightarrow t>۰ \Rightarrow f(t)=\sqrt{۱-t}$$
$$\lim_{t\to ۰^+} f(t) = \lim_{t\to ۰^+}\sqrt{۱-t} = \sqrt{۱-۰} = ۱$$

۲۰ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل داریم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to a^-} f(x) = b$$

(عدد $b$ فرضی است)

حال به بررسی تابع $\frac{۱}{f}$ در اطراف $x=a$ می‌پردازیم:

زمانی‌که $x\to a^+$ برود، $\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{+\infty} \to ۰^+$.

زمانی‌که $x\to a^-$ برود، $\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{b^+} \to (\frac{۱}{b})^-$.

یعنی در تابع $\frac{۱}{f}$، وقتی $x\to a^+$، نمودار از سمت راست باید به صفر میل کند (گزینهٔ ۱ و ۳ درست هستند).

وقتی $x\to a^-$، تابع $\frac{۱}{f}$ از چپ به عدد $\frac{۱}{b}$ میل می‌کند، پس گزینهٔ ۳ درست است.

**۲۱**

**گزینه ۴**

برای آنکه حد یک تابع گویا در بی‌نهایت، یک عدد شود باید درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج، کوچک‌تر یا مساوی باشد. درجهٔ مخرج ۲ است، پس درجهٔ صورت هم باید ۲ باشد. ضریب $x^3$ را در صورت، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3+a(x-1)^3}{b(x+2)^2+(x-3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3+12x^2+6x+1+ax^3-3ax^2+3ax-a}{bx^2+4bx+4b+x^2-6x+9}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(8+a)}^{\text{صفر}}x^3+(12-3a)x^2+(6+3a)x+(1-a)}{(b+1)x^2+(4b-6)x+(4b+9)}$$

$$x^3\ \text{ضریب}=0\Rightarrow 8+a=0\Rightarrow a=-8$$

با جایگذاری $a=-8$، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{36x^2-18x+9}{(b+1)x^2+(4b-6)x+(4b+9)}=\frac{36}{b+1}$$

حاصل حد باید با $\frac{a}{2}$ یعنی $-4=\frac{-8}{2}$ برابر باشد. داریم:

$$\frac{36}{b+1}=-4\Rightarrow b+1=-9\Rightarrow b=-10$$

**۲۲**

**گزینه ۱**

نکته: حد تابع $[u]$ اگر $u\to\pm\infty$ میل کند، با حد تابع $u$ برابر است (یعنی می‌توان از براکت صرف‌نظر کرد).

اگر $x\to 2$ میل کند، آنگاه عبارت $\frac{1}{x-2}$ به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند؛ بنابراین طبق نکته گفته‌شده می‌توان از براکت صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+mx+n}{x-2}=4$$

ازآنجاکه حاصل حد مخرج کسر به ازای $x=2$ برابر صفر است و جواب حد عددی متناهی است، پس حاصل صورت کسر نیز به ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود. یعنی می‌توان گفت که در تجزیه صورت کسر حتماً عامل $(x-2)$ وجود دارد. بنابراین فرض می‌کنیم:

$$x^2+mx+n=(x-2)(x+a)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+mx+n}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+a)}{\cancel{x-2}}=2+a=4\Rightarrow a=2$$

پس:

$$x^2+mx+n=(x-2)(x+2)=x^2-4\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ n=-4\end{cases}$$

$$m-2n=0-2(-4)=8$$

**۲۳**

گزینه ۳

حد مخرج کسر وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$ صفر می‌شود. چون حاصل حد، عدد شده است، پس حد صورت نیز باید صفر باشد تا بعد از رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$، حاصل حد که یک عدد است $(L)$، به دست آید. داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} (a\cos^۴ x - ۱) = ۰ \Rightarrow a(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴ - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۴} - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

با جایگذاری $a = ۴$، حاصل حد را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۴\cos^۴ x - ۱}{\cos^۶ x - \sin^۶ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(۲\cos^۴ - ۱)(۲\cos^۲ x + ۱)}{(\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos^۴ x + \sin^۲ x\cos^۲ x + \sin^۴ x)}$$

هر دو عبارت $۲\cos^۲ x - ۱$ و $\cos^۲ x - \sin^۲ x$ برابر با $\cos ۲x$ هستند، پس می‌توانیم آن‌ها را از صورت و مخرج، ساده کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\overbrace{(۲\cos^۲ x - ۱)}^{\cancel{\cos ۲x}}(۲\cos^۲ x + ۱)}{\underbrace{(\cos^۲ x - \sin^۲ x)}_{\cancel{\cos ۲x}}(\cos^۴ x + \sin^۲ x\cos^۲ x + \sin^۴ x)} = \frac{۲ \times \frac{۲}{۴} + ۱}{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}} = \frac{۲}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow L = \frac{۸}{۳}$$

