نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **پاسخ A1 حد و پیوستگی**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به شکل زیر، اگر $x \to 2^-$، آنگاه $(x^2 - 7x + 1) \to (-9)^+$، پس:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x^2 - 7x + 1) = \lim_{a \to (-9)^+} f(a)$$
$$= \lim_{x \to (-9)^+} f(x) = -3$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[n]{x^m}$$

برای حد نداشتن این تابع در x=۰ ، باید n زوج و m فرد باشد و درنتیجه m+n عددی فرد و m+n+۱ عدد زوج است.

$$m + n + 1 = 2k,\ k \in N$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} [x^{2k}] = \lim_{x \to 0^-} [x^{2k}] = [0^+] = 0 \\ y(0) = [0^{2k}] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

تابع در $x = 0$ پیوسته است .

سوال ۳

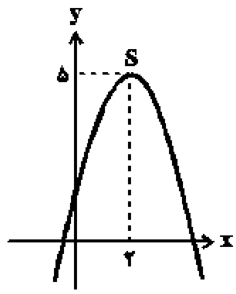
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مختصات رأس سهمی را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{r} x_s = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \\ y_s = f(۲) = -۴ + ۸ + ۱ = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow s(۲,۵)$$

نمودار سهمی به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to ۲} [f(x)] = \lim\limits_{t \to ۵^-} [t] = ۴ \\ \left[\lim\limits_{x \to ۲} f(x)\right] = [۵] = ۵ \end{cases}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای پیوسته بودن تابع f در x = ۲، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} a[۱ - ۲\times ۲^-] = \lim_{x\to ۲^-} a[-۳^+] = -۳a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \frac{x^۲-۴}{|(x-۲)(x-۳)|} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۲)}{-(x-۲)(x-۳)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{x+۲}{-(x-۳)} = \frac{۴}{۱} = ۴$$

$$\Rightarrow -۳a = b = ۴ \Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \\ a = -\frac{۴}{۳} \end{cases} \Rightarrow b-۳a=۸$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تابع $y = \left[\frac{\sqrt{x}}{۲}\right]$ در نقاط صحیح به فرم $x = ۴k^۲$ $(k \in Z)$، ناپیوسته است. یعنی در نقاط به طول ۴، ۱۶، ۳۶، ۶۴ و ... ناپیوسته است. اما از آنجا که تابع f، در x = ۴ پیوسته است، طول نقاط ناپیوسته تابع به‌صورت زیر است:

$۱۶, ۳۶, ۶۴, ...$

برای اینکه در بازه (a,۰)، دو نقطه ناپیوسته داشته باشد، حداکثر مقدار a باید برابر ۶۴ باشد.

(دقت کنید که:

$$x \to ۴^+ : \left[\frac{\sqrt{x}}{۲}\right] = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۴^+} f(x) = \lim_{x\to ۴^+} (x^۲ - ۱۶) = ۰$$

$$x \to ۴^- : \left[\frac{\sqrt{x}}{۲}\right] = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۴^-} f(x) = \lim_{x\to ۴^-} ۰ = ۰$$

پس f در x = ۴ پیوسته است.)

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۲»: نمودار تابع f در فاصله $(0,1)$ زیر محور xها و مقادیر آن منفی است. پس در این فاصله $\sqrt{f(x)}$ تعریف نشده است.

گزینه «۳»: تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است، پس $\frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ هم ناپیوسته می‌شود.

گزینه «۴»: مقدار تابع f در $x = 3$ برابر صفر است. پس $y = \frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = 3$ تعریف‌شده نیست و تابع ناپیوسته است.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر $g(x) = mx^2 + 2(m^2 - 2)x$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه تابع $f(x) = [g(x)]$ زمانی در نقطه $x = k$ حد دارد ولی پیوسته نیست که به‌ازای $x = k$، بیش‌ترین مقدار $g(x)$ در همسایگی‌اش باشد و البته $g(x) \in Z$؛ پس باید در این سؤال که داخل براکت یک عبارت درجه دوم قرار دارد، $k = 1$ رأس سهمی باشد:

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow -\frac{2(m^2-2)}{2m} = 1 \Rightarrow \frac{m^2-2}{m} = -1 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

هر دو مقدار در شرط $g(1) \in Z$ صدق می‌کنند، اما $m = 1$ باعث می‌شود عبارت درجه دوم اصلاً بیش‌ترین مقدار نداشته باشد و نادرست است.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

شرط پیوستگی $f(x)$ در نقطه $x = \pi$:

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi)$$

شرط حد داشتن $f(x)$ در $x = \pi$:

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pi^-} f(x) = (-1)\times[0^+] + a[1^-] = 0 \\ \lim_{x\to\pi^+} f(x) = (-1)\times[0^-] + a[1^+] = 1 + a \end{cases} \Rightarrow 1 + a = 0$$

$$\Rightarrow a = -1$$

به‌ازای $a = -1$ تابع حد دارد اما هرگز نمی‌تواند پیوسته باشد.

