نام و نام خانوادگی:

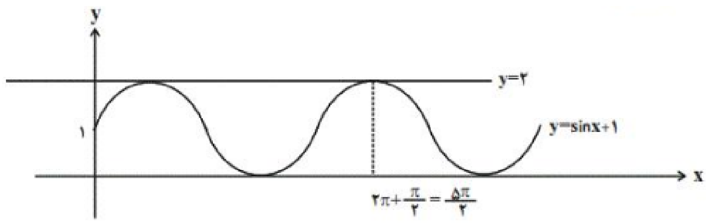
نام آزمون: **پاسخ A1 مثلثات دوازدهم**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) + ۱ = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) + ۱ = \sin x + ۱$$

حال برای رسم نمودار تابع $y = \sin x + ۱$، $y = \sin x$ را یک واحد به بالا می بریم:



مقدار تقریبی $\frac{۵\pi}{۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۵\pi}{۲} \simeq \frac{۵ \times ۳/۱۴}{۲} \simeq ۷/۸۵$$

پس حداقل مقدار طبیعیk، برابر با ۸ است.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

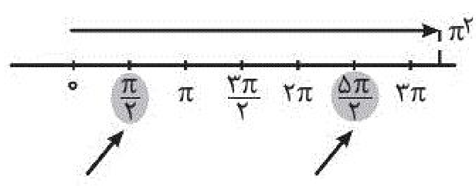
گزینهٔ «۳»

می‌دانیم ماکزیمم عبارت $y = \sin x^۲$ وقتی است که$\sin x^۲ = ۱$ باشد.

اگر$۰ \le x \le \pi$ باشد، آنگاه $۰ \le x^۲ \le \pi^۲$ خواهد بود.

روی دایرهٔ مثلثاتی وقتی زاویه از صفر تا $\pi^۲$ تغییر می‌کند مقدار سینوس ۲ بار برابر ۱ می‌شود.

به‌طور دقیق‌تر روی محور زیر مشاهده می‌کنید.



$$\sin(\frac{\pi}{۲}) = ۱ \qquad \sin(\frac{۵\pi}{۲}) = ۱$$

درنتیجه به‌ازای $x = \sqrt{\frac{\pi}{۲}} , \sqrt{\frac{۵\pi}{۲}}$، عبارت $y = \sin x^۲$ به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

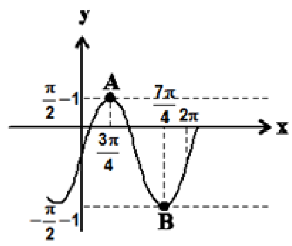
نمودار تابع $f(x)$ را با انجام مراحل زیر می‌توانیم از تابع $y = \sin x$ به دست آوریم:

انتقال $\frac{\pi}{۴}$ واحد به سمت راست

- ضرب عرض نقاط تابع در $\frac{\pi}{۲}$

- انتقال یک واحد به سمت پایین

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



با توجه به نمودار برای نقاط A و B داریم:

$$A = \left(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲} - ۱\right), B = \left(\frac{۷\pi}{۴}, -\frac{\pi}{۲} - ۱\right)$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{\left(\frac{۷\pi}{۴} - \frac{۳\pi}{۴}\right)^۲ + \left(-\frac{\pi}{۲} - ۱ - \frac{\pi}{۲} + ۱\right)^۲}$$

$$= \sqrt{\pi^۲ + \pi^۲} = \sqrt{۲\pi^۲} = \sqrt{۲}\pi$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

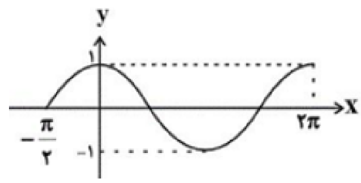
$$f(x)=\sin(x-\frac{3\pi}{4})-2\cos(\frac{7\pi}{4}+x)$$

$$\Rightarrow f(x)=-\sin(\frac{3\pi}{4}-x)-2\cos(\frac{7\pi}{4}+x)$$

$$\Rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi}{2}-(x-\frac{\pi}{4}))-2\cos(2\pi+(x-\frac{\pi}{4}))$$

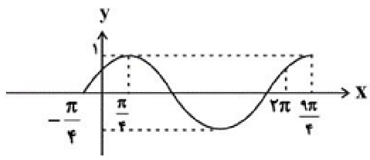
$$\Rightarrow f(x)=-\cos(x-\frac{\pi}{4})-2\cos(x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow f(x)=-3\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

حال تابع f را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



به راست $\frac{\pi}{4}$

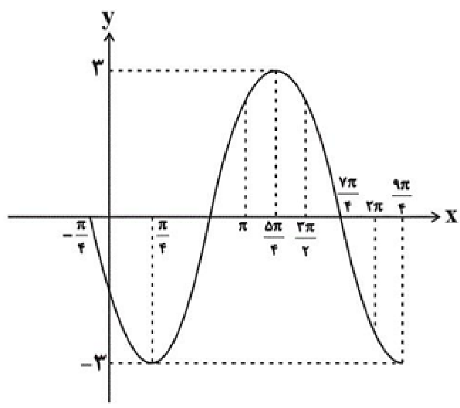
$y=\cos x$



ر راستای محورxها،

رابروقرینهمیشود۳

$y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$



$y=-3\cos(x-\frac{\pi}{4})$

با توجه به نمودار گزینه های (۱) و (۳) درست است.

همچنین بیشترین مقدار تابع ۳ و کم‌ترین مقدار آن ۳- است که اختلافشان ۶ می‌شود. پس گزینه (۲) نیز درست است.

