سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$، داریم:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})^3$$
$$-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \Rightarrow 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow |\sin\alpha\cos\alpha|=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha>0\ ,\ \cos\alpha<0]{\text{امتهای } \alpha \text{ در ناحیه دوم}} \sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$A=|\sin\alpha-\cos\alpha| \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=1-2(-\frac{1}{2})=2$$

$$\xrightarrow{A>0} A=\sqrt{2}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$A=\frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}-2\cot^2\theta=\frac{2}{\sin^2\theta}$$
$$-\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=2$$

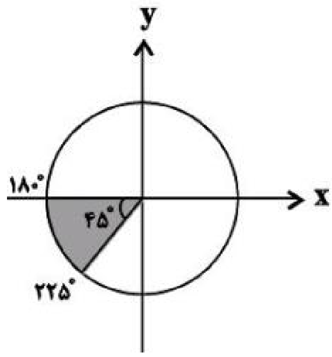
$$B=\frac{\cos^4\theta+\sin^2\theta-1}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^4\theta-\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)}{\sin^4\theta}=-\frac{\cos^2\theta\times\sin^2\theta}{\sin^4\theta}=-\cot^2\theta$$

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{-\cot^2\theta}=-2\tan^2\theta$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»



با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، در محدودهٔ $۱۸۰^\circ < x < ۲۲۵^\circ$ عرض نقاط بیشتر از طولشان است، بنابراین $۰ > \sin x > \cos x$.

$$\sqrt{۱ - ۲\sin x \cos x} \times \sqrt{۱ + \cot^۲ x}$$

$$= \sqrt{\sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x \cos x} \times \sqrt{۱ + \cot^۲ x}$$

$$= \sqrt{(\sin x - \cos x)^۲} \times \sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ x}}$$

$$= |\sin x - \cos x| \times \frac{۱}{|\sin x|} = (\sin x - \cos x) \times \left(-\frac{۱}{\sin x}\right)$$

$$= -۱ + \cot x$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\frac{\tan x}{۱+\cos x} + \frac{\tan x}{۱-\cos x} = \tan x \left(\frac{۱-\cos x+۱+\cos x}{۱-\cos^۲ x}\right)$$

$$= \tan x \left(\frac{۲}{\sin^۲ x}\right) = m \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{m}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۲}{m}$$

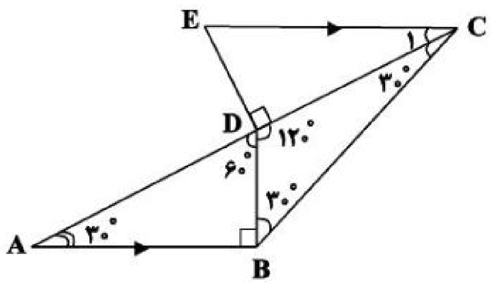
$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = (\cos^۲ x + \sin^۲ x)^۲ - ۲(\sin x \cos x)^۲$$

$$= ۱ - ۲ \times \frac{۴}{m^۲} = ۱ - \frac{۸}{m^۲}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»



$EC \| AB$, مورب $AC \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}_1 = ۳۰^\circ$

$\Rightarrow \cos ۳۰^\circ = \frac{CD}{CE} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} (۱)$

با توجه به زوایای مشخص شده در شکل، مثلث BDC، متساوی‌الساقین است. بنابراین:

$CD = BD (۲)$

$\sin ۳۰^\circ = \frac{BD}{۱۲ - CD} = \frac{۱}{۲} \overset{(۲)}{\Rightarrow} ۲CD = ۱۲ - CD \Rightarrow CD = ۴$

$\xrightarrow{(۱)} CE = \frac{۲}{\sqrt{۳}} CD \Rightarrow CE = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$

$\tan ۳۰^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۴}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$

$\frac{CE}{AB} = \frac{\frac{۸}{\sqrt{۳}}}{\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}} = \frac{۲}{۳}$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

در مثلث تشکیل شده حاصل از برخورد خط d′ با محورها داریم:

$\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{x}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow x = ۲$

پس خط d′ در نقطه (۲,۰) محور xها را قطع می‌کند.

بنابراین نقطه (۲,۳) روی خط d قرار دارد.

با توجه به مثلث تشکیل شده حاصل از برخورد دو خط d و d′ با محور xها، زاویه خط d با جهت مثبت محور xها، برابر ۴۵° است. پس:

معادله خط d : $y = mx + h \xrightarrow{m = \tan ۴۵^\circ = ۱} y = x + h$

$\xrightarrow{(۲,۳)} h = ۱ \Rightarrow y = x + ۱$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

مساحت شش ضلعی منتظم، ۶ برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع با همان طول ضلع است. بنابراین:

$$S_{CDEFGH} = ۶\times\frac{۱}{۲}\times a\times a\times \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = CH = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مساحت متوازی‌الاضلاع ABCH نیز ۲ برابر مساحت مثلث BCH است. بنابراین:

$$S_{ABCH} = ۲\times\frac{۱}{۲}\times BC\times CH\times \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow BC\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{محیط شکل} = ۶CH + ۲BC = ۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل داده شده، زاویه خط $L_۱$ با جهت مثبت محور xها، ۳۰° و زاویه خط $L_۲$ با جهت مثبت محور xها، ۶۰° است.

نقطه $(۶,۰)$ روی خط $L_۱$ قرار دارد، بنابراین:

$$L_۱ : y = mx+b \xrightarrow{m=\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}} y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$$

$$\xrightarrow{(۶,۰)} b = -۲\sqrt{۳} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x-۲\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{۹}{۴}} y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\left(-\frac{۹}{۴}\right)-۲\sqrt{۳} = -\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۴}$$

بنابراین نقطه $\left(-\frac{۹}{۴},-\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۴}\right)$ روی خط $L_۲$ قرار دارد. داریم:

$$y = m'x+b' \xrightarrow{m'=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}} y = \sqrt{۳}x+b'$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{۹}{۴},-\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۴}\right)} b' = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}x-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{y=۰} x = \frac{۱}{۲}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون مساحت‌های $A\overset{\triangle}{D}E$ و $C\overset{\triangle}{E}F$ برابر هستند، پس داریم:

$$S_{ADE} = S_{CEF} \xrightarrow{+S_{BCED}} S_{ADE} + S_{BCED} = S_{CEF} + S_{BCED}$$

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C} = S_{B\overset{\triangle}{D}F} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times BC \sin\hat{B} = \frac{1}{2}BD \times BF \sin\hat{B}$$

$$\Rightarrow AB \times BC = BD \times BF$$

$$\Rightarrow (6)(6) = (4)(6+x)$$

$$\Rightarrow 36 = 4(6+x) \Rightarrow 6+x = 9 \Rightarrow x = 3$$

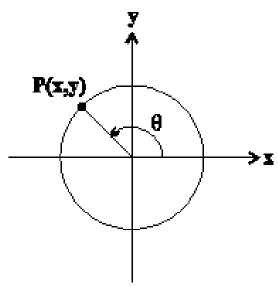
سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم همواره $-1 \le \sin\alpha \le 1$ و $-1 \le \cos\beta \le 1$ ، بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} -3 \le 3\sin\alpha \le 3 \\ -2 \le -2\cos\beta \le 2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} -5 \le 3\sin\alpha - 2\cos\beta \le 5$$

تنها زمانی حاصل $3\sin\alpha - 2\cos\beta$ برابر -۵ می‌شود که $\sin\alpha = -1$ و $\cos\beta = 1$ باشد.



$$\begin{cases} y = \sin\theta \\ x = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بنابراین برای زوایای α و β داریم:

$$\begin{cases} 1 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \\ \sin^2\beta + 1 = 1 \Rightarrow \sin\beta = 0 \end{cases}$$