$$f(\pi) = 0 + a = -1 \neq \lim_{x\to\pi} f(x)$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

حد راست : $\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x}$

$= \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$

$= \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{x^۲}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{\sqrt{۲}x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{\sqrt{۲}x}$

$= \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حد چپ : $\lim_{x\to ۰^-} a[x] + \sqrt{۲} = -a + \sqrt{۲}$

حد راست = حد چپ $\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -a + \sqrt{۲} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

از آنجایی که f در $x = ۱$ پیوسته است.

$$۲g(a) + ۱ = ۲b + ۱ \xrightarrow{g(a) = \frac{b^۲-۳}{۲}} ۲\left(\frac{b^۲-۳}{۲}\right) + ۱ = ۲b + ۱$$

$$b^۲ - ۲b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = -۱ \quad , \quad b = ۳$$

از آنجایی که تابع g تنها می‌تواند در $x = a$ ناپیوسته باشد بنابراین $a = -۱$، از طرفی $b \neq -۱$ چون در این صورت $\frac{b^۲-۳}{۲} = -۱$ و تابع g در $x = -۱$ پیوسته خواهد شد، بنابراین $b = ۳$ و داریم $a + b = ۲$.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

چون $f(x)$ در اطراف نقطه α بیشتر از ۲ می‌باشد، بنابراین، این تابع با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ در نقطه α نزدیک می‌شود، یعنی $\lim_{x\to \alpha} f(x) = ۲^+$ می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to \alpha} [-f(x)] = [-(۲^+)] = -۳$$

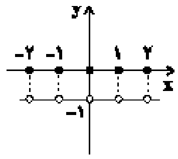
سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تابع $y = [f(x)]$ را تشکیل می‌دهیم و ساده می‌کنیم:

$$y = [f(x)] = [\underbrace{[x]}_{\in Z} - x] = [x] + [-x]$$

$$= \begin{cases} ۰ & , \quad x \in Z \\ -۱ & , \quad x \notin Z \end{cases}$$



$$\Rightarrow \lim_{x \to ۱} [f(x)] = -۱$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار اولاً مخرج یک ریشه مضاعف مثبت دارد که با دقت به ضرایب می‌توان حدس زد $۴x^۲ - ۴x + ۱$ است و یا به صورت زیر مقدار b را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^۲ - ۴(۴)(۱) = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۴ & \text{غ ق ق} \\ b = -۴ & \text{ق ق} \end{cases}$$

چون جواب حد $(+\infty)$ شده، پس لازم است صورت کسر به‌ازای ریشه مخرج یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ یک عدد مثبت باشد:

$$۲(\tfrac{۱}{۲}) + a > ۰ \Rightarrow ۱ + a > ۰ \Rightarrow a > -۱$$

با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم تابع [x] (جزء صحیح) در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته و در نقاطی با طول غیرصحیح پیوسته است. لذا با توجه به بازه مطرح شده، کافیست شرط پیوستگی را برای تابع $[x^2]$ در نقاطی‌که x^2 صحیح می‌شود بررسی کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$$

تابع در این نقطه، پیوسته است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$ ⇐ تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x^2\to 1^+} [x^2] = 1 = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x^2\to 1^-} [x^2] = 0 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to (\sqrt{2})^+} f(x) = \lim\limits_{x^2\to 2^+} [x^2] = 2 = f(2) \\ \lim\limits_{x\to (\sqrt{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x^2\to 2^-} [x^2] = 1 \end{cases}$$

⇐ تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

روشن است که به ازای مقادیر $k > \sqrt{2}$، تعداد نقاط ناپیوستگی بیش از یکی خواهد بود. پس بیش‌ترین مقدار k برابر $\sqrt{2}$ است.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

تابع در بازه $(5 , k^2+10)$ پیوسته است، پس: $5 < x < k^2+10$

$$\Rightarrow \log_5^5 < \log_5^x < \log_5^{k^2+10} \Rightarrow 1 < \log_5^x < \log_5^{k^2+10}$$

(۱)

با توجه به نامساوی (۱)، برای آن که $y = [\log_5^x] + 2$ پیوسته باشد، باید $1 < \log_5^x < 2$ باشد، به عبارت دیگر باید $\log_5^{k^2+10} \le 2$ باشد، پس:

$$5^{\log_5^{k^2+10}} \le 5^2 \Rightarrow (k^2+10)^{\log_5^5} \le 25$$

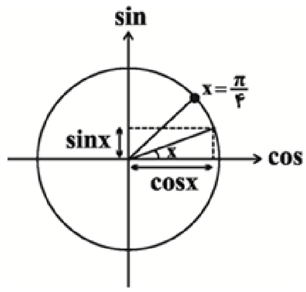
$$\Rightarrow k^2+10 \le 25 \Rightarrow k^2 \le 15 \Rightarrow -\sqrt{15} \le k \le \sqrt{15}$$

پس k نمی‌تواند ±۴ باشد.

