نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **پاسخ A1 مثلثات یازدهم**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\alpha+۲\beta=\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\times ۲}۲\alpha+۴\beta=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{\text{دو زاویه ی متمم}}$$

$$\sin ۲\alpha=\cos ۴\beta$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(۲\alpha-\pi)=-\sin ۲\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{۲}+۲\alpha)=-\sin ۲\alpha\\ \cos(۲\pi-۴\beta)=\cos ۴\beta\\ \sin(\frac{۳\pi}{۲}+۴\beta)=-\cos ۴\beta\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\text{عبارت}=\frac{-\sin ۲\alpha-۴\sin ۲\alpha}{۲\cos ۴\beta+\cos ۴\beta}=\frac{-۵\sin ۲\alpha}{۳\cos ۴\beta}=\frac{-۵}{۳}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه (۲)

$$\sin(x)+\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\frac{۷}{۵}\Rightarrow \sin x+\cos x=\frac{۷}{۵}\quad (۱)$$

اگر $A=\sin x+\cos x$ و $B=\cos x-\sin x$ باشد، آنگاه:

$$A^۲=(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۴۹}{۲۵}\Rightarrow ۱+۲\sin x\times\cos x=\frac{۴۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \sin x\times\cos x=\frac{۱۲}{۲۵}\quad (۲)$$

$$B^۲=(\cos x-\sin x)^۲$$

$$\Rightarrow B^۲=\cos^۲ x+\sin^۲ x-۲\sin x\times\cos x$$

$$=۱-۲\times(\frac{۱۲}{۲۵})=\frac{۱}{۲۵}\xrightarrow{۰<x<\frac{\pi}{۴}}\cos x-\sin x=+\frac{۱}{۵}$$

$$(۳)$$

حال با داشتن A وB، حاصل $\tan x-\cot x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \tan x-\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^۲ x-\cos^۲ x}{\sin x\times\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x\times\cos x}$$

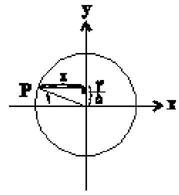
$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)}\frac{(-\frac{۱}{۵})(\frac{۷}{۵})}{\frac{۱۲}{۲۵}}=-\frac{۷}{۱۲}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

نقطهٔ $P(x, \frac{3}{5})$ مطابق شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. با توجه به شکل و رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + x^2 = 1^2 \Rightarrow x = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{x<0} x = -\frac{4}{5}$$

بنابراین: $P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{+\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$A = \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) - 3\sin(\pi + \theta)}{\tan(\theta - \pi) + \cos(2\pi - \theta)} = \frac{-\cos\theta + 3\sin\theta}{\tan\theta + \cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{4}{5} + 3(\frac{3}{5})}{-\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{-31}{20}} = -\frac{52}{31}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\sin 200^\circ - 2\cos 470^\circ}{3\sin 880^\circ + \cos 520^\circ} = a$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(180^\circ + 20^\circ) - 2\,\text{cas}(360^\circ + 90^\circ + 20^\circ)}{3\sin(720^\circ + 180^\circ - 20^\circ) + \cos(360^\circ + 180^\circ - 20^\circ)} = a$$

$$\Rightarrow \frac{-\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ}{3\sin 20^\circ - \cos 20^\circ} = a \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{3\sin 20^\circ - \cos 20^\circ} = a$$

$$\xrightarrow[\text{بر}\cos 20\text{تقسیممیکنیم}]{\text{صورت و مخرج را}} \frac{\tan 20^\circ}{3\tan 20^\circ - 1} = a$$

$$\Rightarrow 3a\tan 20^\circ - a = \tan 20^\circ \Rightarrow (3a - 1)\tan 20^\circ = a$$

$$\Rightarrow \tan 20^\circ = \frac{a}{3a - 1}$$

حالا معادله را حل می‌کنیم:

$$x + \tan 20^\circ = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{a}{3a - 1}$$

$$= \frac{3a - 1 - 3a}{9a - 3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{9a - 3} = \frac{1}{3 - 9a}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\frac{۱}{\sin^۲ \alpha} = ۱ + \cot^۲ \alpha \Rightarrow \frac{۱}{\sin^۲ \alpha} = ۱ + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{۳}{۵} \xrightarrow[\sin \alpha < ۰]{\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}} \sin \alpha = -\frac{۳}{۵}$$

$$\cos^۲ \alpha = ۱ - \sin^۲ \alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{۴}{۵} \xrightarrow[\cos \alpha < ۰]{\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}} \cos \alpha = -\frac{۴}{۵}$$

