۱

گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+}\left[\frac{-۲}{x^۲}\right]=\left[\frac{-۲}{(\frac{۱}{۴})^-}\right]=[-(۸^+)]=-۹$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+}\left[\frac{۳}{x^۲}\right]=\left[\frac{۳}{(\frac{۱}{۴})^-}\right]=[۱۲^+]=۱۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+}\frac{۱۶x+۹}{۲۴x+۱۲}=\frac{۱}{(-۱۲)^++۱۲}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۲

گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}=-۲$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=-۲$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m+۳=n-۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=\frac{۱}{m}=-۲\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

و همچنین:

$$m+۳=n-۲\xrightarrow{m=-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}+۳=n-۲\Rightarrow n=-\frac{۱}{۲}+۵=\frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow m+n=-\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۳

گزینه ۴

برای آنکه حد یک تابع گویا در بی‌نهایت، یک عدد شود باید درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج، کوچک‌تر یا مساوی باشد. درجهٔ مخرج ۲ است، پس درجهٔ صورت هم باید ۲ باشد. ضریب $x^۳$ را در صورت، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(۲x+۱)^۳+a(x-۱)^۳}{b(x+۲)^۲+(x-۳)^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۸x^۳+۱۲x^۲+۶x+۱+ax^۳-۳ax^۲+۳ax-a}{bx^۲+۴bx+۴b+x^۲-۶x+۹}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(۸+a)}^{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}x^۳+(۱۲-۳a)x^۲+(۶+۳a)x+(۱-a)}{(b+۱)x^۲+(۴b-۶)x+(۴b+۹)}$$

$$\text{ضریب } x^۳=۰\Rightarrow ۸+a=۰\Rightarrow a=-۸$$

با جایگذاری $a=-۸$، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۳۶x^۲-۱۸x+۹}{(b+۱)x^۲+(۴b-۶)x+(۴b+۹)}=\frac{۳۶}{b+۱}$$

حاصل حد باید با $\frac{a}{۲}$ یعنی $-۴=\frac{-۸}{۲}$ برابر باشد. داریم:

$$\frac{۳۶}{b+۱}=-۴\Rightarrow b+۱=-۹\Rightarrow b=-۱۰$$

۴

گزینه ۳

باتوجه‌به شکل داریم:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to a^-}f(x)=b$$

(عدد b فرضی است)

حال به بررسی تابع $\frac{۱}{f}$ در اطراف $x=a$ می‌پردازیم:

زمانی‌که $x\to a^+$ برود، $\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{+\infty}\to ۰^+$.

زمانی‌که $x\to a^-$ برود، $\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{b^+}\to(\frac{۱}{b})^-$.

یعنی در تابع $\frac{۱}{f}$، وقتی $x\to a^+$، نمودار از سمت راست باید به صفر میل کند (گزینهٔ ۱ و ۳ درست هستند).

وقتی $x\to a^-$، تابع $\frac{۱}{f}$ از چپ به عدد $\frac{۱}{b}$ میل می‌کند، پس گزینهٔ ۳ درست است.

۵

گزینه ۴

در $+\infty$ حاصل $۳^{۱-۲n}$ برابر $۳^{-\infty} = ۰$ است.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n+۱} - ۳^{۱-۲n}}{۲ \times ۳^n + ۹^{n-۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n+۱} - ۰}{۲ \times ۳^n + \frac{۹^n}{۹}}$$

در مخرج کسر از ۹^n فاکتور می‌گیریم:

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{۳ \times ۳^{۲n}}{۹^n(\frac{۲}{۳^n} + \frac{۱}{۹})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳ \times ۹^n}{۹^n(\frac{۲}{۳^n} + \frac{۱}{۹})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳}{\frac{۲}{۳^n} + \frac{۱}{۹}} = \frac{۳}{۰ + \frac{۱}{۹}} = ۲۷$$