پس: $2\sin\beta + 3\cos\alpha = 0$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

می‌دانیم P روی دایره است، پس رابطه $x_p^2 + y_p^2 = 1$ برقرار است. همچنین روی خط $y = -\sqrt{3}x$ نیز قرار دارد. پس داریم:

$$x_p^2 + (\sqrt{3}x_p)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4x_p^2 = 1 \xrightarrow{x_p>0} x_p = \frac{1}{2}\ ,\ y_p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\sqrt{3}$$

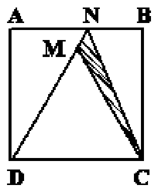
$$\Rightarrow \tan\theta - \sin\theta = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است.



$$MD = MC = CD = a$$

$$C\hat{M}D = 60^\circ \Rightarrow N\hat{M}C = 120^\circ$$

در مثلث ADN داریم:

$$A\hat{D}N = 30^\circ \Rightarrow DN = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\Rightarrow MN = DN - MD = \frac{2\sqrt{3}}{3}a - a = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}a$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MNC}} = (\frac{1}{2})(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}a)(a)\sin 120^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\xrightarrow{a=2} S_{\overset{\triangle}{MNC}} = 2 - \sqrt{3}$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در مثلث ABHداریم:

$$AB = \frac{۳}{\sin \alpha}$$

از طرفی$\alpha = \hat{C}$و در مثلث ABC داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{۳}{\sin \alpha \tan \alpha}$$

نهایتاً در مثلث ACH داریم:

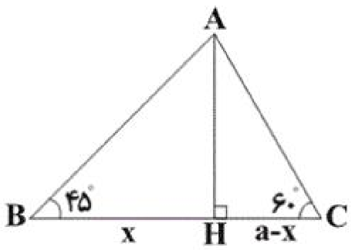
$$x = AC \cos \alpha = \frac{۳ \cos \alpha}{\sin \alpha \tan \alpha} = ۳\cot^۲ \alpha$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با رسم ارتفاع مثلث داریم:



$$\tan(\hat{B}) = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \tan ۴۵^\circ = \frac{AH}{x} = ۱ \Rightarrow AH = x$$

$$\tan(\hat{C}) = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{a-x} = \sqrt{۳} \Rightarrow AH = \sqrt{۳}(a-x)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۳}(a-x) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}a}{۱+\sqrt{۳}}$$

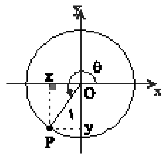
مساحت مثلث$= \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{x \times a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}a^۲}{۲(۱+\sqrt{۳})}$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

نقطه $P\left(\frac{-1}{2}\ ,\ y\right)$ در ناحیه سوم با زاویه θ قرار دارد. با توجه به شکل و رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \xrightarrow{y<0} y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3}$$

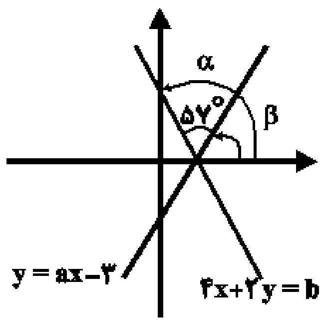
سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

شیب خط $4x + 2y = b$ برابر -2 و تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد. پس:

$$\tan\alpha = -2 \tan 117^\circ = -2 \Rightarrow \alpha = 117^\circ$$



شیب خط $y = ax - 3$ که همان a است، برابر تانژانت زاویه β است:

$$\Rightarrow \beta + 57^\circ = \alpha \Rightarrow \beta = 60^\circ \Rightarrow a = \tan\beta = \tan 60^\circ$$
$$= \sqrt{3}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}}$$

$$(1+\cos\alpha)\frac{|\sin\alpha|}{|1+\cos\alpha|}\ \underline{\underline{\text{در ناحیه چهارم}}}\ (1+\cos\alpha)\frac{(-\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)}$$

$$= -\sin\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{5}{13}$$

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1+\cot^2\alpha = \frac{169}{25}$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \cot\alpha = -\frac{12}{5} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{5}{12}$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$= (\sin^2x+\cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x = \frac{23}{32}$$

$$\sin^4x+\cos^4x = (\sin^2x)^2+(\cos^2x)^2$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2x\cos^2x = \frac{23}{32} \Rightarrow -2\sin^2x\cos^2x = \frac{-9}{32}$$

$$\Rightarrow \sin^2x\times\cos^2x = \frac{9}{64} \Rightarrow \sin x\cos x = \pm\frac{3}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه دوم}} \sin x\cos x = \frac{-3}{8}$$

$$\sin^3x+\cos^3x$$
$$= (\sin x+\cos x)^3 - 3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$$

با توجه به اینکه $\sin x\cos x = -\frac{3}{8}$ با فرض اینکه $\sin x+\cos x = A$ باشد، داریم:

$$\sin x+\cos x = A \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow 1+2\sin x\cos x = A^2 \Rightarrow 1+2\left(\frac{-3}{8}\right) = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow{135^\circ<x<180^\circ} A = \frac{-1}{2}$$

$$\sin^3x+\cos^3x = (\sin x+\cos x)^3 - 3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$$

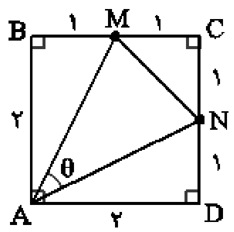
$$= \frac{-1}{8} - 3\left(\frac{-3}{8}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8} - \frac{9}{16} = \frac{-11}{16}$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABM و ADNداریم:



$$AM = AN = \sqrt{۵}$$

از طرفی داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۱}{۲} \times AM \times AN \times \sin\theta$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = S_{ABCD} - (S_{\overset{\triangle}{ABM}} + S_{\overset{\triangle}{ADN}} + S_{\overset{\triangle}{MNC}})$$

$$\Rightarrow (۴ - (۱ + ۱ + \frac{۱}{۲})) = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} \times \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{\sqrt{۲۵}}{۲}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳}{۵}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

$$y = \sqrt{۳}x + ۴ \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

با توجه به اینکه خط موردنظر با این خط زاویه ۳۰° می‌سازد، پس خط موردنظر با جهت مثبت محور xها زاویه ۳۰°یا ۹۰° دارد. در نتیجه:

معادله خط $\alpha' = ۹۰^\circ \xrightarrow{(-۱,۱)} x = -۱$

$$\alpha' = ۳۰^\circ \Rightarrow \tan\alpha' = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{(-۱,۱)} y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x + ۱) + ۱$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۱ \Rightarrow ۳y - \sqrt{۳}x - (۳ + \sqrt{۳}) = ۰$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۳

$$\tan x = ۳ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۳ \Rightarrow \sin x = ۳\cos x$$

$$\xrightarrow[\text{در عبارت اصلی}]{\text{جایگذاری}}$$

$$\frac{(۳\cos x)^۳+\cos^۳ x}{(۳\cos x)^۵+\cos^۵ x} = \frac{(۲۷+۱)\cos^۳ x}{(۲۴۳+۱)\cos^۵ x} = \frac{۲۸}{۲۴۴} \times \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱+۳^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{۲۸}{۲۴۴} \times ۱۰ = \frac{۲۸۰}{۲۴۴} = \frac{۷۰}{۶۱}$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۳

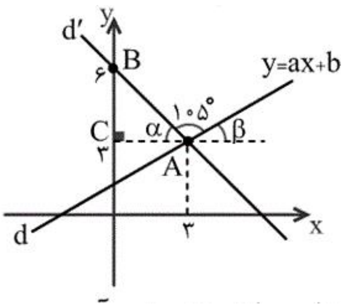
$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ a = ۴ \ \text{غ ق ق} \xrightarrow[\cot x > ۰]{\text{زیرا}} \cot x = ۲ - a > ۰ \Rightarrow a < ۲ \end{cases}$$

توجه کنید که انتهای کمان x در ناحیه ی اول دایره مثلثاتی قرار دارد و در این ناحیه نسبت های مثلثاتی مثبت هستند.