با داشتن $\sin \alpha = -\frac{۳}{۵}$ و $\cos \alpha = -\frac{۴}{۵}$، عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A = \sin(-\frac{\pi}{۲} - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)$$

$$= \sin(-(\frac{\pi}{۲} + \alpha)) - \sin(-(\pi - \alpha))$$

$$= -\cos \alpha + \sin \alpha = +\frac{۴}{۵} - \frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۵}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

برای دو زاویه حاده α, β، اگر $\sin \alpha = \cos \beta$ باشد، آنگاه $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$ است:

$$\sin(x + \frac{\pi}{۸}) = \cos(۳x + \frac{\pi}{۸}) \rightarrow x + \frac{\pi}{۸} + ۳x + \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۲}$$

$$۴x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۶}$$

$$\cos ۴x + \cot ۸x + \sin ۱۶x$$

$$= \cos ۴(\frac{\pi}{۱۶}) + \cot ۸(\frac{\pi}{۱۶}) + \sin ۱۶(\frac{\pi}{۱۶})$$

$$= \cos \frac{\pi}{۴} + \cot \frac{\pi}{۲} + \sin \pi = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۰ + ۰ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»:

گزینهٔ «۱»:

$\sin(\frac{\pi}{۱۲} - \frac{۵\pi}{۱۲}) + ۱ = \sin(-\frac{۴\pi}{۱۲}) + ۱$

$-\sin\frac{\pi}{۳} + ۱ = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$

گزینهٔ «۲»:

$\sin(\frac{\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۴}) + ۱ = \sin(-\frac{۲\pi}{۱۲}) + ۱ = -\sin\frac{\pi}{۶} + ۱ =$
$+\frac{۱}{۲}$

گزینهٔ «۳»:

$\sin(\frac{\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۳}) + ۱ = \sin(-\frac{۳\pi}{۱۲}) + ۱ = -\sin\frac{\pi}{۴} + ۱$

$= ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$

گزینهٔ «۴»:

$\sin(\frac{\pi}{۱۲} - \frac{۳\pi}{۴}) + ۱ = \sin(-\frac{۸\pi}{۱۲}) + ۱ = -\sin\frac{۲\pi}{۳} + ۱$

$= -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۱ = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$

بنابراین نمودار تابع $y = \sin(\frac{\pi}{۱۲} - x) + ۱$ از نقطهٔ $(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲})$ عبور نمی‌کند.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

با توجه به این‌که زاویهٔ ۱ رادیان حدود ۵۷ درجه است، داریم:

$۱\,rad > \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \tan ۱ > ۱$

حال چهار عدد را به صورت زیر می‌نویسیم:

گزینهٔ «۱» : $(\tan ۱)^{\tan ۱}$ گزینهٔ «۲» : $(\frac{۱}{\tan ۱})^{\cot ۱}$

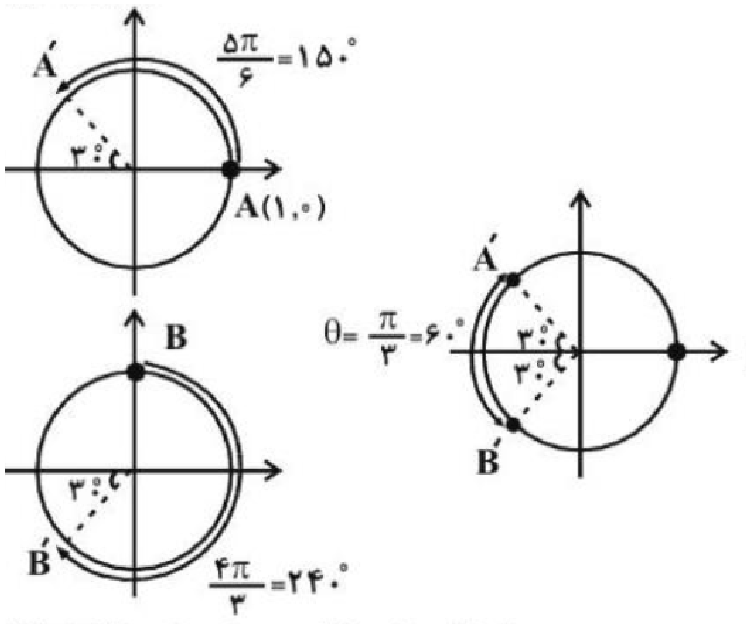
گزینهٔ «۳» : $(\tan ۱)^{\cot ۱}$ گزینهٔ «۴» : $(\frac{۱}{\tan ۱})^{\tan ۱}$

گزینه‌های «۱» و «۳» بزرگ‌تر از یک هستند؛ از آن‌جا که $\tan ۱ > \cot ۱$ پس از میان دو گزینهٔ باقیمانده، $(\frac{۱}{\tan ۱})^{\tan ۱}$ کوچک‌تر است؛ زیرا وقتی پایه عددی بین صفر و یک است عددی کوچک‌تر است که توان آن بزرگ‌تر باشد. بنابراین گزینهٔ «۴» درست است.