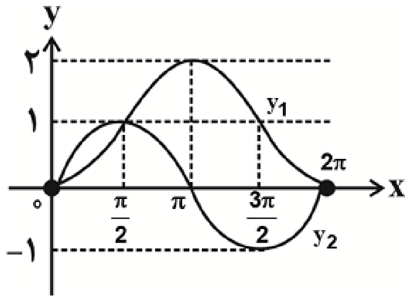
اگر خط ۱-=y را رسم کنیم، نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند، پس گزینه (۴) نادرست است.

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

$y_1 = 1 - \sin(\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow y_1 = 1 - \cos x$

$y_2 = -\cos \underbrace{(\frac{3\pi}{2} - x)}_{\text{ناحیه سوم}} = \sin x$



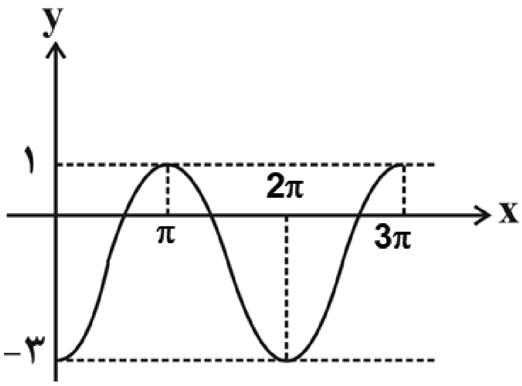
بنابراین در بازه $(0, 2\pi)$ دو تابع همدیگر را فقط در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ قطع می‌کنند.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم و بعد نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$y = \underbrace{2\cos(\pi + x)}_{-\cos x} - 1 \Rightarrow y = -2\cos x - 1$



اگر خط $y = k$ نمودار فوق را در ۳ نقطه قطع کند، باید $-3 < k < 1$ باشد. پس k، سه مقدار صحیح ۲- و ۱- و صفر را می‌تواند داشته باشد.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

$$\alpha + \beta = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{۳\pi}{۲} - \alpha \Rightarrow \cos\beta = \cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)$$
$$= -\sin\alpha$$

$$\Rightarrow A = ۷\sin\alpha + ۲(-\sin\alpha) - ۲ = ۵\sin\alpha - ۲$$

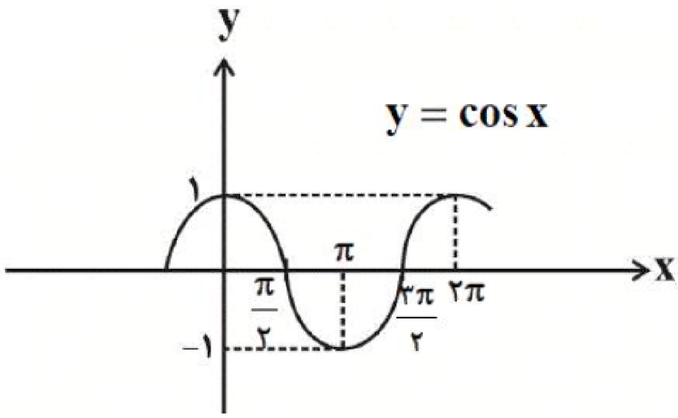
$$-۱ \leq \sin\alpha \leq ۱ \Rightarrow -۵ \leq ۵\sin\alpha \leq ۵$$

$$\Rightarrow -۷ \leq ۵\sin\alpha - ۲ \leq ۳ \Rightarrow -۷ \leq A \leq ۳$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار A برابر ۳ است.

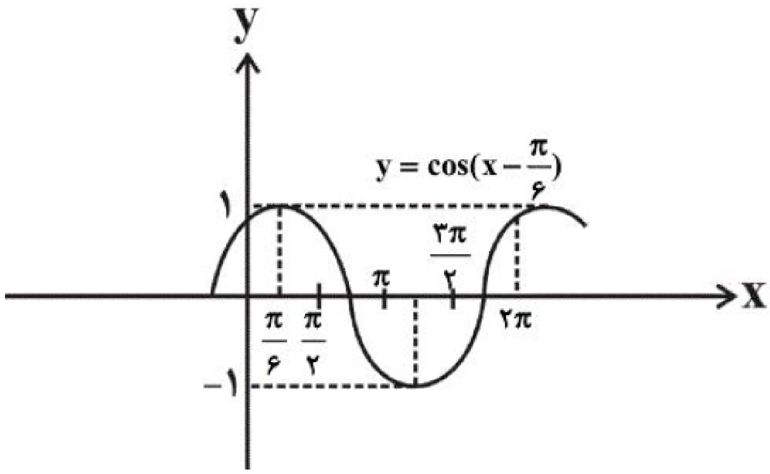
سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲