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۳} = ۱ \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \alpha = ۴۵^\circ$$

زاویه‌ای را که خط d با جهت مثبت محورxها می‌سازد به دست می‌آوریم:

$$\alpha + ۱۰۵^\circ + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha=۴۵^\circ} \beta = ۳۰^\circ$$

شیب خط d برابر است با:

$$m_d = \tan\beta = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

خط $d: y = ax+b$ از نقطه (۳ , ۳) عبور می‌کند، پس:

$$۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۳ + b \Rightarrow b = ۳ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow b(a+۱) = (۳-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۱) = ۲$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

از اتحاد مربع دوجمله‌ای و نیز اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم.

$$۴\tan^۴\alpha + ۸\tan^۲\alpha + ۴ = ۴۹$$

$$\Rightarrow ۴(\tan^۲\alpha + ۱)^۲ = ۴۹ \Rightarrow \tan^۲\alpha + ۱ = \frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۲}{۷} \Rightarrow ۷\cos^۲\alpha + ۱ = ۳$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan^۲\alpha + \cot^۲\alpha = ۱۴ \xrightarrow{+۲} \tan^۲\alpha + \cot^۲\alpha + ۲\times ۱ = ۱۶$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha\cot\alpha = ۱} \tan^۲\alpha + \cot^۲\alpha + ۲\tan\alpha\cot\alpha = ۱۶$$

$$\Rightarrow (\tan\alpha + \cot\alpha)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = \pm ۴ \xrightarrow[\text{هردومنفیهستند.}\cot\alpha,]{\text{در ناحیه دوم است پس } \tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = -۴ \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -۴$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -۴ \Rightarrow \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} = -۴ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow A = \sin\alpha - \cos\alpha \Rightarrow A^۲ = \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۱ - ۲(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow A = \pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

چون در ناحیه دوم $\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی است، پس $\sin\alpha - \cos\alpha$ مثبت است، یعنی $A = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$ قابل قبول است.

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

$$A=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}=\sqrt{1+2|\sin\alpha\cos\alpha|}$$
$$\xrightarrow[\sin\alpha\cos\alpha>0]{\text{در ناحیه سوم است } \alpha}\sqrt{1+2(\sin\alpha\cos\alpha)}$$
$$=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$
$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|\underline{\underline{\sin\alpha<0,\ \cos\alpha<0}}-\sin\alpha-\cos\alpha$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

در سمت راست تساوی، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{4\sin^2x}{\cos^2x}=\sin x\left(\frac{a(1+\sin x)+b(1-\sin x)}{\underbrace{(1-\sin x)(1+\sin x)}_{1-\sin^2x=\cos^2x}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{4\sin x}{\cos^2x}=\frac{(a+b)+(a-b)\ \sin x}{\cos^2x}$$

با متحد قرار دادن صورت کسرها خواهیم داشت:

$$4\sin x=(a+b)+(a-b)\sin x\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\a-b=4\end{cases}$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۳

$$۱-\tan\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\frac{۱۰}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۱۰}$$

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow\sin^۲\alpha\cos\alpha<۰\Rightarrow\cos\alpha<۰$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha>۰}\sin\alpha<۰\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}\quad,\quad\cos\alpha=-\sqrt{\frac{۹}{۱۰}}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}\times\left(-\sqrt{\frac{۹}{۱۰}}\right)=\frac{۳}{۱۰}$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۳

$۰<\theta<۴۵^\circ:\ \sin\theta<\cos\theta\Rightarrow\tan\theta<\cot\theta$

$۴۵^\circ<\theta<۹۰^\circ:\ \sin\theta>\cos\theta\Rightarrow\tan\theta>\cot\theta$

$۹۰^\circ<\theta<۱۳۵^\circ:\ \sin\theta>|\cos\theta|\Rightarrow\tan\theta<\cot\theta$

$۱۳۵^\circ<\theta<۱۸۰^\circ:\ \sin\theta<|\cos\theta|\Rightarrow\tan\theta>\cot\theta$

$۱۸۰^\circ<\theta<۲۲۵^\circ:\ |\sin\theta|<|\cos\theta|\Rightarrow\tan\theta<\cot\theta$

$۲۲۵^\circ<\theta<۲۷۰^\circ:\ |\sin\theta|>|\cos\theta|\Rightarrow\tan\theta>\cot\theta$

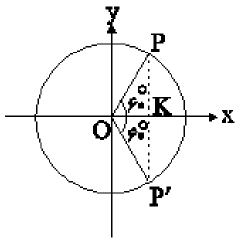
$۲۷۰^\circ<\theta<۳۱۵^\circ:\ |\sin\theta|>\cos\theta\Rightarrow\tan\theta<\cot\theta$

$۳۱۵^\circ<\theta<۳۶۰^\circ:\ |\sin\theta|<\cos\theta\Rightarrow\tan\theta>\cot\theta$

با توجه به مطالب بالا گزینه «۳» صحیح است.

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l} OP = OP' \\ K\hat{O}P = K\hat{O}P' = 60^\circ \\ O\hat{P}K = O\hat{P}'K = 30^\circ \end{array}\right\} \overset{\triangle}{KOP} \cong \overset{\triangle}{KOP'} \Rightarrow OK$$

$= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos 60^\circ = \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos\alpha \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 2\cos\alpha \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2\cos\alpha - 1 \leq 1 \Rightarrow m + 2$
$= 1 \Rightarrow m = -1$

$n - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{2} \Rightarrow m + n = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

سوال ۳۱

پاسخ: گزینه ۱

مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به‌صورت $P(\cos\theta, \sin\theta)$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos\theta = -x^2 \end{cases} \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$

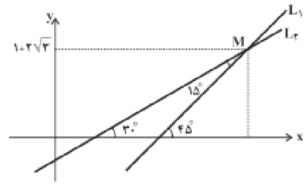
با توجه به این‌که $\cos\theta = -x^2$ است و $-x^2$ یک عبارت نامثبت است، پس $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ است. در نتیجه:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\tan\theta}{\sqrt{2} + \tan\theta} = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2$

سوال ۳۲

پاسخ: گزینه ۲



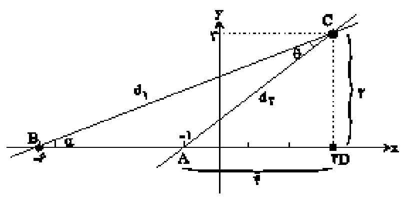
شیب خط L_1 برابر یک است، بنابراین با قسمت مثبت محور x ها زاویه ۴۵° می سازد، حال نقطه M روی هر دو خط L_1 و L_2 قرار دارد، عرض آن برابر $۱+۲\sqrt{۳}$ و طول آن برابر $۱+۲\sqrt{۳}+۵ = ۶+۲\sqrt{۳}$ است. از طرفی با توجه به شکل بالا، زاویه خط L_2 با قسمت مثبت محور x ها , ۳۰° است، بنابراین شیب آن برابر است با $\tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$. حال با استفاده از شیب خط و مختصات نقطه M برای معادله خط L_2 داریم:

$$y - (۱+۲\sqrt{۳}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(x - ۶ - ۲\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow L_2 : y = \frac{x}{\sqrt{۳}} - ۱ \Rightarrow x - \sqrt{۳}y = \sqrt{۳}$$

سوال ۳۳

پاسخ: گزینه ۲



$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۱۶+۹ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$$

$$AB = |-۶-(-۱)| = ۵$$

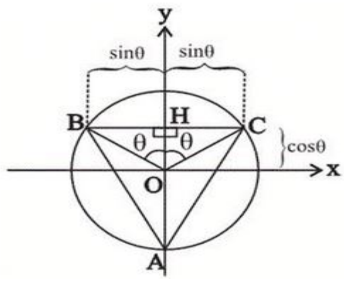
$AB = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \theta = \alpha \Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha$$

شیب خط d_1 برابر با $\tan\alpha$ است، پس $\tan\theta$ نیز برابر با شیب خط d_1 است.