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»



$L = r\theta = ۱\times\frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$\frac{۲۹}{۶}\pi$ رادیان $= \frac{۲۹\times۱۸۰^\circ}{۶} = ۸۷۰^\circ$ درجه

دو زاویه را برحسب α و β در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$\begin{cases}\alpha+\beta = ۹۱۰^\circ \\ \alpha-\beta = ۸۷۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta = ۹۱۰^\circ \\ -\alpha+\beta = -۸۷۰^\circ\end{cases} \Rightarrow ۲\beta = ۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = ۲۰^\circ \ , \ \alpha = ۸۹۰^\circ$$

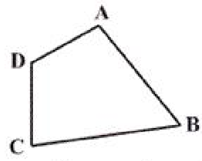
$$۸۹۰^\circ = ۲\times۳۶۰^\circ + ۱۷۰^\circ$$

بنابراین زاویهٔ بزرگتر در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

در چهارضلعی محدب ABCD داریم:



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=۳۶۰^\circ-\left(\hat{C}+\hat{D}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\hat{A}+\hat{B})=-\sin(\hat{C}+\hat{D}) \\ \cos(\hat{A}+\hat{B})=\cos(\hat{C}+\hat{D}) \\ \tan(\hat{A}+\hat{B})=-\tan(\hat{C}+\hat{D}) \\ \cot(\hat{A}+\hat{B})=-\cot(\hat{C}+\hat{D}) \end{cases}$$

پس تنها گزینهٔ «۲» همواره برقرار است.

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به رابطه $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰^\circ}$ و قرار دادن $R=۱$ مشخص می‌شود که ۱ رادیان تقریباً ۵۷/ درجه است. کسینوس در ناحیه اول بین صفر و یک است، پس:

$$۰<\cos ۱\simeq \cos ۵۷^\circ<۱ \Rightarrow [\cos ۱]=۰$$

۲ رادیان تقریباً برابر با ۱۱۴/بوده و انتهای کمان آن در ناحیه دوم است و کسینوس در ناحیه دوم بین صفر و ۱− است.

$$-۱<\cos ۲<۰ \Rightarrow [\cos ۲]=-۱$$

۳ رادیان تقریباً برابر با ۱۷۱/بوده و انتهای کمان آن در ناحیه دوم است و سینوس در ناحیه دوم بین صفر و یک است. بنابراین:

$$[\sin ۳]=[\sin ۱۷۱/]=۰$$

برای $[\tan ۱]$ نیز داریم:

$$\tan ۴۵^\circ<\tan ۵۷/<\tan ۶۰^\circ$$

$$۱<\tan ۵۷/<\sqrt{۳}\Rightarrow [\tan ۱]=[\tan ۵۷/]=۱$$

$$\text{حاصل کسر}=\frac{۰+(-۱)}{۰-۱}=۱$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲}) = -\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \sin^{۴}(\alpha-\frac{\pi}{۲}) = \cos^{۴}\alpha \qquad (*)$$

با توجه به زوایای داده شده، ملاحظه می‌شود که اختلافشان برابر $\frac{\pi}{۲}$ است:

$$(x+\frac{\pi}{۴})-(x-\frac{\pi}{۴}) = \frac{\pi}{۲}$$

پس به‌جای زاویه $x-\frac{\pi}{۴}$ زاویه $(x+\frac{\pi}{۴})-\frac{\pi}{۲}$ قرار می‌دهیم:

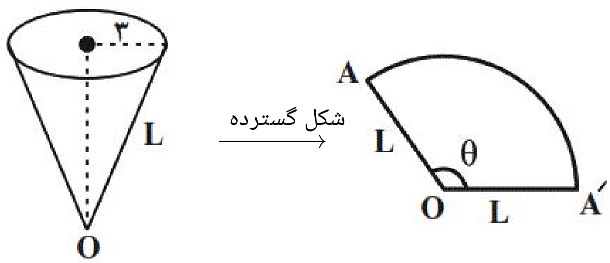
$$\sin^{۴}((x+\frac{\pi}{۴})-\frac{\pi}{۲})+\cos^{۴}(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۸}$$
$$\xrightarrow{(*)} \cos^{۴}(x+\frac{\pi}{۴})+\cos^{۴}(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow \cos^{۴}(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \begin{cases} \cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۴} \\ \cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{-۱}{۴} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\tan^{۲}(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۴})}-۱ = ۴-۱ = ۳$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۴



محیط قاعده مخروط برابر طول کمان AA' است.

$$\Rightarrow ۲\pi(۳) = ۶\pi = L\theta \Rightarrow L = \frac{۶\pi}{\theta}$$

از طرفی مساحت قطاعی با زاویه θ از دایره‌ای به شعاع L از رابطه $S = \frac{۱}{۲}\theta L^{۲}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