۶

گزینه ۱

باتوجه‌به شکل $\lim\limits_{x\to۲} f(x) = +\infty$ است، یعنی:

$$\lim_{x\to۲} \frac{-x}{-x^۲ + mx + n} = +\infty \Rightarrow \frac{-۲}{۰^-} = +\infty$$

درنتیجه مخرج کسر ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ دارد و در همسایگی ۲ منفی است.

$$-x^۲ + mx + n = ۰ \Rightarrow x^۲ - mx - n = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ \equiv x^۲ - mx - n \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ \equiv x^۲ - mx - n$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۴ \\ n = -۴ \end{cases} \Rightarrow m + n = ۰$$

۷

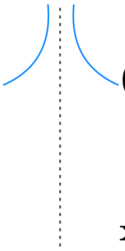
گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} \frac{-۴[x] - a^۲}{-(۲x^۲ - x - ۳)} = \lim_{x\to(-۱)^-} \frac{-۴[x] - a^۲}{-(x+۱)(۲x-۳)} = -\infty \Rightarrow \frac{-۴(-۲) - a^۲}{-(۰^-)(-۵)} = -\infty$$
$$\Rightarrow \frac{۸ - a^۲}{۰^-} = -\infty \Rightarrow ۸ - a^۲ > ۰ \Rightarrow a^۲ < ۸ \Rightarrow -\sqrt{۸} < a < \sqrt{۸}$$
$$\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a \in \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$$

پس به‌ازای پنج مقدار صحیح، حاصل حد، $-\infty$ می‌شود.

۸ گزینه ۴

چون نمودار تابع اطراف $x = ۱$ به‌صورت زیر است، مخرج کسر در $x = ۱$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، یعنی عامل $(x-۱)^۲$ در مخرج موجود باشد، پس:



$$(x+c)^۲ = (x-۱)^۲ \Rightarrow c = -۱$$

ازطرفی نمودار، در $x = ۲$ نقطه‌ای توخالی است، یعنی $x = ۲$ هم ریشهٔ صورت است و هم ریشهٔ مخرج:

$$x = ۲ \xrightarrow{\text{در صورت}} ۲m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

$$x = ۲ \xrightarrow{\text{در مخرج}} ۴a + ۲b = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \Rightarrow b = -۲a$$

درنهایت داریم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{(ax^۲ - ۲ax)(x-۱)^۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\cancel{x-۲}}{ax\cancel{(x-۲)}(x-۱)^۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = ۱\ ,\ b = -۲ \Rightarrow a + b = -۱$$

۹ گزینه ۳

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x)$ ابتدا باید $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+۴-۲}{x+۱}=\lim_{x\to+\infty}(۴-\frac{۲}{x+۱})=۴$$

$$\lim_{x\to+\infty}fog(x)=\lim_{x\to ۴^-}f(x)=[\circ^-]=-۱$$

چون تابع f، دارای جزءصحیح است، باید معلوم شود که داخل جزءصحیح $\circ^+$ ایجاد می‌شود یا $\circ^-$.
برای این کار می‌توان از ضرب مزدوج در صورت و مخرج تابع f استفاده کرد.

$$\lim_{x\to ۴^-}f(x)=\lim_{x\to ۴^-}[\frac{(x-\sqrt{x+۱۲})(x+\sqrt{x+۱۲})}{x+\sqrt{x+۱۲}}]=\lim_{x\to ۴^-}[\frac{x^۲-x-۱۲}{x+\sqrt{x+۱۲}}]$$

$$=\lim_{x\to ۴^-}[\frac{(x-۴)(x+۳)}{x+\sqrt{x+۱۲}}]=[\circ^-]=-۱\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=-۱$$

دقت کنید از طریق رسم نمودار $y_۱=x$ و $y_۲=\sqrt{x+۱۲}$، هم می‌توان فهمید داخل جزءصحیح $\circ^-$ ایجاد می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty}(gof)(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+۲}{x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x}{x}=۴$$

