



حسابان / رشته ریاضی

ریاضی / رشته تجربی

کنکور ۱۴۰۰

دوران

پیش

لغی

دوره

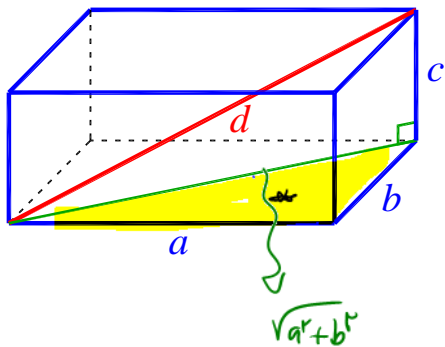
## فصل بیستم : تفکر تجسمی، مقاطع مخروطی

مهرداد عباسپور



# یادآوری

در مکعب مستطیل :



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

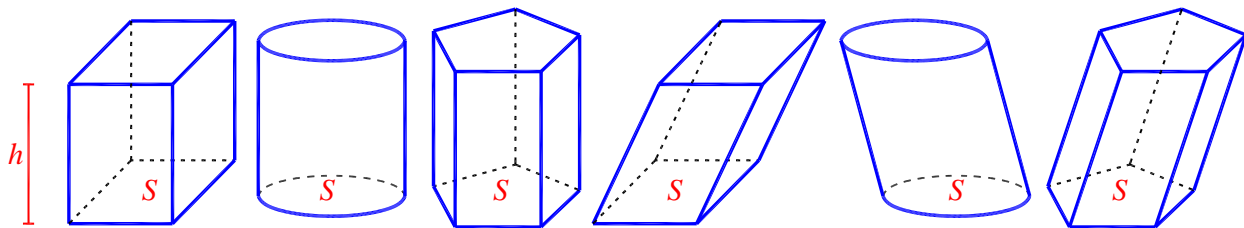
در مکعب مستطیل

$$\text{حجم} : V = a \cdot b \cdot c$$

$$\text{قطر} : d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



## در شکل‌های منشوری :



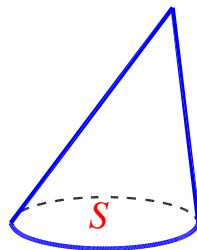
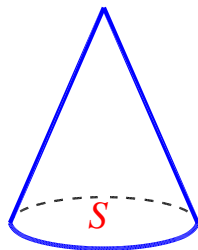
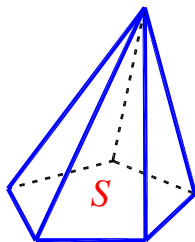
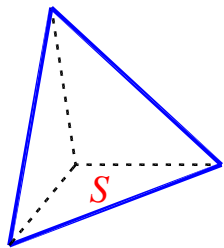
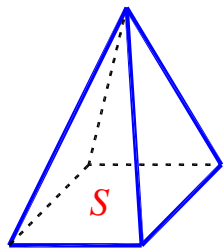
مساحت قاعده  $\times$  ارتفاع = حجم