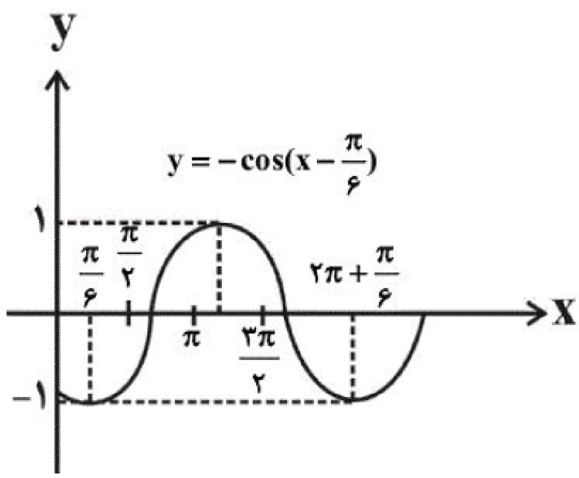
$\frac{\pi}{۶}$ واحد

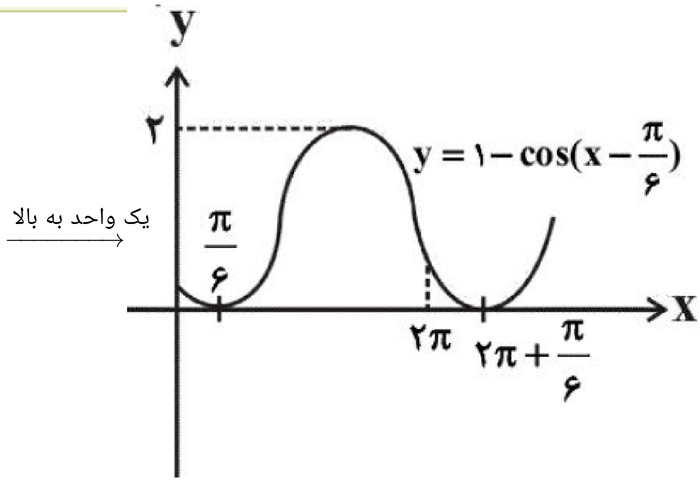
مت راست



قرینه نسبت

بهمحورxها

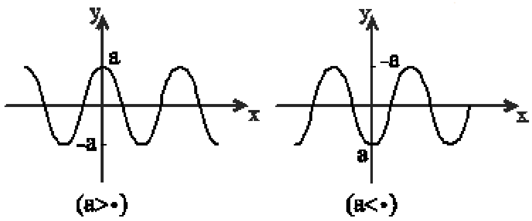




سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع $y = a\cos x$ با توجه به مقادیر a به یکی از دو صورت زیر است:



تابع در بازه $(۰ \,,\, \frac{\pi}{۲})$ افزایشی است، پس $a < ۰$ است. از طرفی حداکثر مقدار تابع $y = a\cos x$، $|a|$ و حداقل آن $-|a|$ است، پس در تابع $y = a\cos x + b$ خواهیم داشت:

$$\text{اختلاف حداکثر و حداقل} = \underbrace{(|a| + b)}_{\text{حداکثر}} - \underbrace{(-|a| + b)}_{\text{حداقل}} = ۲|a| = ۶$$

$$|a| = ۳ \xrightarrow{a<۰} -a = ۳ \Rightarrow a = -۳$$

بنابراین $f(x) = -۳\cos x + b$، از طرفی $f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$، پس:

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{۳} \,,\, \frac{۱}{۲}) \in f} \frac{۱}{۲} = -۳ \times \frac{۱}{۲} + b \Rightarrow b = ۲$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

طرفین تساوی باید هم‌علامت باشند، پس باید $\sin \pi x > ۰$ باشد، یعنی πx در ربع اول یا دوم قرار می‌گیرد.

حال چون طرفین مثبت هستند، آن‌ها را به توان ۲ می‌رسانیم، داریم:

$$۸\sin^۲ \pi x \cos^۲ \pi x = ۱ \Rightarrow ۲\sin^۲ ۲\pi x = ۱ \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ ۲\pi x = \cos ۴\pi x = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\pi x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k+۱}{۸}$$

اما دقت کنید همه مقادیر $k \in Z$ قابل قبول نیستند؛ بلکه آنهایی قابل قبول‌اند که πx در ربع های اول و دوم قرار بگیرد، پس به صورت دقیق‌تر می‌توانیم بنویسیم:

$$x = \left\{\frac{۲k+۱}{۸} \,\middle|\, ۰ < \pi x < \pi\right\} = \left\{\frac{۲k+۱}{۸} \,\middle|\, -\frac{۱}{۲} < k < \frac{۷}{۲}\right\}$$

$$= \left\{\frac{۲k+۱}{۸} \,\middle|\, k = ۰,۱,۲,۳\right\}$$

بنابراین جواب‌های بازه $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند $\frac{۱}{۸}, \frac{۳}{۸}, \frac{۵}{۸}, \frac{۷}{۸}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $۲ = \frac{۱۶}{۸}$.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع به‌ترتیب ۳ و ۱- است، پس داریم:

$$\begin{cases} y_{min} = a - |b| = -۱ \\ y_{max} = a + |b| = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱, |b| = ۲$$

چون در همسایگی $x = ۰$ نمودار تابع نزولی است، $bc < ۰$ خواهد بود. حال برای سادگی b را منفی و c را مثبت در نظر می‌گیریم. از روی نمودار مشخص است که $\frac{۳}{۴}$ برابر دوره تناوب نمودار برابر ۱ است.

$$\frac{۳}{۴}T = ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{c\pi} = \frac{۲}{c} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ - ۲\sin \frac{۳\pi x}{۲}$$

نقطه A یکی از صفرهای تابع f است:

$$\xrightarrow{f(x)=۰} \sin \frac{۳\pi x}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳\pi x}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۴k}{۳} + \frac{۱}{۹} \\ \frac{۳\pi x}{۲} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۴k}{۳} + \frac{۵}{۹} \end{cases}$$

صفرهای مثبت تابع عبارت‌اند از $\frac{۱}{۹}, \frac{۵}{۹}, \frac{۱۳}{۹}, \frac{۱۷}{۹}, \ldots$ طول نقطه A سومین صفر مثبت تابع یعنی $\frac{۱۳}{۹}$ است.

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

ابتدا ضابطه تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin x - (۱ - ۲\sin^۲ x) = ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱$$

طول نقاط A وB را از محل برخورد نمودار f با محور x که همان جواب‌های معادله $f(x) = ۰$ هستند، انتخاب می‌کنیم:

$$۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow[\text{باتغییرمتغیر}]{\text{معادله درجه دو}} \sin x = -۱ \text{ یا } \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

پس جواب‌های مثبت معادله مجموعه $\{\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲}, ...\}$ و جواب‌های منفی معادله مجموعه $\{-\frac{\pi}{۲}, -\frac{۷\pi}{۶}, \frac{-۱۱\pi}{۶}, ...\}$ هستند. طول نقطه A دومین جواب مثبت یعنی $\frac{۵\pi}{۶}$ و طول B نیز دومین جواب منفی یعنی $-\frac{۷\pi}{۶}$ است.

$$\Rightarrow |AB| = \frac{۵\pi}{۶} - (-\frac{۷\pi}{۶}) = \frac{۱۲\pi}{۶} = ۲\pi$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

صورت باید برابر صفر باشد:

$$\sin ۲x + ۲\tan ۲x = \sin ۲x + \frac{۲\sin ۲x}{\cos ۲x} = \sin(۲x)(۱ + \frac{۲}{\cos ۲x}) = ۰$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

دقت کنید که $\cos ۲x = -۲$ امکان‌پذیر نیست، همچنین مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ به دلیل اینکه عبارت $\cos x$ را صفر می‌کنند (مخرج کسر) قابل قبول نیستند.