دقت کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x-\sqrt{x+۱۲}]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$

و درنهایت چون $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)=۴$ ، پس $[\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)]=۴$. بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)+[\lim_{x\to+\infty}(gof(x))]=-۱+۴=۳$$

۱۰ گزینه ۱

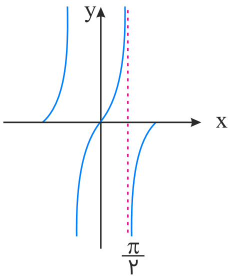
$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۴x-۱}{۲x-۱}]-\lim_{x\to-\infty}[\frac{۲x+۱}{x-۱}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۴x-۱+۱-۱}{۲x-۱}]-\lim_{x\to-\infty}[\frac{۲x+۱+۳-۳}{x-۱}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۴x-۲+۱}{۲x-۱}]-\lim_{x\to-\infty}[\frac{۲x-۲+۳}{x-۱}]=\lim_{x\to+\infty}[۲+\frac{۱}{۲x-۱}]-\lim_{x\to-\infty}[۲+\frac{۳}{x-۱}]$$

$$=۲+[\circ^+]-(۲+[\circ^-])=۲+\circ-۲+۱=۱$$

۱۱ گزینه ۴

باتوجه‌به نمودار $\tan x$:



$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \tan x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \frac{۱}{۳^{\tan x}-۱} = \frac{۱}{۳^{+\infty}-۱} = \frac{۱}{+\infty-۱} = \frac{۱}{+\infty} = ۰$$

۱۲ گزینه ۲

فرض می‌کنیم که $g(x) = \frac{۱}{x^۴} - \frac{۱}{x^۳}$ باشد:

$$g(x) = \frac{۱}{x^۴} - \frac{۱}{x^۳} = \frac{۱-x}{x^۴}$$

اگر $x \to ۰$ آنگاه $\frac{۱-x}{x^۴} \to +\infty$، پس:

$$\lim_{x\to ۰} f(g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲+x+۱}}{x+۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|۲x|}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{x} = ۲$$

۱۳ گزینه ۱

$$\text{می‌دانیم} : \begin{cases} \text{در همسایگی راست ۴} : [x] = ۴ \\ \text{در همسایگی چپ ۴} : [x] = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۴^+} \frac{۴-[x]}{\left|\frac{x}{۲}-۲\right|} = \lim_{x\to ۴^+} \frac{۴-۴}{\left|\frac{x}{۲}-۲\right|} = ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۴^-} \frac{۴-[x]}{\left|\frac{x}{۲}-۲\right|} = \lim_{x\to ۴^-} \frac{۴-۳}{|۲^- - ۲|} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

۱۴ گزینه ۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x^n}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow n=۱\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x}=\frac{a}{۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\frac{۰}{۰}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}\times\frac{\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}{\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۸}{۲۷}x^۳-x^۲+۱}{(۴x-۱۲)(\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲)}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\left(\frac{۸}{۲۷}x^۲-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳}\right)}{۴\cancel{(x-۳)}(\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲)}$$

$$=\frac{\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۴\times(۴+۲\times۲+۴)}=\frac{۲}{۴۸}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{۸}{۲۷}x^۳-x^۲+۱ & \underline{x-۳} \\
\underline{-\frac{۸}{۲۷}x^۳+\frac{۸}{۹}x^۲} & \frac{۸}{۲۷}x^۲-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳} \\
-\frac{۱}{۹}x^۲+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۹}x^۲-\frac{۱}{۳}x} & \\
-\frac{۱}{۳}x+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۳}x-۱} & \\
۰ &
\end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۲}{۳}x - \sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}{۴x - ۱۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳}(۲x)(x^۲ - ۱)^{-\frac{۲}{۳}}}{۴}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۴}}{۴} = \frac{\frac{۴ - ۳}{۶}}{۴} = \frac{۱}{۲۴}$$