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\tan x - ۱} = \frac{|\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}|}{۱-۱} = \frac{۰}{۰}$$



به دایره مثلثاتی توجه کنید:

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \sin x = \cos x$$

$$۰ < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \sin x < \cos x$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} -\frac{(\sin x - \cos x)}{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} -\frac{\cos x(\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۲

در نمودار تابع f، $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = ۰$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x) = ۲$ است.

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-۲)^+} g(x) = \frac{۳+۰}{-۴+۰}\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} g(x) = \frac{۳-۴}{-۵+۲m}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با هم برابرند}} \frac{-۱}{۲m-۵} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲m-۵} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴ = ۶m - ۱۵ \Rightarrow ۶m = ۱۹ \Rightarrow m = \frac{۱۹}{۶}$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

$$x \to -\frac{\pi}{۴} \Rightarrow -۱ < x < ۰ \Rightarrow [-\frac{\pi}{۴}] = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱+۲\sin x\cos x}{-\cos^۲ x+\sin^۲ x} = \frac{(\sin x+\cos x)^۲}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{۲(\cos x+\sin x)^۲}{(\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)^۲}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{۲}{\sin x-\cos x} = \frac{۲}{-۲-\sqrt{۲}-۲-\sqrt{۲}} = \frac{۲}{-\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲}$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

اگر از سمت راست به $x = ۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱>۰$، پس در نامساوی داده شده مخرج $۱-x<۰$ در نتیجه باید $f(x)-۲>۰$ باشد در نتیجه اگر $x\to ۱^+$ آنگاه $f(x)\to ۲^+$ همچنین اگر از سمت چپ به $x = ۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱<۰$ پس $۱-x>۰$ در نتیجه در نامساوی $\frac{f(x)-۲}{۱-x}<۰$ باید $f(x)-۲<۰$ باشد، یعنی $x\to ۱^-$ آنگاه $f(x)\to ۲^-$. بنابراین گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

تابع $\frac{f}{g}$ قطعاً در $x = a$ حد ندارد. زیرا اگر این تابع در $x = a$ حد داشته باشد، با توجه به این‌که تابع g در این نقطه حد دارد، پس باید تابع $g\times\frac{f}{g}$ در این نقطه حد داشته باشد. یعنی f باید حد داشته باشد که خلاف فرض مساله است. سایر گزینه‌ها در حالتی که $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ باشد، می‌توانند در $x = a$ دارای حد باشند.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $l > ۰$، آن‌گاه طبق قضایای حد $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$. پس در مورد $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}$ نمی‌توانیم با قطعیت نظر دهیم. ممکن است صفر باشد یا اینکه وجود نداشته باشد. برای مثال $f(x) = x$ را در نظر بگیرید.

داریم: $\lim_{x\to ۰} x = ۰$، در حالی که $\lim_{x\to ۰}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0}(xf(x)-1)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} xf(x)=3$$

در این‌صورت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{2}{x}}{f(x)-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{xf(x)+2}{x}}{\frac{xf(x)-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+2}{xf(x)-1}=\frac{3+2}{3-1}=\frac{5}{2}$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا باید دامنه‌ی توابع f و g را تعیین کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_f: x\ge 0$$
$$g(x)=\sqrt{-x}\Rightarrow D_g: -x\ge 0\Rightarrow x\le 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{0\}\\ D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{g(x)=0\}=\phi\end{cases}$$

با توجه به این که می‌دانیم شرط گرفتن حد در نقطه‌ی $x=0$ آن است که بتوان از داخل دامنه‌ی تابع به آن نقطه نزدیک شد یعنی خود نقطه‌ی $x=0$ مدنظر نمی‌باشد بلکه باید کمی کم‌تر یا کمی بیش‌تر از آن در دامنه‌ی تابع موجود باشد. بنابراین با توجه به دامنه‌ی به دست آمده برای دو تابع $f+g$ و $\frac{f}{g}$ نمی‌توان در مورد حد آن‌ها در نقطه‌ی $x=0$ صحبت کرد.

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to 0} f(1-x^2)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|)+\lim_{x\to 0} f(1-x^2)$$

$$=(-1)+1=0$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

در تابع g، دامنه تابع به‌صورت اعداد صحیح و غیرصحیح تفکیک شده است. برای محاسبه‌ی حد تابع g در تمام نقاط باید از ضابطه‌ی پائین $(x \notin Z)$ استفاده کنیم. زیرا مثلاً برای نقطه‌ی $x = 1$ زمانی‌که عبارت $x \to 1$ مطرح می‌شود به معنای نزدیک شدن به نقطه ۱ است و هیچ‌گاه در عمل به نقطه‌ی ۱ نخواهیم رسید، بنابراین $x \to 1$ به معنای اعداد غیرصحیح است. در نقطه‌ی $x = 0$ هم وضع به همین صورت است، پس:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1 \end{cases}$$

حد تابع در نقطه‌ی $x = 0$ به ۲ عدد نابرابر رسید که به معنای عدم وجود حد تابع در این نقطه است.