سوال ۳۴

پاسخ: گزینه ۲



$$OH = OC \times \cos\theta = ۱ \times \cos\theta = \cos\theta$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(OH \times BC)}{\frac{۱}{۲}(AH \times BC)} = \frac{OH}{AH} = \frac{OH}{OA+OH} = \frac{\cos\theta}{۱+\cos\theta}$$

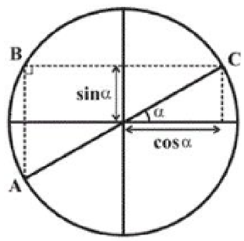
سوال ۳۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اضلاع مثلث ABC را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه a می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = ۲\cos a \\ BA = ۲\sin a \end{cases}$$



$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{BC \times BA}{۲} \Rightarrow \frac{۷}{۹} = \frac{۲\cos a ۲\sin a}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sin a\cos a = \frac{۷}{۹}$$

در نتیجه مختصات نقطه A به صورت زیر است:

$$A = (\cos(\pi + a), \sin(\pi + a)) = (-\cos a, -\sin a)$$

مجموع طول و عرض نقطه A $= -\sin a - \cos a = -(\sin a + \cos a)$

حال با کمک اتحادها داریم:

$$(\sin a + \cos a)^۲ = \underbrace{\sin^۲ a + \cos^۲ a}_{۱}$$

$$+\underbrace{۲\sin a\cos a}_{\frac{۷}{۹}} = \frac{۱۶}{۹}$$

$$\xrightarrow[\cos a > ۰]{\sin a > ۰} \sin a + \cos a = \frac{۴}{۳}$$

$\Rightarrow$ مجموع طول و عرض نقطه A $= -(\sin a + \cos a) = \frac{-۴}{۳}$

سوال ۳۶

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin x - \cos x = m$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} - ۲\sin x \cos x = m^۲$$

$$\Rightarrow ۱ - ۲\sin x\cos x = m^۲ \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱-m^۲}{۲}$$

$$\sqrt{\tan x + \cot x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos x \sin x}}$$

$$= \sqrt{\frac{۱}{\frac{۱-m^۲}{۲}}} = \sqrt{\frac{۲}{۱-m^۲}}$$

سوال ۳۷

پاسخ: گزینه ۱

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱+\tan x}{۱+\cot x} = \frac{۱+\tan x}{۱+\frac{۱}{\tan x}} = \frac{\frac{۱+\tan x}{۱}}{\frac{۱+\tan x}{\tan x}} = \tan x = \sqrt{۳}$$

داریم:

$$\frac{\cos x - ۲\sin x}{\sin x + ۲\cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{۲\cos x}{\cos x}} = \frac{۱-۲\tan x}{\tan x + ۲}$$

$$= \frac{۱-۲(\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}+۲}$$

سوال ۳۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به رابطه داده شده، داریم:

$$\tan x+\cot x=\frac{5}{2}$$

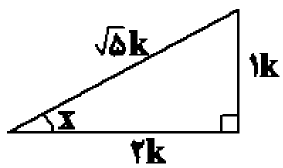
$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{5}{2}\xrightarrow{\times 2\tan x}2\tan^2 x+2=5\tan x$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x-5\tan x+2=0\Rightarrow(2\tan x-1)(\tan x-2)=0$$

$$\begin{cases}\tan x=\frac{1}{2}\\ \tan x=2\end{cases}\xrightarrow{\text{شرط سوال } \tan x<1}$$

اگر $\tan x=\frac{1}{2}$ با توجه به مثلث قائم‌الزاویه می‌توان $\sin x$ را به‌دست آورد.

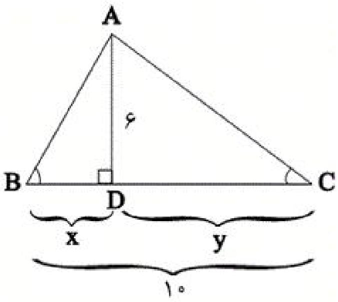
$\tan x=\frac{1}{2}\Rightarrow$



$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

سوال ۳۹

پاسخ: گزینه ۲



$\tan\hat{B} = \frac{۶}{x}$

$\tan\hat{C} = \frac{۶}{y} \Rightarrow \frac{۶}{x} = ۲ \times \frac{۶}{y} \Rightarrow y = ۲x$

$x + y = ۱۰ \xrightarrow{y=۲x} x + ۲x = ۱۰ \Rightarrow ۳x = ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳}, y = \frac{۲۰}{۳}$

اگر رابطه فیثاغورس را در مثلث ADC به‌کار ببریم:

$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۶^۲ + (\frac{۲۰}{۳})^۲ = ۳۶ + \frac{۴۰۰}{۹}$

$\Rightarrow AC^۲ = \frac{۷۲۴}{۹} \simeq ۸۰/۴$

$\Rightarrow AC \simeq \sqrt{۸۰/۴} \simeq ۹$

سوال ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

$\frac{\sin\alpha + ۲\cos\alpha}{۳\sin\alpha - \cos\alpha} = ۳ \Rightarrow \sin\alpha + ۲\cos\alpha = ۹\sin\alpha - ۳\cos\alpha$

$\Rightarrow -۸\sin\alpha = -۵\cos\alpha \xrightarrow{\div \cos\alpha} ۸\tan\alpha = ۵$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{۵}{۸} = m$

$y = mx + \frac{۷}{۸} \Rightarrow y = \frac{۵}{۸}x + \frac{۷}{۸}$

$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۵}} y = \frac{\cancel{۵}}{۸}(\frac{۳}{\cancel{۵}}) + \frac{۷}{۸} = \frac{۱۰}{۸} = ۱/۲۵ = k$

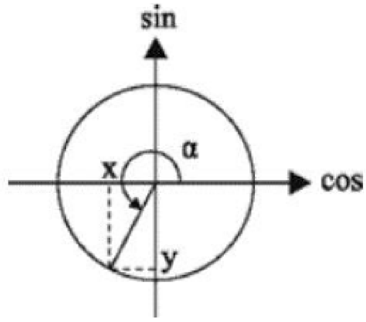
سوال ۴۱

پاسخ: گزینه ۱

زاویه α در ناحیه سوم قرار دارد و ضلع انتهایی آن دایره مثلثاتی را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند. بنابراین طبق رابطه فیثاغورس عرض نقطه برابر است با:

$$\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+y^{۲}=۱^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}+y^{۲}=۱ \Rightarrow y^{۲}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

$$\xrightarrow[y<۰]{\text{در ناحیه سوم } \alpha} \alpha y=-\sqrt{\frac{۱۵}{۱۶}}=-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$



$$\sin\alpha=y=-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴} \quad , \quad \cos\alpha=x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}}{-\frac{۱}{۴}}=\sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۱۵}+۸\times\left(-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\right)}{-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۵}-۲\sqrt{۱۵}}{-\frac{۱}{۴}}$$

$$=\frac{-\sqrt{۱۵}}{-\frac{۱}{۴}}=۴\sqrt{۱۵}$$

سوال ۴۲

پاسخ: **گزینه ۲**

$d_۱ : y = x + ۳ \Rightarrow d_۱$ شیب خط $= \tan\alpha = ۱$

$\xrightarrow{\alpha\ \text{حاده است.}} \alpha = ۴۵^\circ$

$\xrightarrow[\text{xهامیسازد}]{\text{زاویه ای که } d_۲ \text{ با جهت مثبت محور}} ۱۵^\circ + \alpha = ۱۵^\circ + ۴۵^\circ = ۶۰^\circ$