$$V = h \cdot S$$



## در شکل‌های هرمی :

$h$

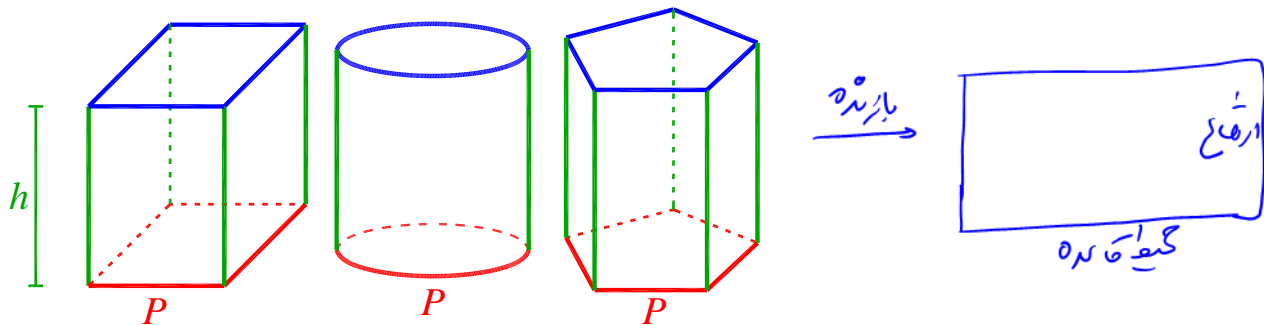


مساحت قاعده  $\times$  ارتفاع  $= \frac{1}{3}$  حجم

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S$$



## در شکل‌های به صورت منشور قائم:

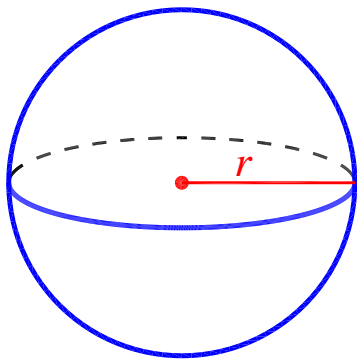


محیط قاعده  $\times$  ارتفاع = مساحت جانبی

$$A = h \cdot P$$



در کره به شعاع  $r$  :

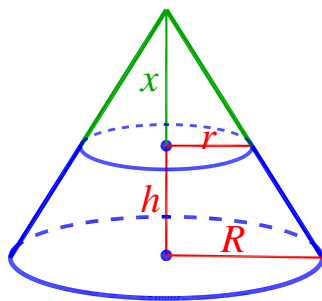
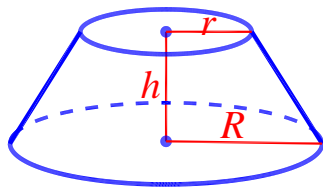


$$\text{حجم} : V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{مساحت} : A = 4\pi r^2$$



## در مخروط ناقص :

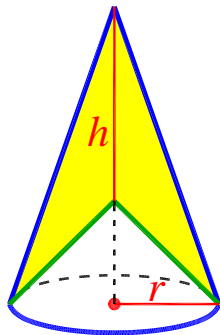
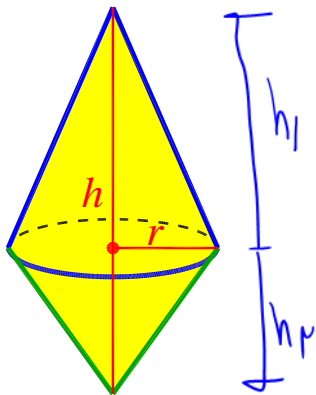


$$\frac{x}{x+h} = \frac{r}{R}$$

$$\text{حجم} : V = \frac{1}{3} h \cdot (r^2 + rR + R^2) \pi$$

برای اثبات، کافی است  $x$  را به کمک قضیه تالس حساب کنید و حجم دو مخروط را کم کنید.

# جمع و تفریق دو مخروط با قاعده‌های یکسان :



$$\text{حجم} : V = \frac{1}{3} h \cdot (r^2 \pi)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 \times h_2$$

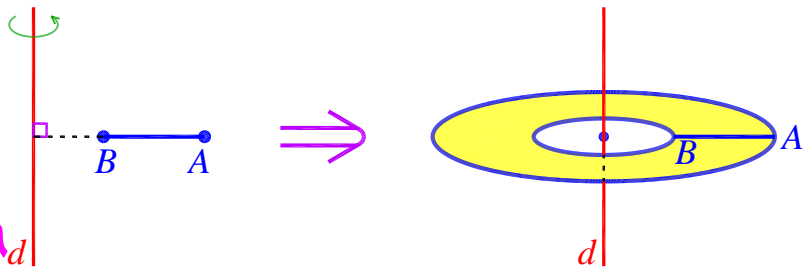
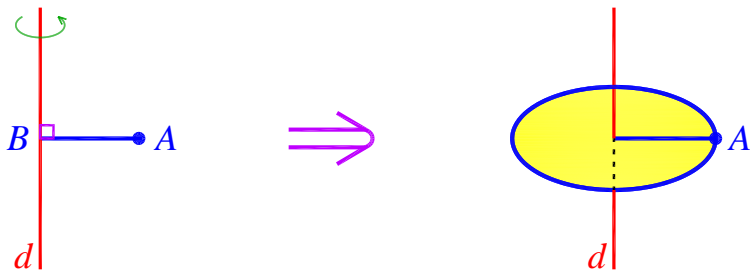
برای مناسبی میم آن کافی است میم دو مخروط را جمع یا تفریق کنیم.