۱۵ گزینه ۱

بدیهی است که $x = ۲$ هم ریشهٔ مخرج و هم ریشهٔ صورت است، پس $a = ۲$ است و درضمن باتوجه‌به نمودار مخرج ریشهٔ مضاعف $x = ۱$ دارد و باتوجه‌به اینکه ضریب $x^۳$، یک است، پس مخرج به‌صورت $(x - ۱)^۲(x - ۲)$ است که برابر است با: $x^۳ - ۴x^۲ + ۵x - ۲$؛ که اگر با مخرج متحدد قرار دهیم $b = -۴$، $c = ۵$ و $d = -۲$ می‌شود:

$$a \times b \times c \times d = ۲ \times (-۴) \times ۵ \times (-۲) = ۸۰$$

۱۶ گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۳^x \times ۳ - ۴^x \times ۴^۲ + ۲۵^x \times ۲۵^{-۳}}{۲۵^x \times ۵^{-۴} - ۳^x \times ۳^{-۲}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲۵^x(۳ \times (\frac{۳}{۲۵})^x - ۱۶(\frac{۴}{۲۵})^x + ۲۵^{-۳})}{۲۵^x(۵^{-۴} - \frac{۱}{۹}(\frac{۳}{۲۵})^x)}$$

می‌دانیم که اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = ۰$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to +\infty} (\frac{۳}{۲۵})^x = \lim_{x\to +\infty} (\frac{۴}{۲۵})^x = ۰$$

پس:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{۲۵^x}(۰ - ۰ + ۲۵^{-۳})}{\cancel{۲۵^x}(۵^{-۴} - ۰)} = \frac{۲۵^{-۳}}{۵^{-۴}} = \frac{۵^{-۶}}{۵^{-۴}} = ۵^{-۲} = \frac{۱}{۲۵}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

نکته: در عبارت‌های نمایی مانند a^x، اگر $x \to +\infty$ میل کند، آنگاه فقط عبارتی که دارای بزرگ‌ترین پایه است باقی می‌ماند.

$$\xrightarrow{۲۵>۳,۴} \lim_{x\to +\infty} \frac{۳^{x+۱} - ۴^{x+۲} + ۲۵^{x-۳}}{۵^{۲x-۴} - ۳^{x-۲}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲۵^{x-۳}}{۵^{۲x-۴}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۵^{۲x-۶}}{۵^{۲x-۴}} = ۵^{-۲} = \frac{۱}{۲۵}$$

۱۷ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۳}\left(\frac{۲x^۲-۲۰}{mx^۲+۱۸x+n}\right)=+\infty$$

حد صورت کسر وقتی $x\to ۳$، برابر $۲\left(۳^۲\right)-۲۰=-۲$ است؛ بنابراین برای آنکه حاصل حد دادهشده برابر $+\infty$ شود، باید در هر دو حالت $x\to ۳^+$ و $x\to ۳^-$، حاصل مخرج کسر برابر ۰^- شود؛ یعنی باید $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و در اطراف آن (در ۳^+ و ۳^-) تغییر علامت نداشته باشیم، بنابراین:

$$mx^۲+۱۸x+n=a(x-۳)^۲=ax^۲-۶ax+۹a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۶a=۱۸\Rightarrow a=-۳\\ m=a=-۳\\ n=۹a=۹(-۳)=-۲۷\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{۲}{m}=-\frac{۲}{۳}$$

۱۸ گزینه ۴

سه حالت وجود دارد:

$$a<۴\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^۴-bx^a+۳-b}{x^a-۲x+۲-b}=-۲\xrightarrow{a<۴}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^۴}{(x^a)\text{ یا }(-۲x)}=\infty$$

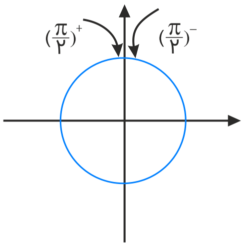
بنابراین در این حالت حاصل حد کسر برابر ∞ شده و غیرقابلقبول است.