پس حاصل $a + ۳L$ برابر است با:

$$a + ۳L = ۴ + \cancel{۳}(\frac{۸}{\cancel{۳}}) = ۴ + ۸ = ۱۲$$

**۲۴**

گزینه ۱

گام اول

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر شده و درنتیجه حد دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده‌شده را ساده کرده و حد آن را به دست می‌آوریم:

$$۱)\quad \sin ۲x = ۲\sin x\cos x \Rightarrow ۱ - \sin ۲x = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x\cos x$$
$$= (\sin x - \cos x)^۲ \Rightarrow ۱ - \sin ۲x = (\sin x - \cos x)^۲$$
$$۲)\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱ - \sin ۲x}{(۱ - \tan x)^۲} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x - \cos x)^۲}{(۱ - \frac{\sin x}{\cos x})^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x - \cos x)^۲}{\frac{(\cos x - \sin x)^۲}{\cos^۲ x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x - \cos x)^۲\cos^۲ x}{(\sin x - \cos x)^۲}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \cos^۲ x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

**۲۵**

گزینه ۳

می‌دانیم $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$ است، پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cot 2x - \cot x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cot x - \tan x - \cot x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2(1)} = -\frac{1}{2}$$

**۲۶**

گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-3x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x-(-x)}{1-(-3x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

نکته:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[n]{x^m+u(x)}-\sqrt[n]{x^m+v(x)}}{\sqrt[n]{x^m+f(x)}-\sqrt[n]{x^m+g(x)}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{u(x)-v(x)}{f(x)-g(x)}$$

دقت کنید که درجهٔ توابع $f$، $v$، $u$ و $g$ از $m$ کمتر است.

روش دوم (تشریحی):

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-3x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-3x}} \times \frac{\sqrt[3]{(x^2+x)^2}+\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+x)^2}+\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$$

$$\times \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-3x)}+\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-3x)}+\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{(x^2+1)-(x^2-3x)} \times \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-3x)}+\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+x)^2}+\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{3x} \times \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}$$

**۲۷** گزینه ۱

$$L=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{(۲-\sqrt{۴-x^۲})(۲+\sqrt{۴-x^۲})}{۲+\sqrt{۴-x^۲}}-\frac{x^۲}{۴}}{x^۴}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۲}{۲+\sqrt{۴-x^۲}}-\frac{x^۲}{۴}}{x^۴}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲+\sqrt{۴-x^۲}}-\frac{۱}{۴}}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲-\sqrt{۴-x^۲}}{۴(۲+\sqrt{۴-x^۲})^۲x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴-(۴-x^۲)}{۴(۲+\sqrt{۴-x^۲})x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{۴(۲+\sqrt{۴-x^۲})^۲x^۲}=\frac{۱}{۴(۲+۲)^۲}=\frac{۱}{۶۴}$$

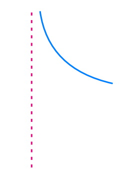
**۲۸** گزینه ۱

به ازای $x=-۱$، صورت کسر عبارت زیر رادیکال برابر ۲- است و مخرج کسر عبارت زیر رادیکال برابر $f(۱)$ خواهد بود. چون $f(۱)=۰$ است، پس باید از سمتی به $x=-۱$ نزدیک شویم که حاصل $f(-x)$، مقدار $۰^-$ به خود بگیرد که عبارت زیر رادیکال مثبت شود. اگر از سمت راست به ۱- نزدیک شویم، ورودی تابع $f(-x)$، برابر $۱^-$ است که مقدار تابع برابر $۰^-$ خواهد بود. پس تنها همسایگی راست $x=-۱$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $g$ بوده و داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+}g(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\sqrt{\frac{۳x+۱}{f(-x)}}=\sqrt{\frac{۳(-۱)+۱}{f(-(-۱^+))}}$$

$$=\sqrt{\frac{-۳+۱}{f(۱^-)}}=\sqrt{\frac{-۲}{۰^-}}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

پس نمودار تابع $g(x)$ در اطراف $x=-۱$ به‌صورت زیر است. داریم:



x = -۱

**۲۹** گزینه ۲

فرض می‌کنیم که $g(x)=\frac{۱}{x^۴}-\frac{۱}{x^۳}$ باشد:

$$g(x)=\frac{۱}{x^۴}-\frac{۱}{x^۳}=\frac{۱-x}{x^۴}$$

اگر $x\to ۰$ آنگاه $\frac{۱-x}{x^۴}\to+\infty$، پس:

$$\lim_{x\to ۰}f(g(x))=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۴x^۲+x+۱}}{x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۴x^۲}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|۲x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{x}=۲$$

**۳۰** **گزینه ۱**

می‌دانیم که عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید همواره نامنفی باشد.

$$-x^۲+۳x-۲=-\left(x^۲-۳x+۲\right)=-(x-۱)(x-۲)$$

| $x$ | | ۱ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x^۲+۳x-۲$ | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $-$ |

بنابراین اگر $x \to +\infty$ میل کند، آنگاه عبارت $-x^۲+۳x-۲$ منفی خواهد شد و رادیکال، تعریف نشده می‌شود، پس حاصل حد داده شده وجود ندارد.