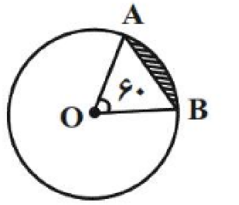
$$S = \frac{۱}{۲}\theta\left(\frac{۶\pi}{\theta}\right)^{۲} = \frac{۱۸\pi^{۲}}{\theta} = ۴۵\pi \Rightarrow \theta = \frac{۱۸\pi^{۲}}{۴۵\pi} = \frac{۲\pi}{۵}\text{rad}$$
$$= ۷۲^{\circ}$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل روبه‌رو، مثلث AOB، متساوی‌الاضلاع با طول ضلع ۲ است. بنابراین برای مساحت آن داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AOB}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲ = \sqrt{۳}$$



مساحت قطاع AOB، $\frac{۱}{۶}$ مساحت کل دایره است.

$$\Rightarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۶}\pi(۲)^۲ = \frac{۲}{۳}\pi$$

از طرفی با توجه به رابطه $l = r\theta$ ، طول کمان AB نیز برابر است با:

$$|\overset{\frown}{AB}| = ۲ \times \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} \text{محیط سطح هاشور خورده} : P = |AB| + |\overset{\frown}{AB}| = ۲ + \frac{۲\pi}{۳} \\ \text{مساحت سطح هاشور خورده} \quad S = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\triangle}{AOB}} = \frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P - S = ۲ + \sqrt{۳}$$

اندازه محیط سطح هاشورخورده، به میزان $۲ + \sqrt{۳}$ واحد از اندازه مساحت آن بیشتر است.

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

یک دور کامل در دایره، ۶۰ دقیقه است بنابراین عقربه دقیقه شمار $\frac{۴}{۶}$ دایره را طی کرده است. دایره کامل ۲π رادیان است، بنابراین داریم:

$$\text{زاویه دوران عقربه} = \frac{۴}{۶} \times ۲\pi = \frac{۴\pi}{۳}\ \text{rad}$$

(شعاع دایره یا همان طول عقربه دقیقه شمار)

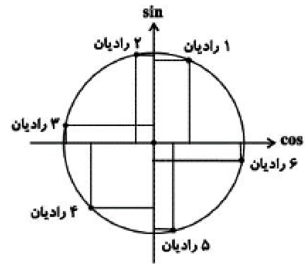
$$r = \frac{L\ \text{(طول کمان)}}{\theta\ \text{(بر حسب رادیان)}} = \frac{۶۰}{\frac{۴\pi}{۳}} = \frac{۴۵}{\pi}\ \text{cm}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

طبق دایره مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱ تا ۶ رادیان به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sin 2 > \sin 1 > \sin 3 > \sin 6 > \sin 4 > \sin 5 \\ \cos 6 > \cos 1 > \cos 5 > \cos 2 > \cos 4 > \cos 3 \end{cases}$$



لذا گزینه «۳» صحیح است.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

می‌دانیم که وقتی عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور کامل می‌چرخد، عقربهٔ ساعت‌شمار ۱ ساعت یعنی $\frac{1}{12}$ دور کامل می‌چرخد. پس می‌توان گفت عقربهٔ دقیقه‌شمار همیشه ۱۲ برابر عقربهٔ ساعت‌شمار می‌چرخد.

حال که دقیقه‌شمار $\frac{3\pi}{11}$ رادیان طی کرده، ساعت‌شمار $\frac{3\pi}{11} \times \frac{1}{12}$ رادیان طی خواهد کرد، یعنی $\frac{\pi}{44}$رادیان.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

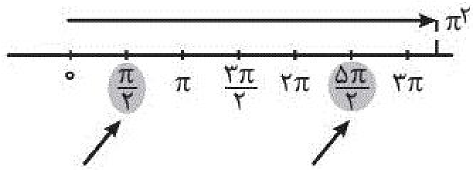
گزینهٔ «۳»

می‌دانیم ماکزیمم عبارت $y = \sin x^۲$ وقتی است که $\sin x^۲ = ۱$ باشد.

اگر $۰ \le x \le \pi$ باشد، آنگاه $۰ \le x^۲ \le \pi^۲$ خواهد بود.

روی دایرهٔ مثلثاتی وقتی زاویه از صفر تا $\pi^۲$ تغییر می‌کند مقدار سینوس ۲ بار برابر ۱ می‌شود.

به‌طور دقیق‌تر روی محور زیر مشاهده می‌کنید.