$$a=۴\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۴-bx^۴+۳-b}{x^۴-۲x+۲-b}=-۲\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(۴-b)x^۴}{x^۴}=-۲\Rightarrow ۴-b=-۲\Rightarrow b=۶$$

$$a>۴\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^۴-bx^a+۳-b}{x^a-۲x+۲-b}=-۲\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-bx^a}{x^a}=-۲\Rightarrow -b=-۲\Rightarrow b=۲$$

۱۹ گزینه ۳

باتوجه‌به دایره مثلثاتی زیر داریم:



$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \tan x = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x) = \frac{۲}{۱+۴^{-\infty}} = \frac{۲}{۱+(\frac{۱}{۴})^{+\infty}} = \frac{۲}{۱+۰} = ۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \tan x = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = \frac{۲}{۱+۴^{+\infty}} = \frac{۲}{\infty} = ۰$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x) - \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = ۲ - ۰ = ۲$$

۲۰ گزینه ۱

ریشه‌های تابع f عبارتند از: ۵-، ۱-، ۱ و ۴

f در $x=-۱$ و $x=۴$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس a یا ۱- است یا ۴.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-۱} g(x) = \lim\limits_{x\to-۱} \frac{-۱}{f(x)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty \quad \checkmark \\ \lim\limits_{x\to۴} g(x) = \lim\limits_{x\to۴} \frac{-۱}{f(x)} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty \quad \times \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۱$$

b نیز ۵- یا ۱ است:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-۵^+} \frac{-۱}{f(x)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty \quad \times \\ \lim\limits_{x\to-۵^-} \frac{-۱}{f(x)} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty \quad \times \end{array}\right\} \Rightarrow b \neq -۵$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to۱^+} \frac{-۱}{f(x)} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to۱^-} \frac{-۱}{f(x)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow b = ۱$$

$$\Rightarrow a - b = -۱ - ۱ = -۲$$

۲۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{x} - \frac{۱}{x} = ۲ - \frac{۱}{\infty} = ۲^- \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-} [-x] = [-۲^-] = -۲$$

$$\lim_{x\to+\infty} (gof)(x) = \lim_{x\to ۲^-} g(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲ - ۴}{(x-۲)^۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۲}{x-۲} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$

۲۲ گزینه ۱

$$f(x) = \left[\frac{-۵x + ۵ - ۲}{x - ۱}\right] = \left[-۵ - \frac{۲}{x-۱}\right]$$

$$f(\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x^۲}) = f(\overbrace{\frac{x-۲}{x^۲}}^{t}) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x\to-\infty} \lim_{t\to ۰^-} f(t) = \lim_{x\to ۰^-} \left[-۵ - \frac{۲}{x-۱}\right] = [-۳^-] = -۴ \\ \xrightarrow{x\to ۰^+} \lim_{t\to-\infty} f(t) = [-۵ + ۰^+] = [-۵^+] = -۵ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x^۲}) - \lim_{x\to-\infty} f(\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x^۲}) = -۵ - (-۴) = -۱$$

۲۳ گزینه ۴

باتوجه‌به شکل، وقتی $x \to b^+$، آنگاه $f(x) \to -\infty$:

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to b^+} \frac{c}{(x-a)^۲ (x-b)} = \frac{c}{۰^+} = -\infty \Rightarrow c < ۰$$

حال حد تابع در $x \to a$ را حساب می‌کنیم با شروط $c < ۰$ و $a < b$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{c}{(x-a)^۲ (x-b)} = \frac{c < ۰}{۰^-} = +\infty$$

پس گزینهٔ ۴ درست است.