حال جواب کلی معادله را می‌توانیم به‌صورت $x = k\pi$ بنویسیم. جواب‌های بازه $[۰, ۳\pi]$ عبارت‌اند از ۰، π، ۲π و ۳π که مجموع آن‌ها برابر ۶π است.

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با شرط $\cos x \neq 0$، طرفین را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}(2\sin x - 1) = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\times \cos x} \sin x(2\sin x - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(\sin x - 1)(\sin x + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$، $\cos x$ را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست.

k	۰	۱
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$ ✖	$2\pi - \frac{\pi}{6}$ ✔
$x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$	$(\pi + \frac{\pi}{6})$ ✔	$3\pi + \frac{\pi}{6}$ ✖

بنابراین این معادله فقط ۲ جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا ضابطه تابع را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = -4a\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) + \cos 4x + 2a + 3$$

$$= (1+2a)\cos 4x + 3$$

برای این که نمودار f زیر خط $y = 7$ قرار گیرد، باید ماکزیمم تابع f کمتر از ۷ باشد. پس:

$$|2a+1| + 3 < 7 \Rightarrow |2a+1| < 4$$

$$\Rightarrow -4 < 2a+1 < 4 \Rightarrow -\frac{5}{2} < a < \frac{3}{2}$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\overbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}^{1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

$$\frac{1}{\tan^2 x} + \cos 2x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 x} = 1 - \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^4 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = (2\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) = 0$$

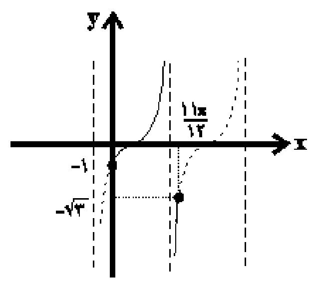
$$\xrightarrow{\sin^2 x > 0} \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ به دست می‌آید که به صورت زیر است. با توجه به نمودار معلوم است که اگر دامنه تابع $[0, \frac{11\pi}{12}] - \{\frac{3\pi}{4}\}$ باشد، برد آن $R - (-\sqrt{3}, -1)$ است.



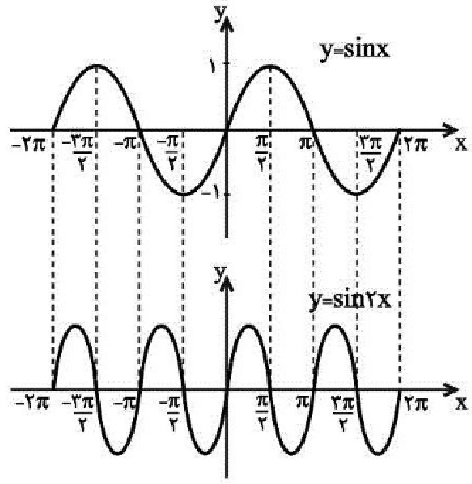
سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

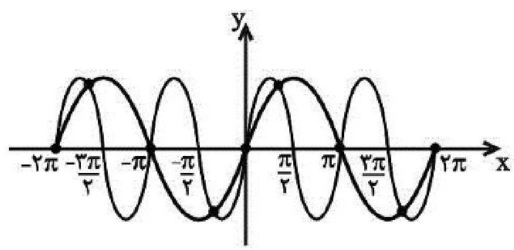
گزینه «۲»

با تقسیم طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = \sin x$ با محورxها بره، طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = \sin ax$ با محورxها به دست می‌آید، پس $a = ۲$ است.

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sin ۲x$، کافی است طول نقاط تابع $y = \sin x$ را بر دو تقسیم کنیم.



دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود، دو نمودار در ۹ نقطه مشترک‌اند.



توجه کنید که $a = -۲$ نیز قابل قبول است.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$f(\frac{۱}{۹}) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۱ + a\sin^۲\frac{\pi}{۶} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۴}a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = ۲$

ضابطهٔ تابع $f(x) = ۱ + ۲\sin^۲\frac{۳\pi x}{۲}$ را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$f(x) = ۱ + ۲\sin^۲\frac{۳\pi}{۲}x = ۱ + ۲(\frac{۱-\cos ۳\pi x}{۲}) = ۲ - \cos ۳\pi x$

$\Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳\pi} = \frac{۲}{۳} \quad , \quad \max = ۲ + |-۱| = ۳ \quad , \quad \min = ۲ - |-۱| = ۱$

$\left.\begin{matrix} A \quad \text{مختصات} : (۲/۵T, ۳) = (\frac{۵}{۳}, ۳) \\ B \quad \text{مختصات} : (T, ۱) = (\frac{۲}{۳}, ۱) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{شیب خط} : m_{AB} = \frac{۳-۱}{\frac{۵}{۳}-\frac{۲}{۳}} = ۲$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

داریم:

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 2x$
$= \frac{1}{2}$

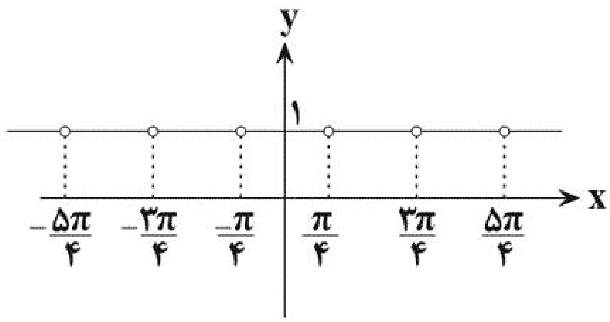
$\Rightarrow 2x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$، این تابع به‌صورت ثابت $y = 1$ درمی‌آید. اما چون نقاط $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ در دامنه تابع نیستند، بنابراین نمودار تابع به‌صورت زیر و دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.