$\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱ \qquad \sin\left(\frac{۵\pi}{۲}\right) = ۱$

درنتیجه به‌ازای $x = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}, \sqrt{\frac{۵\pi}{۲}}$، عبارت $y = \sin x^۲$ به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

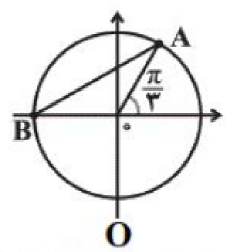
مختصات نقطهٔ $A = (\cos\frac{\pi}{۳}, \sin\frac{\pi}{۳}) = (\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ است و $B(-۱, ۰)$ می‌شود. پس:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲} - (-۱)\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۰\right)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + \frac{۳}{۴}} = \sqrt{\frac{۱۲}{۴}} = \sqrt{۳}$$

طول کمان AB هم برابر زاویهٔ $A\hat{O}B$ است و $\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$ می‌شود.

پس:

$$\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$$



سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

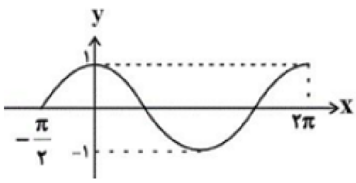
$$f(x) = \sin(x - \frac{۳\pi}{۴}) - ۲\cos(\frac{۷\pi}{۴} + x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\sin(\frac{۳\pi}{۴} - x) - ۲\cos(\frac{۷\pi}{۴} + x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\sin(\frac{\pi}{۲} - (x - \frac{\pi}{۴})) - ۲\cos(۲\pi + (x - \frac{\pi}{۴}))$$

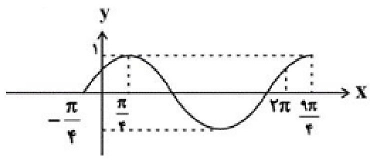
$$\Rightarrow f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{۴}) - ۲\cos(x - \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow f(x) = -۳\cos(x - \frac{\pi}{۴})$$

حال تابع f را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



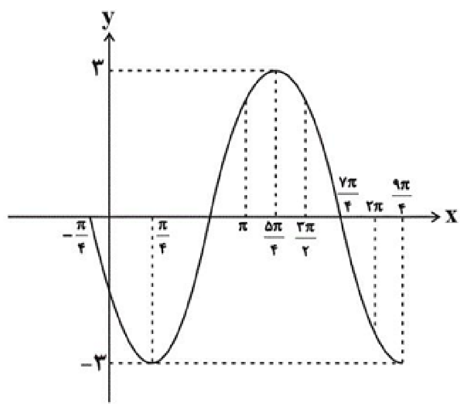
$\xrightarrow{\frac{\pi}{۴} \text{ به راست}}$

$y = \cos x$



ر راستای محورها،
رابروقرینهمیشود۳

$y = \cos(x - \frac{\pi}{۴})$



$y = -۳\cos(x - \frac{\pi}{۴})$

با توجه به نمودار گزینه های (۱) و (۳) درست است.

همچنین بیشترین مقدار تابع ۳ و کم‌ترین مقدار آن ۳- است که اختلافشان ۶ می‌شود. پس گزینه (۲) نیز درست است.

اگر خط y=۱ را رسم کنیم، نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند، پس گزینه (۴) نادرست است.

سوال ۲۲

پاسخ: **گزینه ۱**

$$\frac{\sin(8\alpha+8\beta+2\beta)}{\cos(16\alpha+16\beta+2\alpha)}=\frac{\sin(8\overbrace{(\alpha+\beta)}^{\frac{5\pi}{4}}+2\beta)}{\cos(16\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\frac{5\pi}{4}}+2\alpha)}=\frac{\sin(10\pi+2\beta)}{\cos(20\pi+2\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2(\frac{5\pi}{4}-\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}-2\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1$$

سوال ۲۳

پاسخ: **گزینه ۳**

$$P_{ABCD}=|\overset{\frown}{AB}|+BC+|\overset{\frown}{CD}|+AD$$

$$=2R+R-r+2r+R-r=4R=2\pi r\Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

سوال ۲۴

پاسخ: **گزینه ۱**

ابتدا زاویه °۲۰ را به رادیان تبدیل می‌کنیم: $\frac{20^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{9}$

پس مساحت قطاع OHA برابر است با: $S_{OHA\ \text{قطاع}}=\frac{1}{2}r^2\theta\Rightarrow S=\frac{1}{2}(4)^2\times\frac{\pi}{9}=\frac{16\pi}{18}=\frac{8\pi}{9}$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OHB}$ می‌توان نوشت:

$$\tan\frac{\pi}{9}=\frac{BH}{OH}\xrightarrow{OH=4}\tan\frac{\pi}{9}=\frac{BH}{4}\Rightarrow BH=4\tan\frac{\pi}{9}$$