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل می‌دهیم: $(\frac{g}{f})(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{[x]}{x}} = \frac{1}{[x]}$

دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f}$ برابر $R - [0, 1)$ است. پس حد راست تابع در $x = 0$ تعریف نشده است (حد مخرج صفر مطلق می‌شود). بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^-} (\frac{g}{f})(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{-1} = -1$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

داریم:

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x + 2}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x + 2}{(\cos x + 1)(2\cos x - 1)}$$

$$= \frac{2}{(0^+)(-3)} = -\infty$$

می‌دانیم که $\cos x + 1 \geq 0$، پس $\lim_{x\to \pi} (\cos x + 1) = 0^+$ است.

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به شکل، تابع دارای یک مجانب قائم در بازه $(0, 2\pi)$ می‌باشد. چون در دو سمت مجانب، تابع به $+\infty$ میل می‌کند، پس مخرج ریشه مضاعف دارد. از طرفی معادله $\cos x = k$ هنگامی جواب مضاعف دارد که $k = \pm 1$ باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$1 + b\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{b} = \pm 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$b = 1 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

$$b = -1 \Rightarrow 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{0<x<2\pi}$$ جواب ندارد.

در نتیجه با توجه به محاسبات فوق، $b = 1$ است، از طرفی با توجه به نمودار، معادله $y = 0$ باید جواب مضاعفی در بازه $(0, \pi)$ داشته باشد. معادله $\sin x = k$ هنگامی جواب مضاعف دارد که $k = \pm 1$ باشد.

$$1 - a\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{a} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 1 \Rightarrow 1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$a = -1 \Rightarrow 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{0<x<\pi}$$ جواب ندارد

بنابراین $a = b = 1$ می‌باشد.

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

زیر رادیکال مخرج، منفی می‌شود پس تابع در بی‌نهایت تعریف نشده است.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2+\sqrt{x^2+2x-5}}{x^2-1-\sqrt{4x-x^2}}$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا مقدار جزء صحیح را در همسایگی عدد مورد نظر حد، به‌دست آورده و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{[x]}{\tan x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[0^-]}{\tan x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\tan x}$$
$$= \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

سوال ۳۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

برای آن‌که $\lim_{x\to ۲} f(x) = +\infty$ باشد، باید حد چپ و راست f، وقتی $x \to ۲$ هر دو برابر با $+\infty$ باشند، پس:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{[x+۲]+k}{x-۲} = \frac{[۴^+]+k}{۲^+-۲}$$

$$= \frac{۴+k}{۰^+} = +\infty \xrightarrow[\text{مثبت‌باشد.}]{\text{باید صورت کسر}} k+۴ > ۰ \Rightarrow k > -۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{[x+۲]+k}{x-۲} = \frac{[۴^-]+k}{۲^--۲}$$

$$= \frac{۳+k}{۰^-} = +\infty \xrightarrow[\text{منفی‌باشد.}]{\text{باید صورت کسر}} ۳+k < ۰ \Rightarrow k < -۳$$

از اشتراک دو شرط بالا، داریم: $-۴ < k < -۳$.

سوال ۳۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با ضرب‌کردن تابع در مزدوج رادیکالی آن، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to +\infty} (۲\sqrt{x} - \sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}) \times \frac{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{۴x-(۴x-۲\sqrt{x})}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}$$

در عبارت $۴x-۲\sqrt{x}$ که زیر رادیکال قرار دارد، وقتی $x \to +\infty$ کافی است تنها توان بزرگ‌تر را درنظر بگیریم:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+۲\sqrt{x}} = \frac{۲\sqrt{x}}{۴\sqrt{x}} = \frac{۱}{۲}$$

سوال ۳۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

پرتوان صورت $x^۳$ و پرتوان مخرج به‌صورت زیر است:

۱) اگر $m = ۳$ و $n < ۳$:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۳}{x^۳} = ۱$$

۲) اگر $n = ۳$ و $m < ۳$:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۳}{۲x^۳} = \frac{۱}{۲}$$

۳) اگر $n < ۳$ و m مقدار پرتوان صورت بیش‌تر از مخرج است و در نتیجه حاصل حد بی‌نهایت می‌شود که یک مقدار عددی نیست.

۴) اگر هر کدام از m و n و یا یکی از این دو از ۳ بزرگ‌تر باشد، حاصل حد مقدار صفر می‌شود.

۵) اگر $m = n = ۳$:

$$\Rightarrow m = n = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۳}{۳x^۳} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین حاصل حد می‌تواند یکی از مقادیر صفر، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ یا ۱ باشد.