سوال ۲۳

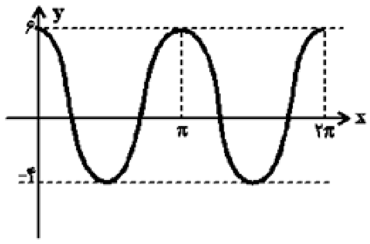
پاسخ: گزینه ۲

کافی است مقدار k را طوری تعیین کنیم که خط $y = k$ نمودار تابع $f(x) = 6\cos^2 x - 4\sin^2 x$ را چهار بار در بازه $[0,2\pi]$ قطع کند.

$$f(x) = 6\cos^2 x - 4\sin^2 x = 6\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - 4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 5\cos 2x + 1$$

دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است و نمودار آن در بازه $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر خواهد بود.

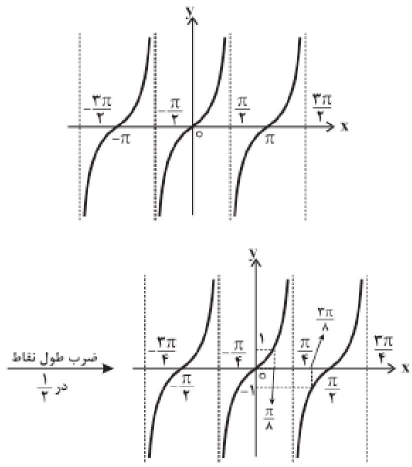


با توجه به نمودار، اگر $k \in (-4,6)$ باشد، خط $y = k$ نمودار f را در بازه $[0,2\pi]$، ۴ بار قطع می‌کند. بنابراین k می‌تواند ۹ مقدار صحیح به خود بگیرد.

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع $y = \tan(2x)$ را با انقباض افقی نمودار تابع $y = \tan x$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار بالا داریم:

$$\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}\ ,\ x \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow |\tan(2x)| > 1 \Rightarrow \left|\frac{2}{m-3}\right| > 1$$

$$\Rightarrow |m-3| < 2 \Rightarrow 1 < m < 5$$

اما واضح است که مقدار $m = 3$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow m \in (1,5) - \{3\}$$

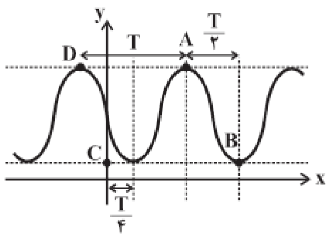
سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

برای تابع f داریم:

$$\begin{cases} \max(f) = |-۳| + ۴ = ۷ \\ \min(f) = -|-۳| + ۴ = ۱ \end{cases}$$

از طرفی چهارضلعی ABCD ذوزنقه است.



$$\begin{cases} AD = T = ۴ \\ BC = T + \frac{۱}{۴}T = ۵ \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۶(۴+۵)}{۲} = ۲۷$$

$\Rightarrow$ ارتفاع $= \max(f) - \min(f) = ۶$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار داریم:

$$f(۰) = -۲ \Rightarrow ۴\sin(۰) + a = -۲ \Rightarrow a = -۲$$

$$f\left(\frac{۱۰}{۳}\right) = ۰ \Rightarrow ۴\sin\left(\frac{۱۰\pi}{۳k}\right) - ۲ = ۰ \Rightarrow \sin\left(\frac{۱۰\pi}{۳k}\right) = \frac{۱}{۲}$$

طول دومین نقطه (در سمت راست محورyها) که سینوس آن $\frac{۱}{۲}$ باشد، برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ است.

$$\Rightarrow \frac{۱۰\pi}{۳k} = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow k = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = ۴\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right) - ۲$$

$\Rightarrow$ دوره تناوب $= T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}} = ۸$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y = a\sin(\pi(\frac{۳}{۲} + bx)) = a\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \pi bx) = -a\cos(\pi bx)$$

اگر به نمودار و ضابطه تابع دقت کنید، به مطالب زیر پی می‌برید:

۱) نمودار تابع، نموداری کسینوسی است که نسبت به محور xها قرینه شده، یعنی قطعاً یک عدد منفی در ضابطه تابع باید ضرب شده باشد که این عدد منفی هم اکنون در ضابطه تابع وجود دارد. پس a قطعاً مثبت بوده است.

۲) کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع کسینوس در حالت عادی ±۱ است، درحالی‌که این مقادیر در نمودار کشیده شده ±۳ هستند، پس باید یک ضریب ۳ در پشت تابع کسینوس ضرب شده باشد. $a = ۳$

۳) در تابع $\cos x$، دوره تناوب ۲π و لذا در تابع $\cos(\pi bx)$ دوره تناوب $\frac{۲}{|b|} = \frac{۲\pi}{|\pi b|}$ است. حال با توجه به این‌که نمودار کشیده شده در فاصله [۰,۳] دوبار تکرار شده است، پس دوره تناوب $\frac{۳}{۲}$ است. یعنی:

$$\frac{۲}{|b|} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |b| = \frac{۴}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۴}{۳}$$

اما دقت کنید، با توجه به این‌که $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ می‌باشد، هر دو مقدار برای b قابل قبول است. پس دو مقدار برای $a + b$ وجود دارد.

$$a + b = \begin{cases} ۳ + \frac{۴}{۳} = \frac{۱۳}{۳} \\ ۳ - \frac{۴}{۳} = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

از آن‌جا که کم‌ترین مقدار $a + b$ مدنظر است، پس $\frac{۵}{۳}$ قابل قبول است.