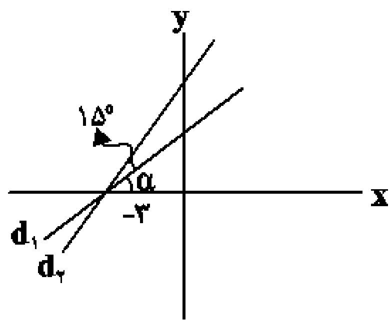
$d_۲$ شیب خط $= \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{m}{۳} \Rightarrow m = ۳\sqrt{۳}$

$\Rightarrow d_۲ : ۳y = ۳\sqrt{۳}x + h$

$\xrightarrow{\text{محل برخورد دو خط } d_۲, d_۱}$ محل برخورد خط $d_۱$ با محور xها: $(-۳, ۰)$

$\xrightarrow{\text{جاگذاری در } d_۲} ۰ = ۳\sqrt{۳} \times (-۳) + h \Rightarrow h = ۹\sqrt{۳}$

$\Rightarrow m \times h = ۳\sqrt{۳} \times ۹\sqrt{۳} = ۸۱$



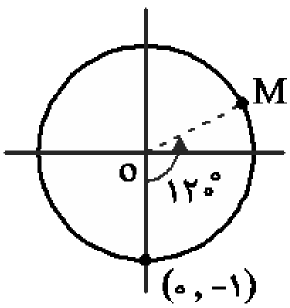
سوال ۴۳

پاسخ: **گزینه ۱**

نقطه $(۰, -۱)$ روی دایره مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه M در ناحیه اول می‌رسیم.

OM با محور طول‌ها، زاویه ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M = \cos\theta \Rightarrow x_M = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M = \sin\theta \Rightarrow y_M = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$



لذا $M\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$.

سوال ۴۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

زاویه مورد نظر را x در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\cos x = \frac{۱}{۲}\tan x \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x = \sin x \Rightarrow ۲\left(۱-\sin^۲ x\right) = \sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۲ = ۰ \xrightarrow{\sin x = t} ۲t^۲ + t - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{-۱\pm\sqrt{۱+۱۶}}{۴} \xrightarrow{-۱\leq t\leq ۱} t = \sin x = \frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۴}$$

سوال ۴۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\frac{۳+\cos^۲\alpha}{۲-\sin\alpha} - \frac{۳+\sin^۲\alpha}{۲+\cos\alpha} = \frac{۴-\sin^۲\alpha}{۲-\sin\alpha} - \frac{۴-\cos^۲\alpha}{۲+\cos\alpha}$$

$$= (۲+\sin\alpha) - (۲-\cos\alpha) \Rightarrow A = \sin\alpha + \cos\alpha$$

از طرفی داریم: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲ = \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha + ۲\sin\alpha\cos\alpha$

بنابراین:

$$\Rightarrow A^۲ = ۱+۲\left(\frac{۹}{۳۲}\right) \Rightarrow A^۲ = ۱+\frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\xrightarrow[\text{مقادیر } \sin\alpha \text{ و } \cos\alpha \text{ مثبت هستند}]{۰<\alpha<۹۰^\circ} A = \frac{۵}{۴}$$

سوال ۴۶

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \tan\alpha + \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

باید $\sin\alpha\cos\alpha$ را بیابیم، با استفاده از تساوی داده شده و به‌توان ۲ رساندن طرفین رابطه داریم:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱} + ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱ + ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{۳}{۸}$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$A = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} \xrightarrow{\sin\alpha\cos\alpha = \frac{-۳}{۸}} A = -\frac{۸}{۳}$$

سوال ۴۷

پاسخ: گزینه ۴

$$S_{\overset{\triangle}{AB\,P}}=\frac{۱}{۲}AB\times BP\sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}AB\times AP\sin \hat{A}_۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}BP=AP\sin \hat{A}_۱ \quad (۱)$$

$$S_{\overset{\triangle}{AP\,C}}=\frac{۱}{۲}AC\times CP\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}AC\times AP\sin \hat{A}_۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}CP=AP\sin \hat{A}_۲ \quad (۲)$$

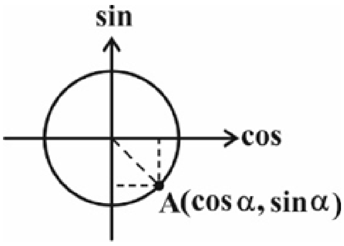
$$\xrightarrow{\text{تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲)}} \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}BP}{\frac{۱}{۲}CP}=\frac{AP\sin \hat{A}_۱}{AP\sin \hat{A}_۲}$$

$$\xrightarrow[BP=\frac{۳}{۴}CP]{۴BP=۳CP} \frac{۳}{۴}\sqrt{۳}=\frac{\sin \hat{A}_۱}{\sin \hat{A}_۲}$$

سوال ۴۸

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو مشخص است که اگر α در ناحیه چهارم باشد طول آن یعنی $\cos\alpha$ مثبت و عرض آن یعنی $\sin\alpha$ منفی است.



$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+۴=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha$$
$$=\frac{۱}{۵}$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha>۰]{\alpha\ \text{در ناحیه چهارم}} \cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow -۲=\frac{\sin\alpha}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{-۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

سوال ۴۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای محاسبه مختصات نقطه A که عرض آن ۱ است از خط $y = -۲x + ۷$ استفاده می‌کنیم.

$$y = -۲x + ۷ \xrightarrow{y=۱} -۲x + ۷ = ۱ \Rightarrow -۲x = -۶ \Rightarrow x = ۳$$

$$\Rightarrow A(۳,۱)$$

$$۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۳۰^\circ \Rightarrow L \text{ شیب خط } = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = m$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - ۳) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \sqrt{۳} + ۱$$

پس عرض از مبدأ خط L برابر $۱ - \sqrt{۳}$ می‌باشد.

سوال ۵۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$-۱ \le \cos x \le ۱ \Rightarrow -۲ \le -۲\cos x \le ۲ \Rightarrow ۱ \le ۳ - ۲\cos x \le ۵ \Rightarrow ۱ \le A \le ۵$$

$$-۱ \le \sin y \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \sin^۲ y \le ۱ \Rightarrow ۰ \le ۳\sin^۲ y \le ۳$$

$$\Rightarrow ۲ \le ۲ + ۳\sin^۲ y \le ۵ \Rightarrow ۲ \le B \le ۵$$

حداکثر عبارت A برابر با ۵ و حداقل عبارت B برابر با ۲ است، پس خواسته سوال $۵ + ۲ = ۷$ است.