سوال ۳۴

پاسخ: گزینه ۱

تابع در $x = ۲$ نامتناهی می‌شود. پس $x = ۲$ ریشه مخرج است. از طرفی تابع در $x = ۳$ حد دارد ولی مقدار ندارد. پس $x = ۳$ هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج است. مخرج کسر به صورت $(x-۲)(x-۳) = x^۲ - ۵x + ۶$ می‌باشد. پس $c = -۵$ و $d = ۶$

$$(۱) \qquad ۲x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۳} ۱۸ + ۳a + b = ۰ \Rightarrow ۳a + b = -۱۸$$

حاصل حد در $x = ۳$ برابر ۷ است. برای محاسبه حد باید صورت و مخرج را بر $(x-۳)$ تقسیم کنیم.

$$\lim_{x\to۳} \frac{۲x^۲+ax+b}{(x-۲)(x-۳)} = \lim_{x\to۳} \frac{۲x+۶+a}{x-۲} = ۷ \Rightarrow \frac{۱۲+a}{۱} = ۷$$

$$\Rightarrow a = -۵ \xrightarrow{(۱)} ۳a + b = -۱۸ \Rightarrow b = -۳$$

$$ab + cd = (-۳)(-۵) + (-۵)(۶) = ۱۵ - ۳۰ = -۱۵$$

سوال ۳۵

پاسخ: گزینه ۲

صورت و مخرج عبارت داده شده به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ صفر می‌شود، پس باید کسر رفع ابهام شود، یعنی صفرکننده‌های صورت و مخرج را با هم ساده کنیم. برای این کار باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج رادیکالی صورت ضرب کنیم:

$$\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} \times \frac{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}$$

$$= \frac{\tan x-\frac{1}{\tan x}}{\cos 2x(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos 2x(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})}$$

$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos 2x(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

با جای‌گذاری رابطه $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$، کسر بالا به صورت زیر ساده می‌شود: $\frac{-1}{(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$

حال حد خواسته شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}}+\sqrt{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}})(\cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4})} = \frac{-1}{(1+1)(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$= \frac{-1}{2\times\frac{1}{2}} = -1$$

سوال ۳۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$x = 0$ مجانب قائم است، پس مخرج به ازای $x = 0$ باید برابر صفر باشد، پس $b = 0$ است.

خط $y = 2$ نیز بر منحنی مماس است، بنابراین معادله تقاطع با منحنی باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{2x^2+a}{x} = 2 \Rightarrow 2x^2 + a = 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 2\times\frac{1}{2} + 0 = 1$$

سوال ۳۷

پاسخ: گزینه ۳

$$n+2>1: \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+2}}{-(n^2+1)x} = -\infty$$

$$n+2=1 \Rightarrow n=-1: \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x-x}^{0}+2}{-2x} = 0$$

$$n+2<1 \rightarrow n<-1: \lim_{x\to+\infty} \frac{nx}{-(n^2+1)x} = \frac{n}{-(n^2+1)} > 0$$

سوال ۳۸

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا باید تعیین کنیم زمانی که x به سمت $^-2$ میل می‌کند، عبارت $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ به چه عددی میل می‌کند. با جای‌گذاری عدد ۲ به جای xهای صورت و مخرج به کسری می‌رسیم که صورت آن ۳ و مخرج آن صفر است. حال کافیست علامت صفر موجود در مخرج را تعیین کنیم که ملاحظه می‌شود در مخرج کسر با $^-0$ مواجه خواهیم بود.

بنابراین عبارت $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ زمانی که $x \to 2^-$، به $-\infty$ میل می‌کند، یعنی حد تابع f را در $-\infty$ باید محاسبه کنیم که جواب این حد برابر با ۱ خواهد بود.

سوال ۳۹

پاسخ: گزینه ۲

چون حاصل حد وقتی $x \to +\infty$، برابر عددی حقیقی و مخالف صفر شده است. پس درجه‌ی چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج کسر برابرند، پس: $n = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(ax-2)^3+x^2(x-1)}{3x(2x-1)^2+x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^3x^3+x^3}{3x\times 4x^2}$$
$$= \frac{a^3+1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+1}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^3+1 = 9 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^2+x}{(2x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

سوال ۴۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a^2x^2-bx+4}{x-1} - x + 1\right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a^2x^2-bx+4+(x-1)(1-x)}{x-1}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a^2x^2-bx+4+x-x^2-1+x}{x-1} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a^2-1)x^2+(2-b)x+3}{x-1} = 2 \qquad (*)$$

.با توجه به حد بالا، باید ضریب x^2 در صورت کسر برابر صفر باشد:

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$(*) \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2-b)x+3}{x-1} = \frac{(2-b)}{1} = 2 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 1 - 0 = 1$$

سوال ۴۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|-2x^2-x+1|}-\frac{4}{4x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|2x^2+x-1|}-\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|(2x-1)(x+1)|}-\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{3(2x+1)-4(x+1)}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{6x+3-4x-4}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{2x-1}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}\times 2}=\frac{1}{3}$$

سوال ۴۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x^3-1)+\sqrt{x^3-1}}{(1-x^2)+\sqrt{x^2-1}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)+\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}{(1-x)(1+x)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{3(x-1)+\sqrt{3(x-1)}}{2(1-x)+\sqrt{2(x-1)}}$$

اگر $t=x-1$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{3t+\sqrt{3t}}{-2t+\sqrt{2t}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t}(3\sqrt{t}+\sqrt{3})}{\sqrt{t}(-2\sqrt{t}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

سوال ۴۳

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to4^-} fof(x+1)=\lim_{x\to5^-} f(f(x))$$