و همچنین داریم: $S_{\overset{\Delta}{OHB}}=\frac{1}{2}OH\times BH=\frac{1}{2}\times4\times4\tan\frac{\pi}{9}=8\tan\frac{\pi}{9}$

پس مساحت قسمت سایه‌خورده برابر است با:

$$S_{\text{سایه خورده}}=S_{\overset{\triangle}{OHB}}-S_{OHA\ \text{قطاع}}$$

$$=8(\tan\frac{\pi}{9})-\frac{8\pi}{9}=8((\tan\frac{\pi}{9})-\frac{\pi}{9})$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

مساحت قطاعی با زاویه θ (برحسب رادیان) در دایره با شعاع r از رابطه $S=\frac{۱}{۲}\theta r^{۲}$ به دست می‌آید؛ بنابراین مساحت قسمت هاشورخورده در شکل برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}(۲)R^{۲}-\frac{۱}{۲}(۲)r^{۲}=R^{۲}-r^{۲}$$

از طرف $S_{C_۱}=\pi r^{۲}$ است؛ بنابراین داریم:

$$R^{۲}-r^{۲}=\pi r^{۲}\Rightarrow R^{۲}=(\pi+۱)r^{۲}\Rightarrow \frac{R^{۲}}{r^{۲}}=\pi+۱$$

اما می‌دانیم که نسبت مساحت دو دایره، با نسبت مربع شعاع آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\frac{S_{C_۲}}{S_{C_۱}}=\frac{R^{۲}}{r^{۲}}=\pi+۱$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ باشد، آنگاه $\tan\alpha\tan\beta=۱$.

بنابراین با توجه به تساوی $\tan(\widehat{B}+۲۰^\circ)\tan(\widehat{C}+۱۰^\circ)=۱$ در مثلث ABC داریم:

$$(\widehat{B}+۲۰^\circ)+(\widehat{C}+۱۰^\circ)=۹۰^\circ\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=۶۰^\circ\ (*)$$

از طرفی در مثلث ABC تساوی $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$ برقرار است. بنابراین:

$$\xrightarrow{(*)}\widehat{A}+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow \widehat{A}=۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \cos ۱۲۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos ۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

برای دو زاویه مکمل داریم: $\cos\theta=-\cos(\pi-\theta)$ و به عبارتی $\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=۰$ است. $\cos(x+۳۰^\circ)+\cos(۲x+۶۰^\circ)$ زمانی برابر صفر خواهد بود که:

$$(x+۳۰^\circ)+(۲x+۶۰^\circ)=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳x=۹۰^\circ\Rightarrow x=۳۰^\circ$$

آن‌گاه:

$$\frac{۱+\tan ۳۰^\circ}{۱+\cot ۳۰^\circ}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۱

یعنی کمان‌هایی که مجموع‌شان ۷x باشد، متمم یکدیگرند. $۷x = \frac{\pi}{۲} \rightarrow$

$$x + ۶x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos x = \sin ۶x$$

$$۲x + ۵x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \cos ۵x$$

$$۳x + ۴x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan ۳x = \cot ۴x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \sin ۲x \tan ۳x}{\cot ۴x \cos ۵x \sin ۶x} = ۱$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

دو زاویه α و β متمم یکدیگرند، بنابراین سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. بنابراین:

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{۴}{۳}$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}} \cos\alpha = +\frac{۴}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \xrightarrow{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}} \sin\alpha = +\frac{۳}{۵}$$

$$\begin{cases} \tan\alpha = \cot\beta = \frac{۳}{۴} \\ \cot\alpha = \tan\beta = \frac{۴}{۳} \\ \sin\alpha = \cos\beta = \frac{۳}{۵} \\ \cos\alpha = \sin\beta = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

$$A = \frac{\cos(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)-\sin(\beta-۲\pi)+\sin(\alpha+\beta)}{\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\tan(\beta-\frac{\pi}{۲})}$$

$$= \frac{\cos(۴\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\sin(۲\pi-\beta)+\sin(\frac{\pi}{۲})}{\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)-\tan(\frac{\pi}{۲}-\beta)} = \frac{-\sin\alpha-\sin\beta+۱}{-\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$= \frac{-\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۵}+۱}{-\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}} = \frac{-\frac{۲}{۵}}{-\frac{۲۵}{۱۲}} = \frac{۲۴}{۱۲۵}$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به مثلث ABC واضح است $x+y=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\cos(2x+y)=-\frac{1}{4}\xrightarrow{x+y=\frac{\pi}{2}}\cos(x+\underbrace{x+y}_{\frac{\pi}{2}})=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\frac{1}{4}\Rightarrow-\sin x=-\frac{1}{4}\Rightarrow\sin x=\frac{1}{4}$$