سوال ۵۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\frac{\tan^۴ x - \sin^۴ x}{\sin^۴ x - ۳\sin^۲ x + ۲} = \frac{(\tan^۴ x)\left(۱ - \frac{\sin^۴ x}{\tan^۴ x}\right)}{(\sin^۲ x - ۱)(\sin^۲ x - ۲)}$$

$$= \frac{(\tan^۴ x)(۱ - \cos^۴ x)}{(\sin^۲ x - ۱)(\sin^۲ x - ۲)} = \frac{(\tan^۴ x)(۱ - \cos^۲ x)(۱ + \cos^۲ x)}{-(۱ - \sin^۲ x)(۱ - \cos^۲ x - ۲)}$$

$$= \frac{(\tan^۴ x)(\sin^۲ x)(۱ + \cos^۲ x)}{-(\cos^۲ x)(-(۱ + \cos^۲ x))} = \tan^۴ x . \tan^۲ x = \tan^۶ x$$

سوال ۵۲

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اتحاد مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

در نتیجه:

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})^3$$
$$-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})$$

$$\Rightarrow \sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3(\sin\theta\cos\theta)^2\Rightarrow \frac{193}{625}=1$$
$$-3(\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow (\sin\theta\cos\theta)^2=\frac{144}{625}\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}\qquad (*)$$

از طرفی بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای، داریم:

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$\xrightarrow{(*)}(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$$

$$\xrightarrow{45^\circ<\theta<90^\circ}\sin\theta>\cos\theta\Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$$

سوال ۵۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{a}{\cos^2x}+\frac{b}{\cos^4x}=\tan^2x+\tan^4x\Rightarrow \frac{1}{\cos^2x}\left(a+\frac{b}{\cos^2x}\right)$$
$$=(1+\tan^2x)(a+b(1+\tan^2x))$$
$$=(1+\tan^2x)(a+b+b\tan^2x)$$

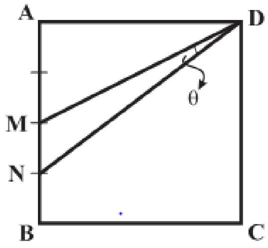
$$\Rightarrow (1+\tan^2x)(a+b+b\tan^2x)$$
$$=\tan^2x(1+\tan^2x)$$

$$\Rightarrow a+b=0\quad,\quad b=1\Rightarrow a=-1\Rightarrow a-b=-2$$

سوال ۵۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



اگر طول ضلع مربع را a در نظر بگیریم، داریم:

$$\left.\begin{matrix} AD = a \\ AM = \frac{a}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow MD = \sqrt{a^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}a$$

$$\left\{\begin{matrix} AD = a \\ AN = \frac{۳a}{۴} \end{matrix}\right. \Rightarrow ND = \sqrt{a^۲ + \left(\frac{۳a}{۴}\right)^۲} = \frac{۵}{۴}a$$

از طرفی مساحت مثلث MDN برابر است با: $\frac{۱}{۲}MN.AD = \frac{a^۲}{۸}$

از رابطه مثلثاتی مساحت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}MD.ND\sin\theta = \frac{a^۲}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}a\right)\left(\frac{۵}{۴}a\right)\sin\theta = \frac{a^۲}{۸}$$

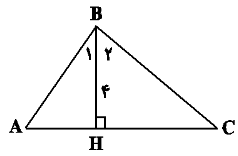
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{۵\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۲۵}$$

سوال ۵۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$\sin \hat{A} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \frac{۴}{BA} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۵}$



با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABH داریم:

$AH^۲ + HB^۲ = AB^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow AH = ۲$

حال می‌رویم سراغ رابطه $\tan \hat{B}_۱ = \sin \hat{B}_۲$:

$$\tan \hat{B}_۱ = \sin \hat{B}_۲ \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۴} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \begin{cases} HC = x \\ BC = ۲x \end{cases}$$

در مثلث BCH فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(۲x)^۲ = x^۲ + ۴^۲ \Rightarrow ۳x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

پس:

$$AC = AH + HC = ۲ + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \simeq ۲ + \frac{۴ \times ۱/۷۳}{۳}$$

$$= ۲ + \frac{۶/۹۲}{۳} \simeq ۴/۳۱$$

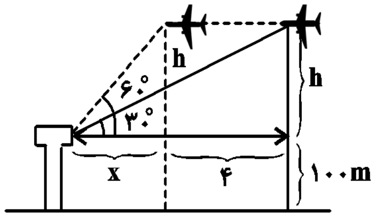
سوال ۵۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

هواپیما با سرعت $۴۰۰\frac{km}{h}$ طی ۳۶ ثانیه مسافت زیر را طی می‌کند:

$$\begin{cases} V = \frac{d}{t} \\ t = ۳۶\,s = \frac{۳۶}{۶۰}\,min = \frac{۳۶}{۶۰\times۶۰}h \end{cases} \Rightarrow d = ۴۰۰\times\frac{۳۶}{۳۶۰۰} = ۴\,km$$



$$\tan ۳۰° = \frac{h}{x+۴} \qquad (۱)$$

$$\tan ۶۰° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \sqrt{۳}x$$

$$\xrightarrow{(۱)} \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\sqrt{۳}x}{x+۴} \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow h = ۲\sqrt{۳}$$

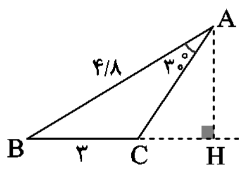
ارتفاع از سطح زمین $= h'+h = ۲\sqrt{۳}+\frac{۱۰۰}{۱۰۰۰} = ۲\sqrt{۳}+\frac{۱}{۱۰} = \frac{۲۰\sqrt{۳}+۱}{۱۰}km$

سوال ۵۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با توجه به شکل، داریم:



$$\begin{cases} S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{۱}{۲}AC\times AB\times\sin\hat{A} \\ S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{۱}{۲}AH\times BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}AH\times BC$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times۴/۸\times AC\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}AH\times۳ \Rightarrow AH = ۰/۸\,AC$$

سوال ۵۸

پاسخ: گزینه ۱

از آن‌جایی که $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$، پس:

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right)}_{2}\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} + \tan x = 0/5$$

سوال ۵۹

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3 - 3\tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$
$$= (1+\tan^2 x)^3 - 3\tan^2 x(1+\tan^2 x)$$
$$A = 1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x-3\tan^2 x - 3\tan^4 x$$
$$= 1+\tan^6 x$$

سوال ۶۰

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

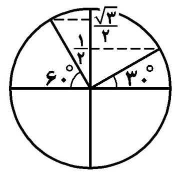
$$\Rightarrow \frac{3}{4} = 1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \pm\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{4}{\sqrt{2}} = \pm2\sqrt{2}$$

سوال ۶۱

پاسخ: گزینه ۴



بیشترین مقدار $\sin\alpha$ در این بازه $= \sin ۹۰^\circ = ۱$

$$\frac{۱}{۲} < \sin\alpha \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲m - \frac{۱}{۴} \le ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} < ۲m \le \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۸} < m \le \frac{۵}{۸}$$

$$\Rightarrow m \in (\frac{۳}{۸}, \frac{۵}{۸}]$$

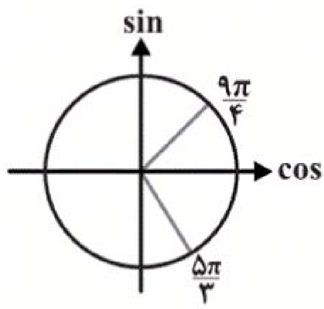
سوال ۶۲

پاسخ: گزینه ۱

با به‌دست آوردن محدوده ۲x داریم:

$$-\frac{\pi}{۱۸} < \frac{x-\pi}{۳} < \frac{\pi}{۲۴} \xrightarrow{\times ۳} -\frac{\pi}{۶} < x - \pi < \frac{\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow{+\pi} \frac{۵\pi}{۶} < x < \frac{۹\pi}{۸} \xrightarrow{\times ۲} \frac{۵\pi}{۳} < ۲x < \frac{۹\pi}{۴}$$



در این بازه، $\cos ۲x$ هریک از مقادیر بازه $(\frac{۱}{۲}, ۱]$ را می‌تواند اختیار کند. یعنی: $\frac{۱}{۲} < \cos ۲x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲m - ۱ \le ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۴} < m \le ۱$