اگر $x\to5^-$ آن‌گاه تابع $y=f(x)$ تابعی ثابت است و بنابراین:

$$\lim_{x\to5^-} f(f(x))=f(5)=4$$

سوال ۴۴

پاسخ: گزینه ۳

چون مجانب قائم، منطبق بر محورyها (با معادله‌ی $x = ۰$) است، پس مخرج به‌ازای $x = ۰$ باید صفر شود پس $b = ۰$. مجانب افقی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۳+x^۲+ax+۱}{-x^۳} = -۱$$

طبق نمودار، تابع بر مجانب افقی‌اش مماس است. معادله‌ی تقاطع آن با مجانب افقی‌اش باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\frac{x^۳+x^۲+ax+۱}{-x^۳} = -۱ \Rightarrow x^۳+x^۲+ax+۱ = x^۳ \Rightarrow x^۲ + ax + ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۲ \end{cases}$$

طول نقطه‌ی تماس منحنی با مجانب افقی‌اش منفی است.

$a = ۲ \Rightarrow$ معادله‌ی تقاطع: $x^۲ + ۲x + ۱ = (x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$a = -۲ \Rightarrow$ معادله‌ی تقاطع: $x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

بنابراین $a = ۲$، پس $a + b = ۲ + ۰ = ۲$.

سوال ۴۵

پاسخ: گزینه ۴

توجه کنید که مخرج هریک از کسرها به‌ازای $x = -۱$، صفر می‌شود و حاصل عبارت مورد نظر، ابهام دارد که باید آن را رفع ابهام کنیم.

وقتی $x \to (-۱)^+$ داریم: $|x| = -x$

بنابراین حد به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} \left(\frac{x-۲}{x^۲-۱} + \frac{۲}{x^۲-x-۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to(-۱)^+} \left(\frac{x-۲}{(x-۱)(x+۱)} + \frac{۲}{(x+۱)(x-۲)}\right)$$

$$= \lim_{x\to(-۱)^+} \frac{(x-۲)^۲+۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to(-۱)^+} \frac{x^۲-۴x+۴+۲x-۲}{(x-۱)(x+۱)(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to(-۱)^+} \frac{x^۲-۲x+۲}{(x-۱)(x+۱)(x-۲)} = \lim_{x\to(-۱)^+} \frac{۵}{۰^+} = +\infty$$

سوال ۴۶

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1-x}{x^4}\right)=\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

توجه کنید که: $\lim_{x\to 0}\frac{1-x}{x^4}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

پس:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4}\overbrace{|x+\frac{1}{8}|}^{+}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2(x+\frac{1}{8})}{x}=2$$

سوال ۴۷

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$$

عبارت صورت را با استفاده از اتحاد $(a+b)^3$ و مخرج را با استفاده از $(a+b)^2$ دوباره بازنویسی می‌کنیم تا بزرگ‌ترین درجه‌ها ظاهر شوند:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(/x^3+3x^2+\dots)-(/x^3-3x^2+\dots)}{(x^2+\dots)+(x^2+\dots)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2+\dots}{2x^2+\dots}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2}{2x^2}=3$$

یادآوری:

$$(1)\ (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$(2)\ (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

سوال ۴۸

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که علامت صورت کسر در اطراف $x = -۲$ مثبت است، پس مخرج کسر در دو طرف $x = -۲$ باید دارای علامت یکسان باشد (یعنی در این نقطه تغییر علامت ندهد.) همچنین مخرج کسر در این نقطه باید صفر باشد.

پس داریم:

$$\triangle_{\text{مخرج}} = ۰ \Rightarrow ۶۴ - ۴ab = ۰$$
$$x = -۲ \text{ ریشه مخرج} \Rightarrow ۴a + ۱۶ + b = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = -۸ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱۰$$

البته می‌توان مخرج را به صورت $a(x+۲)^۲$ در نظر گرفت و a و b را به‌دست آورد:

$$a(x+۲)^۲ = ax^۲ - ۸x + b$$

$$ax^۲ + ۴ax + ۴a = ax^۲ - ۸x + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a = -۸ \\ ۴a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = -۸ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱۰$$

سوال ۴۹

پاسخ: گزینه ۴

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^۳+۲x^۲-۲bx^۳-bx^۲-bx}{۲x^۲+x+۱} = ۲$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(a-۲b)x^۳+(۲-b)x^۲-bx}{۲x^۲+x+۱} = ۲$$

چون مقدار حد، عددی حقیقی است، پس باید حداکثر درجه‌ی صورت و مخرج برابر باشد.