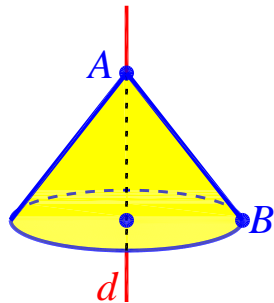
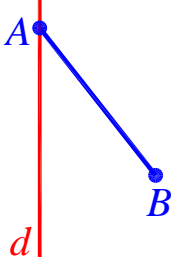
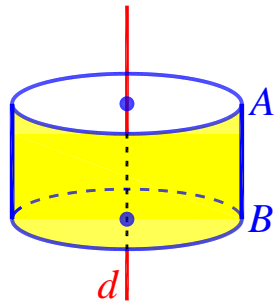
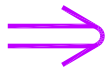
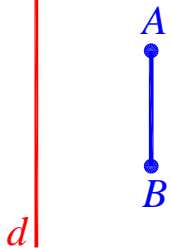




# دوران حول محور

دوران پاره خط  $AB$  حول خط  $d$  :

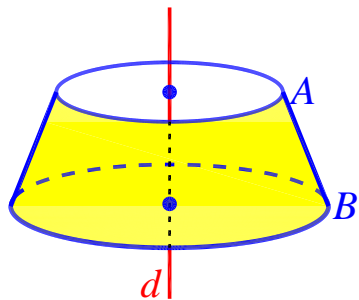
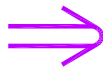




۱۰



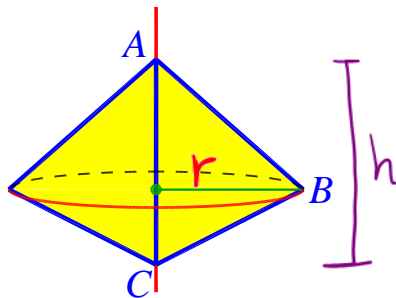
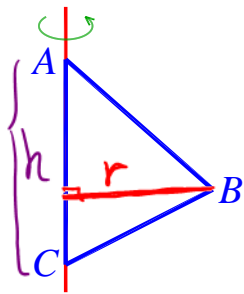
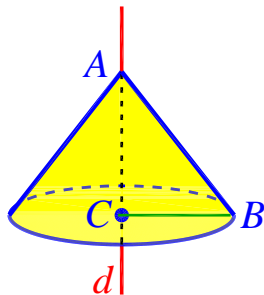
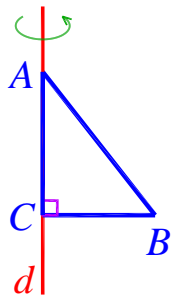
$d$

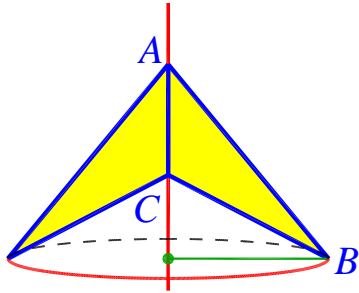
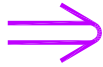
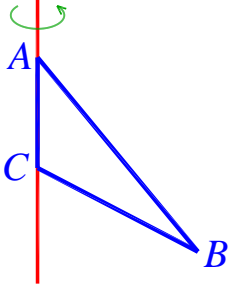