۲۴ گزینه ۱

می‌دانیم که عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید همواره نامنفی باشد.

$$-x^۲ + ۳x - ۲ = -\left(x^۲ - ۳x + ۲\right) = -(x-۱)(x-۲)$$

x		۱		۲	
$-x^۲+۳x-۲$	-	۰	+	۰	-

بنابراین اگر x به $+\infty$ میل کند، آنگاه عبارت $-x^۲ + ۳x - ۲$ منفی خواهد شد و رادیکال، تعریف نشده می‌شود، پس حاصل حد داده شده وجود ندارد.

۲۵ گزینه ۴

نکته: اعداد $\circ^{+}$ یا $\circ^{-}$ را صفر حدی می‌نامیم. درواقع این اعداد به‌معنای صفر اصلی (صفر مطلق) نیستند، بلکه یک عدد بسیار نزدیک به صفر هستند؛ بنابراین توجه شود که:

الف) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{۰ حدی}} = \infty$ ب) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{۰ مطلق}} = \text{تعریف نشده}$

پ) $\dfrac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ مطلق}} = \text{تعریف نشده}$ ت) $\dfrac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ حدی}} = \circ$

ث) $\dfrac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ حدی}} = \text{مبهم}$ ج) $\dfrac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ مطلق}} = \text{تعریف نشده}$

در حالت کلی می‌توان گفت که اگر مخرج برابر صفر مطلق شود، حاصل کسر تعریف نشده است.

$$\lim_{x\to(-۵)^{-}} \frac{[x+۶]}{x+۵} = \frac{\left[(-۵)^{-}+۶\right]}{(-۵)^{-}+۵} = \frac{[۱^{-}]}{\circ^{-}} = \frac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ حدی}} = \circ$$

$$\lim_{x\to(-۲)^{+}} \frac{x+۲}{[x+۲]} = \frac{(-۲)^{+}+۲}{\left[(-۲)^{+}+۲\right]} = \frac{\circ^{+}}{[\circ^{+}]} = \frac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

۲۶ گزینه ۳

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(۲m^{۲}-۸)\,x^{۳} + (۲m+۷)\,x^{۲} + ۲x - \frac{۵}{x}}{m+\frac{۶}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\left(\frac{۲m^{۲}-۸}{m}\right)x^{۳} + \left(\frac{۲m+۷}{m}\right)x^{۲} + \frac{۲}{m}x\right) = -\infty$$

چون وقتی $x \to \pm\infty$، حاصل حد فقط برابر با $-\infty$ است، باید ضریب $x^{۳}$ صفر شود؛ یعنی $m = \pm ۲$؛ اما مقداری از m قابل‌قبول است که ضریب $x^{۲}$ به ازای آن منفی شود، بنابراین فقط $m = -۲$ قابل‌قبول خواهد بود.

۲۷ گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{۲x^۲ - ۷}{x^۲ - ۴} = ۲ + \frac{۱}{x^۲ - ۴}$$

یعنی اگر $x \to +\infty$، تابع f با مقادیر بیشتر از ۲، به ۲ میل می‌کند و درنتیجه تابع g با مقادیر کمتر از ۲، به ۲ میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} (fog)(x) = \lim_{x\to +\infty} f(g(x)) = \lim_{t\to ۲^-} f(t) = -\infty$$

۲۸ گزینه ۲

$$f(x) = (\sqrt{x^۲ + ۳x} - \sqrt{x^۲ - ۳x}) \times \frac{\sqrt{x^۲ + ۳x} + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{\sqrt{x^۲ + ۳x} + \sqrt{x^۲ - ۳x}}$$

$$f(x) = \frac{۶x}{\sqrt{x^۲ + ۳x} + \sqrt{x^۲ - ۳x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{۶x}{|x| + |x|} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۶x}{x + x} = ۳ = m$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{۶x}{|x| + |x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۶x}{-x - x} = -۳ = n$$

$$\Rightarrow m - n = ۳ - (-۳) = ۶$$

۲۹ گزینه ۴

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^۴ - x^۲ + ۱} + \sqrt{x^۲ + ۱} - x^۲}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x^۲| + |x| - x^۲}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x} = -۱$$