$$a - ۲b = ۰ \Rightarrow a = ۲b$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(۲-b)x^۲}{۲x^۲} = ۲ \Rightarrow ۲ - b = ۴ \Rightarrow b = -۲$$

$$\Rightarrow a = -۴ \Rightarrow a + b = -۶$$

سوال ۵۰

پاسخ: گزینه ۱

با جایگذاری $x = \frac{۳\pi}{۴}$ به جای xهای موجود در صورت و مخرج کسر با $\frac{۲}{۰}$ مواجه می‌شویم. توجه کنید که $\tan\frac{۳\pi}{۴} = \cot\frac{۳\pi}{۴} = -۱$ است. حال به سراغ تعیین علامت صفر موجود در مخرج کسر می‌رویم. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم: $x \to (\frac{۳\pi}{۴})^- \Rightarrow \tan x \to (-۱)^-$

$$\tan x < -۱ \Rightarrow ۱ + \tan x < ۰$$

بنابراین مخرج کسر به‌سمت ۰^- میل می‌کند:

$$\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} \frac{۲^{-\cot x}}{۱+\tan x} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty$$

سوال ۵۱

پاسخ: گزینه ۲

اولین اقدام در حدهای شامل قدر مطلق، تعیین علامت عبارت درون قدرمطلق‌ها می‌باشد که در این مسأله عبارت درونی قدر مطلق موجود در صورت کسر دارای علامت مثبت و عبارت درونی قدرمطلق موجود در مخرج کسر دارای علامت منفی است.

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{|x^2-1|}{(|x|-1)^2} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x^2-1)}{(-x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

یادآوری: عبارت $(-x-1)^2$ با عبارت $(x+1)^2$ برابر است. کافیست از علامت منفی فاکتور بگیریم:

$$(-x-1)^2 = (-(x+1))^2 = (x+1)^2$$

سوال ۵۲

پاسخ: گزینه ۲

چون حاصل حد $-\infty$ شده است پس مخرج کسر باید ریشه مضاعف در $x = \frac{a}{2}$ داشته باشد:

$$(x-\frac{a}{2})^2 = x^2+bx+4$$

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4} = x^2+bx+4$$

$$\frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$b = -a \quad (*)$$

اگر فرض کنیم $a = 4$ در این صورت:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

پس $a = 4$ صحیح نمی‌باشد.

اگر $a = -4$:
$$\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پس $a = -4$ قابل قبول است، بنابراین:

$$\xrightarrow{(*)} b-a = 4-(-4) = 8$$

سوال ۵۳

پاسخ: گزینه ۱

چون حد تابع f^{-1} در $x = a$ برابر ۱ است برای محاسبه‌ی a باید حد تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنیم. ابهام حد تابع f در $x = 1$، برابر $\infty - \infty$ است. مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-2}{x-1} + \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x^2-2)(x+1)+x^2+x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-2x-2+x^2+x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \quad (\text{ابهام } \tfrac{0}{0} \text{ دارد})$$

$$\Rightarrow \text{حد} = \lim_{x\to1} \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1} (x+2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

سوال ۵۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x+\frac{\pi}{4})$$

بنابراین: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{[x]-1}{1-\tan x}$

در سمت چپ $x = \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$x \to \frac{\pi}{4}^- : \begin{cases} [x] = \overbrace{[\frac{\pi^-}{4}]}^{\text{بین صفر و یک}} = 0 \\ \tan x \to 1^- \end{cases}$$

بنابراین: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{0-1}{1-1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

سوال ۵۵

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(x - \sqrt[3]{x^3+1})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(x - \sqrt[3]{x^3+1}) \times \frac{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x^3-x^3-1)}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}$$

$$\frac{-x^2}{x^2+x^2+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

سوال ۵۶

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(x-\sqrt[3]{x^3+1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2(x-\sqrt[3]{x^3+1})\times\frac{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^3-x^3-1)}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2+x^2+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

سوال ۵۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا می‌دانیم $0\le x-[x]<1$ پس عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است. پس کافی است فقط نقاط صحیح را بررسی کنیم چون $[x]$ فقط در نقاط صحیح ناپیوسته است.

$$a\in z \text{ فرض می کنیم } \Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=[a^+]+\sqrt{a-[a^+]}\\ =a+\sqrt{a-a}=a\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=[a^-]+\sqrt{a-[a^-]}\\ =a-1+\sqrt{a-(a-1)}=a\\ f(a)=[a]+\sqrt{a-[a]}=a\end{cases}$$

پس همواره پیوسته است.

سوال ۵۸

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت: $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$

یعنی اگر $x\to+\infty$، تابع f با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ و در نتیجه تابع g با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=\lim_{t\to1^-} f(t)=-\infty$$

سوال ۵۹

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که اگر $x \to -\infty$، $\frac{۱}{x} < ۰$، $-\frac{۱}{x} > ۰$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{-۱}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} = ۰$ است؛ بنابراین در بازه $(-\infty, -۱)$، تساوی‌های $\left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$ و $\left[-\frac{۱}{x}\right] = ۰$ برقرارند.