$d$



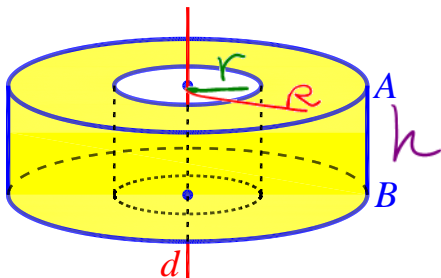
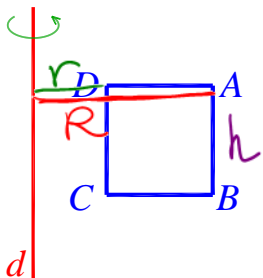
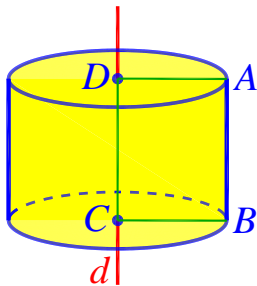
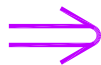
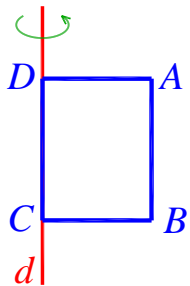
# دوران مثلث حول یک ضلع :





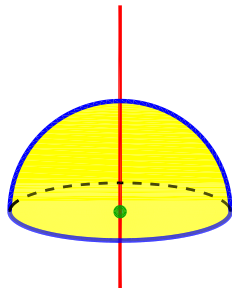
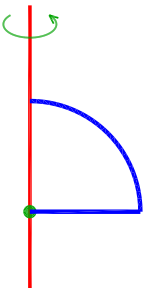
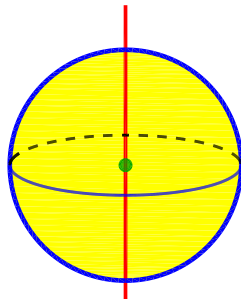
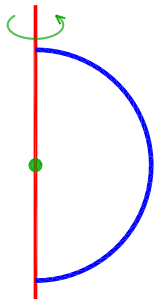


# دوران مستطیل حول یک خط :



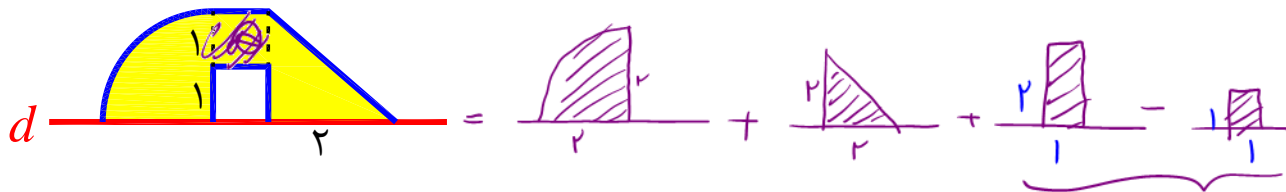


# دوران نیم‌دایره و ربع‌دایره حول خط :





**تمرین ۱:** در شکل روبه‌رو، یک ربع دایره، مربع و مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین می‌بینید. با توجه به اندازه‌های داده شده، حجم شکل حاصل از دوران ناحیه‌ی سایه زده حول خط  $d$  را بیابید.



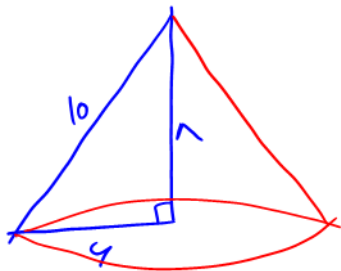
$$V = \frac{1}{4} \times \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2} + \frac{1}{2} \pi r^2 h + \pi \times 2 \times 1 - \pi \times 1 \times 1$$

$$V = \frac{14\pi}{3} + \frac{1\pi}{2} + 2\pi - \pi = 11\pi$$





تمرین ۲: حجم شکل حاصل از دوران یک مثلث با اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ رو حول ضلع متوسط بیابید.

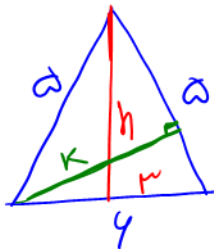


$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8 = 94\pi$$



تمرین ۳ : حجم شکل حاصل از دوران یک مثلث با اضلاع ۵، ۵ و ۶ رو حول ضلع به طول ۵ را

بیابید.