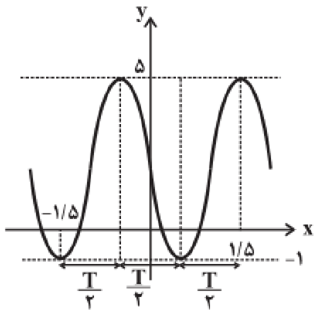
سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با استفاده از اتحاد $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$ داریم:

$$f(x) = a + \frac{b}{۲}\sin(۲cx)$$



با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} ۱/۵T = ۳ \Rightarrow T = ۲ \\ T = \dfrac{۲\pi}{|۲c|} \end{cases} \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{۲}$$

از طرفی، مقدار a میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع است و داریم:

$$\begin{cases} a = \dfrac{۵ + (-۱)}{۲} = ۲ \\ y_{max} = a + \dfrac{|b|}{۲} \xrightarrow{a=۲} ۲ + \dfrac{|b|}{۲} = ۵ \Rightarrow |b| = ۶ \end{cases}$$

با توجه به اینکه نمودار تابع در همسایگی $x = ۰$ فرم نزولی دارد، حاصل bc و $\frac{c}{b}$ منفی هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{ac}{b} = a \times \left(-\frac{|c|}{|b|}\right) = ۲ \times \left(-\frac{\frac{\pi}{۲}}{۶}\right) = -\frac{\pi}{۶}$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

در توابع متناوب با دوره تناوب T داریم:

$$f(x) = f(x + kT) \xrightarrow{T=۲} f(x) = f(x + ۲k) ; k \in Z$$

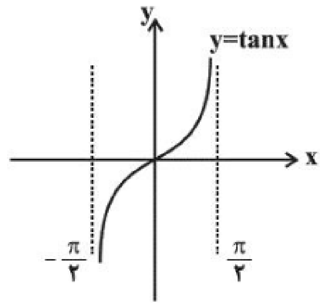
حال با قراردادن $k = ۵$ خواهیم داشت:

$$f(-۸/۸۱) = f(-۸/۸۱ + ۲ \times ۵) = f(۱/۱۹)$$
$$= \sqrt{۲ - ۱/۱۹} = ۰/۹$$

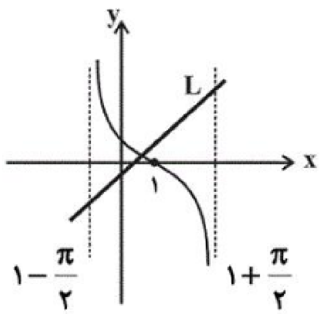
سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

کافی است ابتدا نمودار $y = \tan x$ را در یک دوره تناوب $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ رسم می‌کنیم.



سپس یک واحد به سمت چپ انتقال داده و در نهایت نسبت به محورyها آن را قرینه می‌کنیم. با این‌کار نمودار زیر به دست می‌آید که با رسم خط L مشاهده می‌کنیم که در ناحیه اول نمودارهای دو تابع همدیگر را قطع می‌کنند.

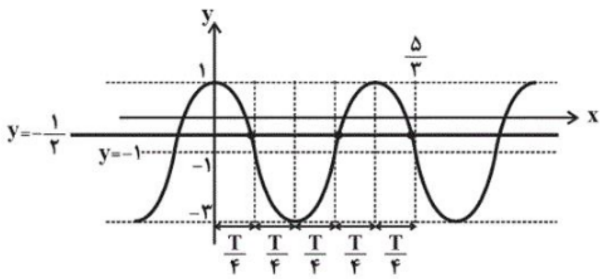


سوال ۳۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

نمودار تابع f و خط $y = -\frac{1}{2}$ در شکل زیر رسم شده‌اند.



لازم به ذکر است که دوره تناوب تابع f برابر است با $T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$. همچنین طول بازه $(0, \frac{5}{3})$ برابر $\frac{5T}{4}$ است.

مطابق شکل، خط موردنظر نمودار تابع f را در بازه $(0, \frac{5}{3})$ سه‌بار قطع می‌کند.

روش دوم:

$$f(x) = 2\cos(\frac{3\pi x}{2}) - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\frac{3\pi x}{2}) = \frac{1}{4}$$

یعنی کافی است، تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = \cos\frac{3\pi x}{2}$ را با خط $y = \frac{1}{4}$ در بازه $(0, \frac{5}{3})$ به‌دست آوریم.

سوال ۳۲

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin^4 x = \cos x + \cos^4 x \Rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \begin{cases} \cos x = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \xrightarrow{x\in[0,\pi]} x = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos x = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \xrightarrow{x\in[0,\pi]} x = \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $= \frac{4\pi}{3}$

سوال ۳۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 3x \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 3x \Rightarrow 3x = k\pi \pm x$$

$$\Rightarrow x = k\frac{\pi}{4}, x = k\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\frac{\pi}{4} \xrightarrow{x\in[0,\pi]} x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$$

سوال ۳۴

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مقدار زاویهٔ α را پیدا می‌کنیم.

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \xrightarrow{0<\alpha<\frac{\pi}{2}} \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 4\cos\alpha\sin x - 2\sin\alpha = 4\cos\frac{\pi}{3}\sin x - 2\sin\frac{\pi}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ مجموع جواب ها $= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

سوال ۳۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\sin 2x = \cos 3x$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ 2x + 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

اگر جواب‌ها را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم، داریم:

$$x = \frac{\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}, \dots$$

برای اینکه معادله در بازه $[0, a)$، ۵ جواب داشته‌باشد، a باید ششمین جواب معادله یعنی $\frac{17\pi}{10}$ باشد.