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x(x-۱)+x^۲\left[\frac{۱}{x}\right]}{x^۲\left(۲+\left[-\frac{۱}{x}\right]\right)+۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x(x-۱)-x^۲}{x^۲(۲+۰)+۱}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^۲-۳x}{۲x^۲+۱} = ۱$$

سوال ۶۰

پاسخ: گزینه ۱

شیب خط $\frac{-۳}{۲}$ و عرض از مبدأ آن ۳ است، پس معادله خط به‌صورت $y = -\frac{۳}{۲}x + ۳$ خواهد بود، بنابراین ضابطه $f^{-۱}$ برابر است با:

$$x = -\frac{۳}{۲}y + ۳ \Rightarrow y = \frac{-۲}{۳}x + ۲$$

در نتیجه حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{۳}{۲}x+۳+|x|}{-\frac{۲}{۳}x+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{۳}{۲}x+x}{-\frac{۲}{۳}x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{۱}{۲}x}{-\frac{۲}{۳}x} = \frac{۳}{۴}$$

سوال ۶۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با توجه به ریشهٔ قدرمطلق $(x = ۰)$ ضابطهٔ تابع f را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{۲x} & x > ۰ \\ \dfrac{x^۲-۱}{x-x} & x < ۰ \end{cases}$$

برای $x < ۰$ مخرج کسر صفر می شود. پس $x < ۰$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، پس $\lim_{x \to ۰^-} f(x)$ بی‌معنی است.

$$\lim_{x\to۰^+} f(x) = \lim_{x\to۰^+} \frac{x^۲-۱}{۲x} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

سوال ۶۲

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x = ۵$ به‌دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۵^+} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۵^-} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)} = \frac{+۱}{۰^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۵} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)} = +\infty$$

سوال ۶۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه تابع g را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۲x+۱}{f(x)} \geq ۰ \Rightarrow$$

		-۱		$-\frac{۱}{۲}$	
$۲x+۱$	−		−	۰	+
$f(x)$	−	۰	+		+
$\frac{۲x+۱}{f(x)}$	+	ت ن	−	۰	+

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -۱) \cup \left[-\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$$

این یعنی تابع $g(x)$، فقط در همسایگی چپ $x = -۱$ تعریف شده است. از طرفی تابع $g(x)$ همواره مثبت است. نمودار گزینه «۲» ویژگی‌های تابع g را دارا است.

سوال ۶۴

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نمودار، $k < ۰$ است، از طرفی وقتی $x \to k^+$، آن‌گاه $f(x) \to ۱^+$ بنابراین:

$$\lim_{x\to k^+} \frac{x}{۱-f(x)} = \frac{k}{۰^-} = \frac{\text{عدد منفی}}{۰^-} = +\infty$$

سوال ۶۵

پاسخ: گزینه ۴

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۱$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{f(x)}\left(\sqrt{f(x)}-۱\right)}{\left(۱-\sqrt{f(x)}\right)\left(۱+\sqrt{f(x)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{f(x)}}{۱+\sqrt{f(x)}} = \frac{-۱}{۱+۱} = -\frac{۱}{۲}$$

سوال ۶۶

پاسخ: گزینه ۱

با بررسی حد راست تابع $fof(x)$ در $x = -۳$ داریم:

$\lim_{x\to(-۳)^+} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲$

$\Rightarrow \lim_{x\to(-۳)^+} \frac{-x+۱}{(fof)(x)-۲} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$

با توجه به نمودار: واضح است که در بی‌نهایت، تابع از مقادیر کم‌تر از ۲ به آن نزدیک می‌شود.

سوال ۶۷

پاسخ: گزینه ۳

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(m^۲-۱)x^۳+(۲m+۳)x^۲+۲x-\frac{۱}{x}}{m+\frac{۵}{x}}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\left(\frac{m^۲-۱}{m}\right)x^۳ + \left(\frac{۲m+۳}{m}\right)x^۲ + \frac{۲}{m}x\right) = -\infty$

چون وقتی $x \to \pm\infty$، حاصل فقط برابر $-\infty$ است، باید ضریب $x^۳$ صفر شود؛ یعنی $m = \pm۱$. اما مقداری از m قابل قبول است که ضریب $x^۲$ به ازای آن منفی شود؛ بنابراین فقط $m = -۱$ قابل قبول خواهد بود.

سوال ۶۸

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0^-} gof(x) = \lim_{x\to 0^-} g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to (-\frac{1}{2})^+} g(x)$$

$$= \lim_{x\to (-\frac{1}{2})^+} \frac{5x+1}{4x^2-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^-} = +\infty$$

سوال ۶۹

پاسخ: گزینه ۱

حد داده شده ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ دارد.

با توجه به اینکه توان جمله x^{n-1} در صورت، دو واحد از توان عبارت x^{n+1} در مخرج، کمتر است، پس برای اینکه حاصل حد ۲- شود، باید:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}+mx^3-1}{2x^{n+1}+4x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{2x^{n+1}} = -2 \quad (*)$$

باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد، بنابراین: $n+1=3 \Rightarrow n=2$

باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد، بنابراین:

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} \lim_{x\to\infty} \frac{mx^3}{2x^3} = -2 \Rightarrow \frac{m}{2} = -2 \Rightarrow m=-4$$

$$\Rightarrow m+n=-2$$

سوال ۷۰

پاسخ: گزینه ۲

باید $(x+1) \to 0^+$ پس $x \to -1^+$ میل خواهد کرد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x+1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$