حال با توجه به این‌که $0<x<\frac{\pi}{2}$ است، برای محاسبه $\tan x$ داریم:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow(\frac{1}{4})^2+\cos^2 x=1$$

$$\Rightarrow\cos^2 x=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

سوال ۳۱

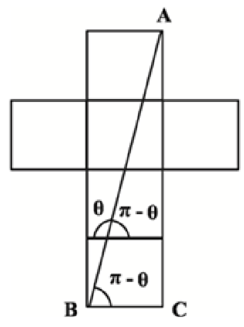
پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ است، پس برای محاسبه $\sin\theta$، می‌توانیم در مثلث ABC سینوس زاویه $(\pi-\theta)$ را محاسبه کنیم. با توجه به رابطه فیثاغورس ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow AB^2=4^2+1^2=17\Rightarrow AB=\sqrt{17}$$

بنابراین داریم:

$$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$



سوال ۳۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \beta=\frac{3\pi}{2}-\alpha\Rightarrow \cos\beta=\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$$
$$=-\sin\alpha$$

$$\Rightarrow A=7\sin\alpha+2(-\sin\alpha)-2=5\sin\alpha-2$$

$$-1\le\sin\alpha\le 1\Rightarrow -5\le 5\sin\alpha\le 5$$

$$\Rightarrow -7\le 5\sin\alpha-2\le 3\Rightarrow -7\le A\le 3$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار A برابر ۳ است.

سوال ۳۳

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل تابع داده شده اگر هر مقدار تابع $y=\sin x$ را در ۲ ضرب کرده و سپس با یک جمع کنیم به شکل تابع داده شده یعنی $y=2\sin x+1$ در مورد (پ) می‌رسیم. هر تابعی که ضابطه آن با این تابع برابر باشد نیز می‌تواند نموداری مطابق نمودار داده شده داشته باشد.

مورد (الف): $y=-2(\sin(x-\pi)-\frac{1}{2})=-2(-\sin(\pi-x)-\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow y=2\sin x+1$$

مورد (ب): $y=2\cos(x-\frac{\pi}{2})+1=2\cos(\frac{\pi}{2}-x)+1$

$$\Rightarrow y=2\sin x+1$$

مورد (ت): $y=2\cos(\frac{\pi}{2}+x)+1=-2\sin x+1$

بنابراین بخشی از ۳ نمودار (الف)، (ب) و (پ) می‌تواند باشد.

سوال ۳۴

پاسخ: گزینه ۱

$$3\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=5\cos(\pi+\theta)\Rightarrow 3\cot\theta=-5\cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{3\cos\theta}{\sin\theta}=-5\cos\theta$$

$$\xrightarrow{\cos\theta\neq 0}\sin\theta=-\frac{3}{5}\xrightarrow{\text{θ در ربع چهارم نیست}}$$

θ در ربع سوم است $\Rightarrow \tan\theta>0$

$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}\Rightarrow 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\frac{9}{25}}\Rightarrow \cot^2\theta$$
$$=\frac{16}{9}$$

$$\xrightarrow{\cot\theta>0}\cot\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow \tan\theta=\frac{3}{4}$$

سوال ۳۵

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} \cos\frac{۵\pi}{۱۴} = \cos(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۷}) = \sin\frac{\pi}{۷} \\ \cos\frac{۱۳\pi}{۱۴} = \cos(\frac{\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۷}) = -\sin\frac{۳\pi}{۷} \\ \cos\frac{۱۷\pi}{۱۴} = \cos(\frac{\pi}{۲} + \frac{۵\pi}{۷}) = -\sin\frac{۵\pi}{۷} \end{cases}$$

حال با جای‌گذاری در عبارت داریم:

$$\sin\frac{\pi}{۷} + \sin\frac{۳\pi}{۷} + \sin\frac{۵\pi}{۷} + \sin\frac{\pi}{۷} + (-\sin\frac{۳\pi}{۷})$$
$$+ (-\sin\frac{۵\pi}{۷}) = ۲\sin\frac{\pi}{۷}$$

سوال ۳۶

پاسخ: گزینه ۲

$$۱ - ۳\sin^۴ a = ۳\sin^۲ a\cos^۲ a$$
$$\Rightarrow ۱ = ۳\sin^۴ a + ۳\sin^۲ a\cos^۲ a$$
$$\Rightarrow ۱ = ۳\sin^۲ a(\sin^۲ \cos^۲ a)$$
$$\Rightarrow \sin^۲ a = \frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۲ a} = ۳ \Rightarrow ۱ + \cot^۲ a = ۳ \Rightarrow \cot^۲ a = ۲$$
$$\Rightarrow \tan^۲ a = \frac{۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{a \text{ در ربع} ۴} \tan a = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cot(\frac{۹\pi}{۲} + a) = \cot(۴\pi + \frac{\pi}{۲} + a) = (\frac{\pi}{۲} + a) = -\tan a$$
$$\Rightarrow \cot(\frac{۹\pi}{۲} + a) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سوال ۳۷