سوال ۶۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا طرفین تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div \cos^2 x} ۲\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - ۳\frac{\sin x}{\cos x} + ۷ = \frac{۳}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow ۲\tan^2 x - ۳\tan x + ۷ = ۳(۱ + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + ۳\tan x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۱ \\ \tan x = -۴ \end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$: $۱ + (-۴) = -۳$

سوال ۶۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{۱}{\sin^2 x} = ۱ + \cot^2 x, \quad \frac{۱}{\cos^2 x} = ۱ + \tan^2 x$$

$$A = \sqrt{(۱ + \cot^2 x) + (۱ + \tan^2 x) - ۴} + \cot x$$

$$= \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - ۲} + \cot x$$

$$= \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - ۲\tan x . \cot x} + \cot x$$

$$= \sqrt{(\tan x - \cot x)^۲} + \cot x = |\tan x - \cot x| + \cot x$$

$$\xrightarrow{۴۵^\circ < x < ۹۰^\circ} A = (\tan x - \cot x) + \cot x = \tan x$$

سوال ۶۵

پاسخ: گزینه ۴

$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta \Rightarrow ۶ = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۴ \times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \theta = ۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ$$

با توجه به این که می‌خواهیم θ را کاهش دهیم، این زاویه باید برابر ۱۳۵° باشد. طول اضلاع جدید را a' و b' و زاویه بین آن‌ها را θ' می‌نامیم. داریم:

$$a' = \sqrt{۲}a = ۶$$
$$b' = b\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} \quad \theta' = ۱۳۵^\circ - ۷۵^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \text{مساحت جدید} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۶}$$

بنابراین مساحت مثلث $\sqrt{۶}$ برابر شده‌است.

سوال ۶۶

پاسخ: گزینه ۴

$$\overset{\triangle}{HBC}: H\hat{B}C = ۷۵^\circ , B\hat{H}C = ۹۰^\circ \Rightarrow H\hat{C}B = ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(H\hat{C}B) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin ۱۵^\circ = \frac{HB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲BC} \Rightarrow BC = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \times \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۳}+۱$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \tan(A\hat{C}B) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{AB}{\sqrt{۳}+۱} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{AB}{\sqrt{۳}+۱}$$

$$\Rightarrow AB = ۳+\sqrt{۳}$$

سوال ۶۷

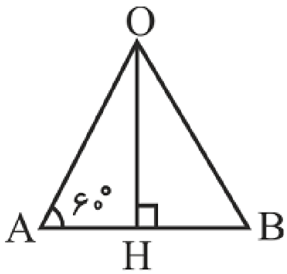
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به شکل، شش ضلعی منتظم به ۶ مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم شده است که مجموع مساحت ۲ تا از آن‌ها برابر $۱۸\sqrt{۳}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{OAB} = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times OH \times AB = ۹\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{AB=OA} OH \times OA = ۱۸\sqrt{۳}$$

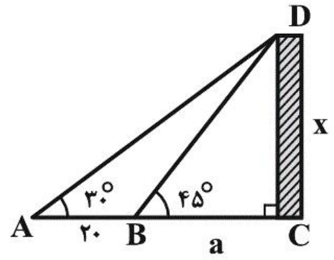


$$\xrightarrow{OA=\frac{OH}{\sin ۶۰^\circ}} OH \times \frac{OH}{\sin ۶۰^\circ} = ۱۸\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow OH^۲ = ۱۸\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow OH^۲ = ۲۷ \Rightarrow OH = ۳\sqrt{۳}$$

سوال ۶۸

پاسخ: گزینه ۱



$\overset{\Delta}{ADC}: \tan ۳۰^\circ = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{x}{۲۰+a}$ (۱)

$\overset{\Delta}{BDC}: \frac{CD}{BC} = \tan ۴۵^\circ \Rightarrow ۱ = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a$ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{x}{۲۰+x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۲۰+x}{x} = \sqrt{۳} \Rightarrow ۱ + \frac{۲۰}{x} = \sqrt{۳}$

$\Rightarrow x = \frac{۲۰}{\sqrt{۳}-۱} \times \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = ۱۰(\sqrt{۳}+۱)$

سوال ۶۹

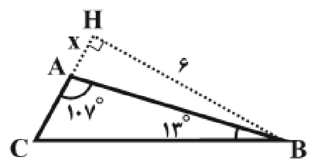
پاسخ: گزینه ۳

$\hat{C} = ۶۰^\circ \ , \ \overset{\Delta}{HBC}: \tan ۶۰^\circ = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۶}{CH}$

$\Rightarrow CH = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۳} - x$

$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(AC)(BH) \Rightarrow ۹x = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳} - x)(۶)$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AC = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$



$\overset{\Delta}{HBC}: \sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = ۴\sqrt{۳}$

$\overset{\Delta}{BHA}: (AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲ \Rightarrow (AB)^۲ = \frac{۳}{۴} + ۳۶ = \frac{۴۹}{۴}(۳)$

$\Rightarrow AB = \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$

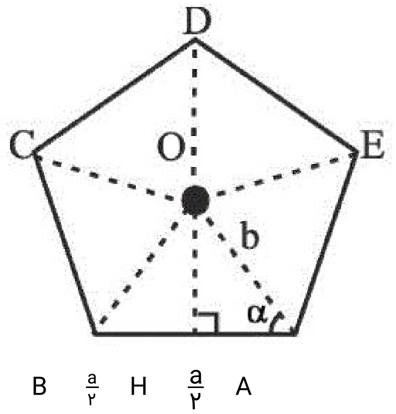
محیط $ABC = AC + BC + AB = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} + ۴\sqrt{۳} + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} = ۹\sqrt{۳}$

سوال ۷۰

پاسخ: گزینه ۴

$A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$

$A\hat{O}H = \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$



$\alpha = ۹۰^\circ - ۳۶^\circ = ۵۴^\circ$

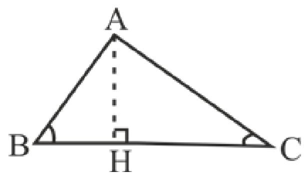
$\cos ۵۴^\circ = \frac{\frac{a}{۲}}{b} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۰/۶b \Rightarrow b = \frac{a}{۱/۲}$

مساحت مثلث AOB $= \frac{۱}{۲}ab\sin ۵۴^\circ = \frac{۱}{۲}a \times \frac{a}{۱/۲} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{a^۲}{۳}$

مساحت پنج ضلعی منتظم = ۵ × AOB مساحت مثلث $= \frac{۵}{۳}a^۲$

سوال ۷۱

پاسخ: گزینه ۲



$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{AH}{۳۰} \Rightarrow AH = ۲۰$

$\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow AC = ۵x \,,\; CH = ۳x$

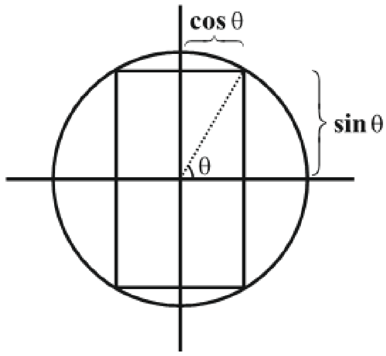
فیثاغورس در مثلث AHC :

$AC^۲ = CH^۲ + AH^۲ \Rightarrow (۵x)^۲ = (۳x)^۲ + ۲۰^۲$

$\Rightarrow ۱۶x^۲ = ۲۰^۲ \Rightarrow ۴x = ۲۰ \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow AC = ۵ \times ۵ = ۲۵$

سوال ۷۲

پاسخ: گزینه ۴



مساحت: $S = (۲\sin\theta)(۲\cos\theta) = ۴\sin\theta\cos\theta$

محیط: $P = ۴(\sin\theta + \cos\theta)$

$$\Rightarrow P = ۴\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^۲}$$

$$= ۴\sqrt{\underbrace{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}_{۱} + \underbrace{۲\sin\theta\cos\theta}_{\frac{S}{۲}}}$$