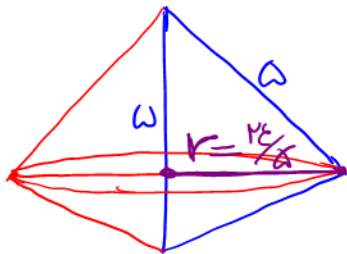


$$r^2 + h^2 = a^2$$

$$h = 4$$

$$S = \frac{1}{2} \times r \times y = \frac{1}{2} r \times a$$

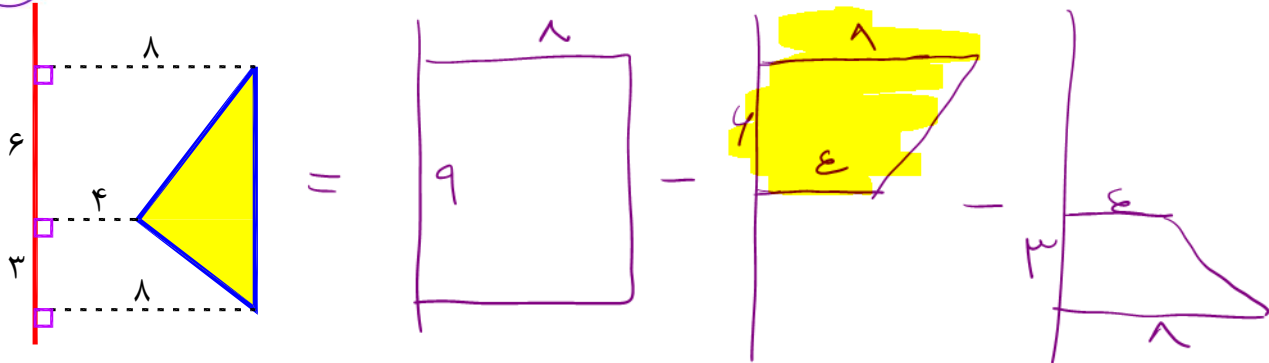
$$\rightarrow r = \frac{12}{5}$$



$$V = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times a = \frac{147\pi}{5}$$



تمرین ۴ : حجم شکل حاصل از دوران مثلث حول خط نشان داده شده را بیابید.

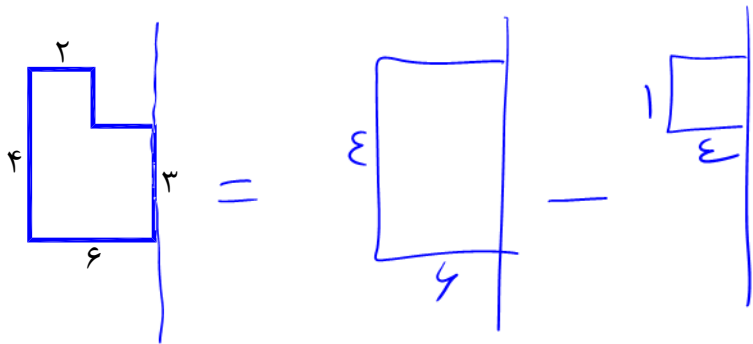


$$V = \pi \times 6^2 \times 9 - \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 4 - \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3$$

$$= 9 \times 36 \pi - \pi \times 112 - \pi \times 112 = 324 \pi - 224 \pi = 100 \pi$$