**۳۱** **گزینه ۴**

با ابهام $\infty-\infty$ مواجهیم که برای رفع آن، عبارت را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} x^۲-\sqrt{x^۴-x^۲+b}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^۲-\sqrt{x^۴-x^۲+b})(x^۲+\sqrt{x^۴-x^۲+b})}{x^۲+\sqrt{x^۴-x^۲+b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^۴)-(x^۴-x^۲+b)}{x^۲+\sqrt{x^۴-x^۲+b}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲-b}{x^۲+\sqrt{x^۴-x^۲+b}}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت و مخرج}]{\text{هم‌ارزی پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲-b}{x^۲+\sqrt{x^۴-x^۲+b}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{x^۲+\sqrt{x^۴}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

پس جواب حد فوق کاملاً مستقل از $b$ است و به ازای هر مقدار $b$، جواب $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

## ۳۲ گزینه ۱

ریشه‌های تابع f عبارتند از: ۵-، ۱-، ۱ و ۴

f در $x=-1$ و $x=4$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس a یا ۱- است یا ۴.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-1}{f(x)}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty \quad \checkmark\\ \lim\limits_{x\to 4} g(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{f(x)}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \quad \times\end{array}\right\}\Rightarrow a=-1$$

b نیز ۵- یا ۱ است:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{-1}{f(x)}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty \quad \times\\ \lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{-1}{f(x)}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \quad \times\end{array}\right\}\Rightarrow b\neq -5$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{f(x)}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{f(x)}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow a-b=-1-1=-2$$

## ۳۳ گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\times 3-4^x\times 4^2+25^x\times 25^{-3}}{25^x\times 5^{-4}-3^x\times 3^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25^x\left(3\times(\frac{3}{25})^x-16(\frac{4}{25})^x+25^{-3}\right)}{25^x\left(5^{-4}-\frac{1}{9}(\frac{3}{25})^x\right)}$$

می‌دانیم که اگر $0<a<1$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{3}{25})^x=\lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{25})^x=0$$

پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{25^x}(0-0+25^{-3})}{\cancel{25^x}(5^{-4}-0)}=\frac{25^{-3}}{5^{-4}}=\frac{5^{-6}}{5^{-4}}=5^{-2}=\frac{1}{25}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

نکته: در عبارت‌های نمایی مانند $a^x$، اگر $x\to+\infty$ میل کند، آنگاه فقط عبارتی که دارای بزرگ‌ترین پایه است باقی می‌ماند.

$$\xrightarrow{25>3,4}\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}-4^{x+2}+25^{x-3}}{5^{2x-4}-3^{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25^{x-3}}{5^{2x-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{2x-6}}{5^{2x-4}}=5^{-2}=\frac{1}{25}$$

۳۴ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{۲}+۴x-۲-mx(x+۱)+n(x+۱)}{x+۱}\right)=-۱$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(۱-m)x^{۲}+(۴-m+n)x-۲+n}{x+۱}=-۱$$

ازآنجاکه حاصل حد کسر در بی‌نهایت برابر عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجه مخرج و صورت باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجه مخرج برابر ۱ است، پس بزرگ‌ترین درجه صورت نیز باید برابر ۱ باشد؛ بنابراین:

$$۱-m=۰\Rightarrow m=۱$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(۴-m+n)x-۲+n}{x+۱}=-۱\Rightarrow\frac{۴-m+n}{۱}=-۱$$

$$\xrightarrow{m=۱}۴-۱+n=-۱\Rightarrow n=-۴\Rightarrow m-۲n=۱-۲(-۴)=۹$$

۳۵ گزینه ۲

$$f(x)=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}+۱\right]$$
$$=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱=۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱$$

عبارت خطی $x-\frac{۱}{۳}$ در نقاط صحیح کنندهٔ $\left\{\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{-۲}{۳}\right\}$ از بازهٔ $\left(-\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۳}\right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to(-\frac{۵}{۳})^{+}}\left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right)=۲\left[(-۲)^{+}\right]+۱=۲(-۲)+۱=-۳$$
$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right)=-۳$$
$$\lim_{x\to(\frac{۵}{۳})^{-}}\left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right)=۲\left[(\frac{۴}{۳})^{-}\right]+۱=۲\times۱+۱=۳\quad,\quad f\left(\frac{۵}{۳}\right)=۳$$

پس $f$ در $-\frac{۵}{۳}$ پیوستگی راست و در $\frac{۵}{۳}$ پیوستگی چپ دارد. درنهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۳ نقطه است.