نکته: اگر رابطه $\sin\alpha = \cos\beta$ برقرار باشد، داریم:

$$\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

سوال ۳۶

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$، پس داریم:

$$(\cos 3x)(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \cos^2 x \xrightarrow{\times(-2)} \cos 3x = \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos 2x}$$

پس معادله به‌صورت $\cos 3x = \cos 2x$ در می‌آید. حال داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

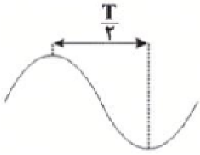
پس ۴ جواب داریم که عبارتند از $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$.

سوال ۳۷

پاسخ: گزینه ۲

دوره تناوب $f(x) = ۵\sin ۳(\frac{\pi}{۲}x - c) = ۵\sin(\frac{۳\pi}{۲}x - ۳c)$ برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{|\frac{۳\pi}{۲}|} = \frac{۴}{۳}$$



مطابق شکل فاصله طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نمودار تابع مثلثاتی سینوس برابر $\frac{T}{۲}$ است. در $x = \frac{۱}{۲}$ ماکزیمم داریم .پس اگر از این نقطه به اندازه $\frac{T}{۲}$ سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیمم می‌رسیم:

$$x_{min} = x_{max} + \frac{T}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۷}{۶}$$

سوال ۳۸

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{۱+\cos x+\cos ۲x}{\sin x+\sin ۲x} = \frac{\cos x(۱+۲\cos x)}{\sin x(۱+۲\cos x)} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\begin{cases} \cot(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cos x \neq -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

سوال ۳۹

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x = \cos(\pi - ۲x) = \cos\frac{x}{۲}$$

$$۱)\pi - ۲x = ۲k\pi + \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{-۵x}{۲} = (۲k-۱)\pi$$
$$(k \in Z)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۴k+۲}{۵}\pi \xrightarrow{x\in[-\pi,\pi]} x_۱ = \frac{-۲\pi}{۵} \text{ و } x_۲ = \frac{۲\pi}{۵}$$

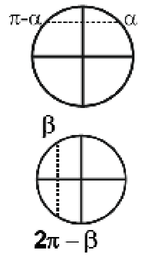
$$۲)\pi - ۲x = ۲k\pi - \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{-۳x}{۲} = (۲k-۱)\pi$$
$$(k \in Z)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۴k+۲}{۳}\pi \xrightarrow{x\in[-\pi,\pi]} x_۳ = \frac{۲\pi}{۳} \text{ و } x_۴ = \frac{-۲\pi}{۳}$$

سوال ۴۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{3} = \sin\alpha \Rightarrow \\ \text{مجموع} = \alpha + (\pi - \alpha) = \pi \\ 4\cos x + 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{4} = \cos\beta \Rightarrow \\ \text{مجموع} = \beta + (2\pi - \beta) = 2\pi \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{مجموع کل جواب‌ها} = 3\pi$$

سوال ۴۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 - (\cos^2 x)^3$$

$$= (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)}_{\neq 0} = 0$$

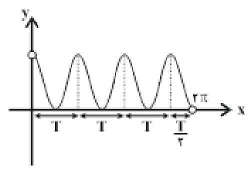
$$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow -\cos 2x = 0$$

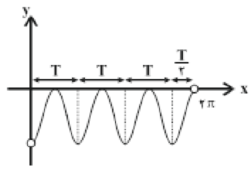
$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

سوال ۴۲

پاسخ: گزینه ۳

در شکل‌های زیر دو نمودار چنان رسم شده‌اند که در بازه $(0, 2\pi)$ بیشترین تکرار (حداکثر مقدار b) را داشته و در سه نقطه بر محور xها مماس شده‌باشند.





با توجه به نمودار مشخص است که $2\pi = 4T$، پس $T = \frac{2\pi}{4}$. از طرفی می‌دانیم $T = \frac{2\pi}{|b|}$، پس نتیجه می‌شود حداکثر b برابر ۴ است.

سوال ۴۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم، داریم:

$$(1+\cos x)(1-\cos x)=\sin x\cos\frac{x}{2}\Rightarrow 1-\cos^2 x=\sin x\cos\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x=\sin x\cos\frac{x}{2}\Rightarrow \sin x\left(\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\qquad,\quad \sin x-\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow \sin x=\cos\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\begin{cases} x=2k\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\Rightarrow x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\Rightarrow x=4k\pi+\pi \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

سوال ۴۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin x-\cos x+\sin x\cos x-1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x\cos x-\cos x)+(\sin x-1)=0$$

$$\Rightarrow \cos x(\sin x-1)+(\sin x-1)=0$$
$$\Rightarrow(\sin x-1)(\cos x+1)=0$$

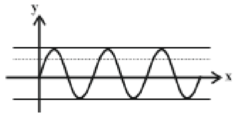
$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=1\xrightarrow{x\in(0,2\pi)}x=\frac{\pi}{2}\\ \cos x=-1\xrightarrow{x\in(0,2\pi)}x=\pi\end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه $[0,2\pi]$ برابر است با: $\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$

سوال ۴۵

پاسخ: گزینه ۳

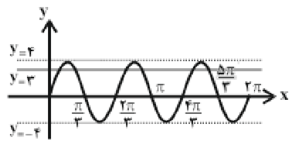
واضح است که $-۴ \leq ۴\sin ax \leq ۴$، پس برای اینکه با $y = a$ برخورد داشته باشد، باید $a \in [-۴,۴] - \{۰\}$ باشد. در ضمن $a = ۴$ یا $a = -۴$ با نمودار برخوردهای کمتری نسبت به بقیه اعداد این بازه دارند:



در واقع $a \in [-۳,۳] - \{۰\}$ است.