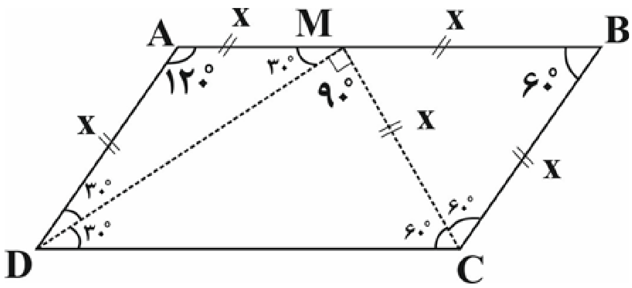
$$\Rightarrow P = ۴\sqrt{۱+\frac{S}{۲}}$$

$$S = ۱ \Rightarrow P = ۴\sqrt{۱+\frac{۱}{۲}} = ۴\sqrt{\frac{۳}{۲}} = ۲\sqrt{۶}$$

سوال ۷۳

پاسخ: گزینه ۳

در متوازی الاضلاع، اضلاع روبه‌رو موازی و مساوی‌اند، همچنین زوایای روبه‌رو با هم برابر و زوایای مجاور مکمل‌اند:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AB = ۲AD \xrightarrow[AD=x]{AB=DC} DC = ۲x$$

$$\widehat{B} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۱۲۰^\circ, \widehat{D} = ۶۰, \widehat{C} = ۱۲۰^\circ$$

با توجه به ابعاد و اندازه‌های مشخص شده روی شکل کاملاً روشن است که مثلث MBC متساوی‌الاضلاع است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times MB \times BC \times \sin\widehat{B} = \frac{۱}{۲} \times x \times x \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \xrightarrow{S=۳\sqrt{۳}} \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = ۳\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{x>۰} x = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow AD = MC = ۲\sqrt{۳}, DC = ۴\sqrt{۳}$$

در مثلث قائم الزاویه CMD : $MD^۲ = DC^۲ - MC^۲$

$$= (۴\sqrt{۳})^۲ - (۲\sqrt{۳})^۲ = ۴۸ - ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow MD = ۶$$

سوال ۷۴

پاسخ: گزینه ۴

ضرب $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ تأثیری در حاصل ندارد.

$$(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha) \xrightarrow{\times(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}$$

$$(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\times \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\frac{(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

$$\frac{(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

سوال ۷۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با استفاده از اتحاد مجموع مکعبات دو جمله داریم:

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{1 - \sin x \cos x}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x = \frac{1}{2}$$

طرفین عبارت بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

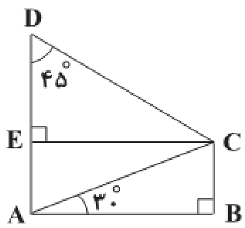
$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{3}{8}$$

سوال ۷۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

برای محاسبه فاصله طبقه دوم از سطح زمین کافی است در شکل زیر طول AD را به دست آوریم. با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی داریم:



$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB} \xrightarrow[AB=4]{BC=AE} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AE}{4}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{EC}{ED} \xrightarrow{EC=4} 1 = \frac{4}{ED} \Rightarrow ED = 4$$

$$AD = AE + ED = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

سوال ۷۷

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos^2\theta)} - \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} - \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)} - \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)} = 0$$

سوال ۷۸

پاسخ: گزینه ۳

$$3x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = -3x + 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

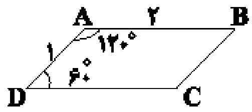
$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{3}{2} \xrightarrow{1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}} 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{13} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan\theta < 0 \Rightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{-2\sqrt{13}}{13}$$

سوال ۷۹

پاسخ: گزینه ۴



با به کار بردن قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^{۲} = ۱^{۲} + ۲^{۲} - ۲ \times ۱ \times ۲ \cos ۱۲۰^{\circ} = ۱ + ۴ + ۲$$
$$= ۷$$

با به‌کار بردن قضیه کسینوس‌ها در مثلث ACD، داریم:

$$AC^{۲} = ۱^{۲} + ۲^{۲} - ۲ \times ۱ \times ۲ \cos ۶۰^{\circ} = ۱ + ۴ - ۲ = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{BD^{۲}}{AC^{۲}} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

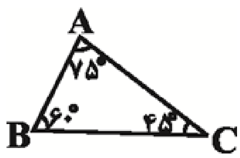
سوال ۸۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\widehat{A} = ۷۵^{\circ} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^{\circ} - \widehat{A} = ۱۰۵^{\circ}$$

$$\xrightarrow{\frac{\widehat{B}}{۴} = \frac{\widehat{C}}{۳}} \begin{cases} \widehat{B} = ۶۰^{\circ} \\ \widehat{C} = ۴۵^{\circ} \end{cases}$$

$$\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow AB = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B}} AC$$



پس جواب سوال برابر $\frac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B}}$ است، یعنی:

$$\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

سوال ۸۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{۲}{\sin x} + \frac{۳}{\cos x} = ۰ \Rightarrow \frac{۲}{\sin x} = -\frac{۳}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan$$
$$x = -\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \cot x = \frac{۱}{\tan x} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \tan x - \cot x = -\frac{۲}{۳}$$
$$-(-\frac{۳}{۲})$$

$$= -۲۳ + ۳۲ = ۵$$

سوال ۸۲

پاسخ: گزینه ۱

اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

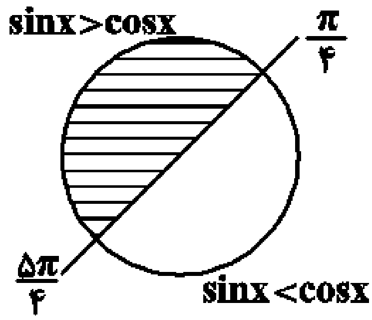
(*) انتهای کمان x در ناحیه اول یا چهارم است. $\cos x \geq ۰ \Rightarrow$

از طرفی: $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \sin x - \cos x$

چون طرف چپ نامنفی است، پس باید طرف راست هم نامنفی باشد، در نتیجه:

$$\sin x - \cos x \geq ۰ \Rightarrow \sin x \geq \cos x$$

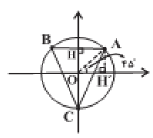
با توجه به نکته مقابل و حالت (*) داریم:



انتهای کمان در ناحیه اول است.⇒

سوال ۸۳

پاسخ: گزینه ۳



می‌دانیم که شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است، پس $OC = ۱$. از طرف دیگر:

$$\overset{\Delta}{OAH'} : \sin ۴۵^\circ = \frac{AH'}{OA} = \frac{AH'}{۱} = AH'$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = OH$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{OH'}{OA} = OH' \Rightarrow OH' = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = AH$$

بنابراین، چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، $AB = ۲AH = \sqrt{۲}$. در نتیجه:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times CH = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱)$$
$$= \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۲})$$

$$= \frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$$

سوال ۸۴

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از قانون سینوس‌ها در صورت و قانون کسینوس‌ها در مخرج می‌توان نوشت:

$$\frac{b\sin\widehat{C}}{a-b\cos\widehat{C}} = \frac{c\sin\widehat{B}}{a-b\left(\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}\right)} = \frac{\sin\widehat{B}}{\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}}$$

$$= \frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}} = \tan\widehat{B}$$

سوال ۸۵

پاسخ: گزینه ۳

$$A = (\underbrace{\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha}_{1} + \cos^{2}\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha(1+\cos^{2}\alpha)}\right)$$

$$= (1+\cos^{2}\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha(1+\cos^{2}\alpha)}\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan$$

α