۳۰ گزینه ۲

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^۴ - x^۳}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^۲ + x\sin x}{\sqrt{x^۴ - x^۳}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^۲}{\sqrt{x^۴}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

۳۱ گزینه ۳

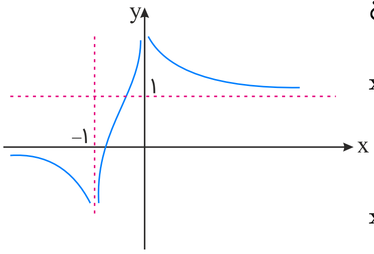
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\left(\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-a)x^2+(-a-b)x+1-b}{x+1}\right)=1$$

$$\begin{cases}1-a=0\Rightarrow a=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(-a-b)x+1-b}{x+1}\right)=1\Rightarrow(-a-b)=1\Rightarrow b=-2\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

۳۲ گزینه ۱

تابع در $+\infty$ به خط $y=1$ نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$



به‌علاوه اگر حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)$ را بخواهیم، باید ببینیم به ازای چه مقداری از x حد تابع $-\infty$ است. باتوجه‌به شکل، $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$ می‌باشد. پس $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-1$ است. داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=1+(-1)=0$$

۳۳ گزینه ۴

اولاً باید $b=1$ باشد تا جملات پرتوان هریک از رادیکال‌های موجود در مخرج باهم ساده شوند، در غیر این‌صورت مخرج بی‌نهایت شده و جواب حد صفر می‌شود، درحالی‌که قرار است $\frac{1}{2}$ شود. پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{ax}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}$$

با ضرب صورت و مخرج این کسر در مزدوج مخرج داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{ax}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}}\times\frac{\sqrt{x+\sqrt{ax}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{ax}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{ax}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{ax})-(x-\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{ax}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{ax}+\sqrt{x}}\underset{\text{پرتوان}}{\overset{}{\underset{\downarrow}{=}}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{ax}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{a}+1)\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{a}+1}$$

پس:

$$\frac{2}{\sqrt{a}+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{a}+1=4\Rightarrow\sqrt{a}=3\Rightarrow a=9\Rightarrow a+b=9+1=10$$

۳۴ گزینه ۳

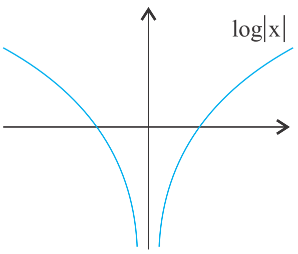
برخلاف تصور اولیه، با ابهام $\infty - \infty$ مواجه نیستیم و کافی است از هم‌ارزی پرتوان استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{۴x^۲+x+۱}+\sqrt{۴x^۲-x+۱}\right)\underset{\text{پرتوان}}{\overset{}{=}}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{۴x^۲}+\sqrt{۴x^۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(|۲x|+|۲x|)=\lim_{x\to-\infty}(-۲x-۲x)=\lim_{x\to-\infty}(-۴x)=+\infty$$

۳۵ گزینه ۲

اول نمودار $f(x-۲)=\log|x|$ را رسم می‌کنیم:



$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(۰)^-}f(x-۲)=\lim_{x\to۰^-}\log|x|=\log ۰^+=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x-۲)=\lim_{x\to-\infty}\log|x|=\log(+\infty)=+\infty$$

۳۶ گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۱^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(f(f(x)))=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-۲$$

۳۷ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ f^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{2x-1}{x+3}\Rightarrow xy+3y-2x+1=0$$

$$\Rightarrow x(y-2)=-3y-1\Rightarrow x=\frac{-3y-1}{y-2}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{-3x-1}{x-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-3x-1}{x-2}$$

حالا مقدار حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x-1}{x+3}}{\frac{-3x-1}{x-2}}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$