برای اینکه تعداد نقاط برخورد بیشتر شوند، دوره تناوب باید کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد. یعنی:

$$T = \frac{۲\pi}{|a|} = \frac{۲\pi}{۳}$$



در این حالت $y = ۳$ با نمودار $y = ۴\sin ۳x$، ۶ نقطه برخورد دارد.

سوال ۴۶

پاسخ: گزینه ۱

در رابطه داده شده $x = \frac{\pi}{۳}$ را قرار می‌دهیم.

$$f(x) = ۲\cos x + ۳f(\tfrac{\pi}{۳})$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} f(\tfrac{\pi}{۳}) = ۲ \times \tfrac{۱}{۲} + ۳f(\tfrac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow -۲f(\tfrac{\pi}{۳}) = ۱ \Rightarrow f(\tfrac{\pi}{۳}) = \tfrac{-۱}{۲}$$

بنابراین: $f(x) = ۲\cos x - \frac{۳}{۲}$

مینیمم تابع f به ازای $\cos x = -۱$ حاصل می‌شود و برابر $-۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{-۷}{۲}$ است.

سوال ۴۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با استفاده از رابطه $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \sin 2x = 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x + \sin 2x = 1$$
$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \Rightarrow \tan 2x = -1$$

$$\tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

سوال ۴۸

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\tan\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2}}{\cos x \cos 2x} = 8 \Rightarrow \frac{\frac{2}{\sin x}}{\cos x \cos 2x} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin x \cos x \cos 2x} = 8 \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sin 2x \cos 2x} = 8 \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}\sin 4x} = 8 \Rightarrow \frac{8}{\sin 4x} = 8$$

$$\xrightarrow{\sin 4x \neq 0} \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \xrightarrow{x \in [0,\pi]} x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$$

سوال ۴۹

پاسخ: گزینه ۳

تابع تعریف نشده : $x \in Z$

$$x \notin Z : 2\cos^2 x - 1 - \cos x = -1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۴ جواب است.

سوال ۵۰

پاسخ: گزینه ۴

داریم: $\cos(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}\cos^2 x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos^2 x) = \sin(\frac{\pi}{2}\sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}\sin^2 x) + \sin(\frac{\pi}{2}\sin^2 x) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin(\frac{\pi}{2}\sin^2 x) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}\sin^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{2}\sin^2 x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق} \quad (0 \le \sin^2 x \le 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

پس معادله‌ی فوق در بازه‌ی مذکور دارای ۴ جواب است.

سوال ۵۱

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به اتحادهای $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ ، $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ معادله را به شکل زیر می نویسیم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \times 2\sin 2x\cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x(\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

واضح است که جواب‌های $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ جواب های $k\pi + \frac{\pi}{4}$ را هم شامل می‌شود. در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ جواب‌ها به‌صورت $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ هستند که هیچ کدام از آنها قابل قبول نیست. زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کنند و در دامنه‌ی معادله قرار ندارند.

سوال ۵۲

پاسخ: گزینه ۳

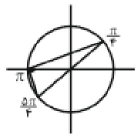
$$\frac{\tan x}{۱-\cos x} = ۲(۱+\cos x) \Rightarrow \tan x = ۲(۱-\cos^۲ x)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۲\sin^۲ x$$

$$\begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi = \{۰, \pi, 2\pi\} \in [۰, 2\pi] \\ \frac{1}{\cos x} = 2\sin x \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} = \{\frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}\} \in [۰, ۲\pi]$$

$x = ۰, ۲\pi$ مخرج را صفر می‌کند و عضو دامنه نیست پس معادله سه ریشه دارد و جواب‌ها مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌کنند.

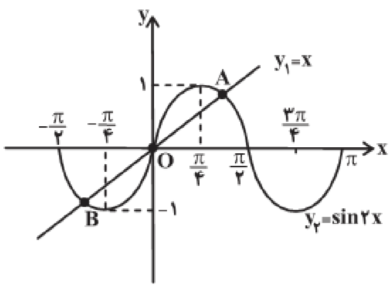


سوال ۵۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

$$x = \sin ۲x \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = x \\ y_۲ = \sin ۲x \end{cases}$$



خط و منحنی در ۳ نقطه‌یO،A و B همدیگر را قطع می‌کنند.

سوال ۵۴

پاسخ: گزینه ۱

زاویه‌ی M چون محاطی روبه‌رو به قطر است، پس برابر 90° است. داریم:

$$\cos\alpha = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = 2R\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{BM}{AB} \Rightarrow BM = 2R\sin\alpha$$

$$\overset{\Delta}{AMH} \ : \cos\alpha = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AH = AM\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha$$

$$2AH + BM = 4R \Rightarrow 4R\cos^2\alpha + 2R\sin\alpha = 4R$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha + \sin\alpha = 2 \Rightarrow 2 - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha = 2$$

$$\sin\alpha(-2\sin\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = 0 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

سوال ۵۵

پاسخ: گزینه ۱

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Rightarrow 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

روش اول:

از اتحاد $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = \cos 4x$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$$

از جواب کلی به‌دست آمده به‌ازای $k = 0$، مقدار $x = \frac{\pi}{24}$ به‌دست می‌آید.

روش دوم:

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 8\cos^2 x(\cos^2 x - 1) + 1$$

$$= -8\cos^2 x\sin^2 x + 1 = -2 \times (2\sin x\cos x)^2 + 1$$

$$= -2\sin^2 2x + 1 = \cos 4x$$

ادامه‌ی حل، همانند راه حل اول است.

سوال ۵۶

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)=\frac{1}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x-2\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(\cos 2x-2)=0\xrightarrow{\cos 2x\neq 2}\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{0\le x\le 2\pi} x\in\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\}$$