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۶} = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\frac{a(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - b(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{a(\frac{۱}{۲}) + b(\frac{۱}{۲})} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}(a-b)}{a+b} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow[a\neq -b]{\text{با فرض}}$$
$$۳(a-b) = -(a+b) \Rightarrow ۴a = ۲b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱}{۲}$$

سوال ۳۸

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{۲}\sin ۱۵a \xrightarrow{a=\frac{\pi}{۲۰}} \sqrt{۲}\sin\frac{۱۵\pi}{۲۰}$$
$$= \sqrt{۲}\sin\frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲}\sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\sin\frac{\pi}{۴} = \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱$$

از طرفی اگر به زوایای داده شده در دو کسر صورت سؤال توجه کنیم. داریم:

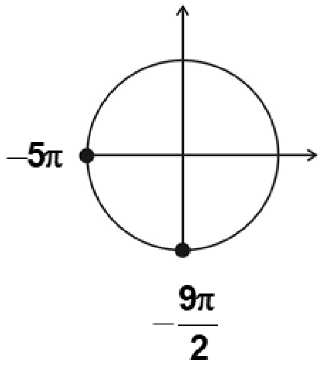
$$۳a + ۷a = ۱۰a \xrightarrow{a=\frac{\pi}{۲۰}} ۱۰(\frac{\pi}{۲۰}) = \frac{\pi}{۲}$$
$$۴a + ۶a = ۱۰a \xrightarrow{a=\frac{\pi}{۲۰}} ۱۰(\frac{\pi}{۲۰}) = \frac{\pi}{۲}$$

یعنی جمع دو زاویه صورت و مخرج کسرها $\frac{\pi}{۲}$ است. یعنی دو زاویه $(۷a, ۳a)$ و $(۶a, ۴a)$ متمم یکدیگرند. لذا $\tan ۴a = \cot ۶a$ و $\sin ۳a = \cos ۷a$. بنابراین:

$\frac{\tan ۴a}{\cot ۶a} = ۱$, $\frac{\sin ۳a}{\cos ۷a} = ۱ \Rightarrow$ عبارت مورد نظر $= ۱ + ۱ + ۱ = ۳$

سوال ۳۹

پاسخ: گزینه ۳



$\Rightarrow$ α در ربع سوم است.

$$A = -\cos\alpha + \sin\alpha + (\cos\alpha)(-\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow A = -\cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cot\alpha = \frac{۴}{۳}\ ,\ -۵\pi < \alpha < -\frac{۹\pi}{۲}$$

$$۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha} \Rightarrow ۱ + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}\alpha = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\sin\alpha<۰]{\alpha\ \text{در ربع سوم}} \sin\alpha = -\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \cos^{۲}\alpha = ۱ - \sin^{۲}\alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۴}{۵}$$

$$\alpha\ \text{ربع سوم} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow A = -(-\frac{۴}{۵}) + (-\frac{۳}{۵}) - (-\frac{۳}{۵})(-\frac{۴}{۵}) \Rightarrow A = (\frac{۴}{۵} - \frac{۳}{۵}) - \frac{۱۲}{۲۵}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{۷}{۲۵} = -۰/۲۸$$

سوال ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\cos ۵^\circ + \cos ۱۵^\circ + \cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) + \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ)}{\cos(۹۰^\circ - ۱۵^\circ) + \cos(۹۰^\circ + ۵^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ + ۵^\circ) + \cos(۲۷۰^\circ + ۵^\circ)}$$

$$= \frac{\cos ۵^\circ + \cos ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ - \sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \sin ۵^\circ - \cos ۵^\circ + \sin ۵^\circ} = \frac{\cos ۵^\circ - \sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۵^\circ} = -۱$$

سوال ۴۱

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا زاویه مرکزی بین هر دو کابین متوالی را به دست می‌آوریم:

$$\alpha = \frac{۲\pi}{۳۶} = \frac{\pi}{۱۸}$$

$$\frac{۱۱\pi}{۳} = \frac{۶\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۳} = ۲\pi + \frac{۵\pi}{۳} = ۲\pi + \frac{۳۰\pi}{۱۸}$$

پس کابین پنجم یک دور کامل چرخیده و سپس به اندازه $\frac{۳۰\pi}{۱۸}$ دیگر در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت چرخیده است.

$$\frac{۳۰\pi}{۱۸} = ۳۰ \times \left(\frac{\pi}{۱۸}\right)$$

در نتیجه کابین ۵ در موقعیت کابین $۳۵ = ۳۰ + ۵$ قرار می‌گیرد.