**تمرین ۵:** در شکل روبه‌رو، هر دو خط موازی یا بر هم عمودند. حجم شکل حاصل از دوران این شکل، حول ضلع به طول ۳ را بیابید.

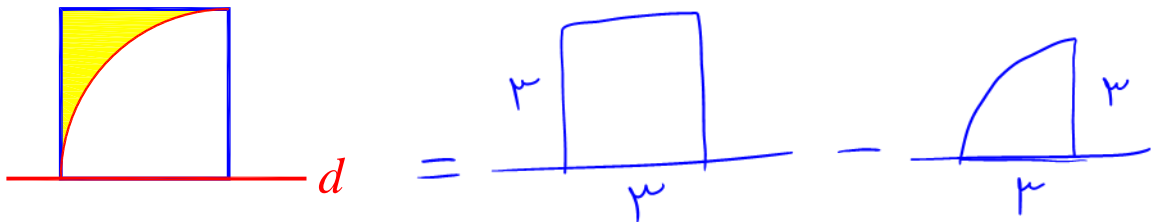


$$\pi \times 4^2 \times 6 - \pi \times 3^2 \times 1$$

$$\sqrt{= 121\pi}$$



**تمرین ۶:** در شکل روبه‌رو، یک ربع دایره به شعاع ۳ و یک مربع می‌بینید. حجم حاصل از دوران شکل سایه زده، حول خط  $d$  را بیابید.



$$V = \pi \times 3^2 \times 3 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{2} \pi \times 3^3 = 9\pi$$



**تمرین ۷ :** حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  با ضلع‌های قائم  $AB$  و  $AC$ ، به ترتیب با اندازه‌های  $۵$  و  $۲\sqrt{۶}$  واحد، حول خط گذرا از رأس  $C$  و موازی ضلع  $AB$ ، کدام است؟

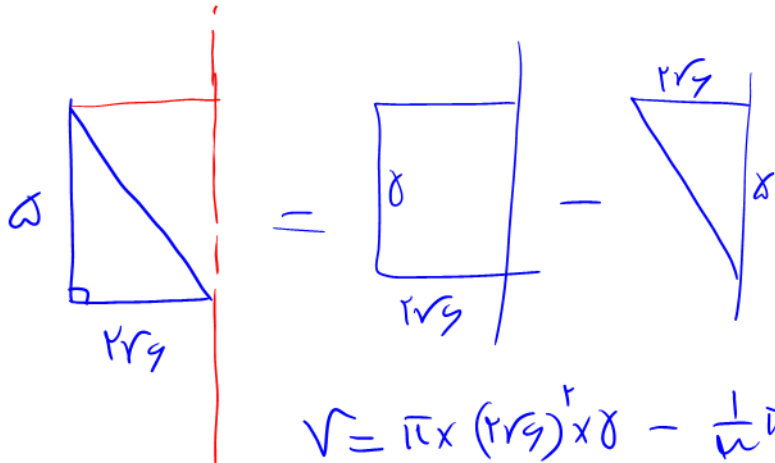
(سراسری ریاضی ۹۹)

$۷۰\pi$  (۲)

$۶۰\pi$  (۱)

$۸۰\pi$  (۴)

$۷۵\pi$  (۳)



$$V = \pi \times (2\sqrt{6})^2 \times 5 - \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 \times 5 = \frac{5}{3} \pi \times 24 \times 5 = 100\pi$$

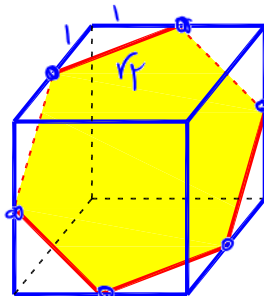
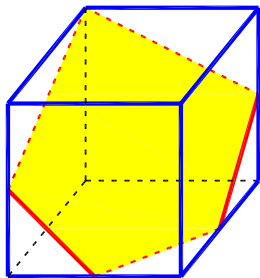
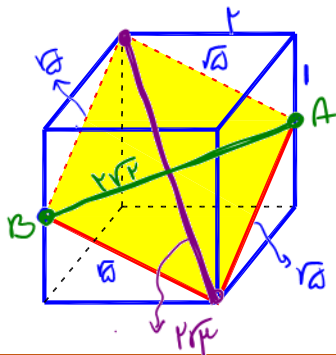
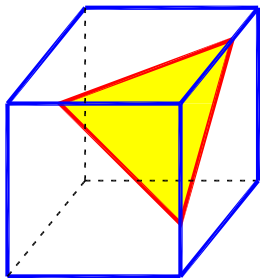
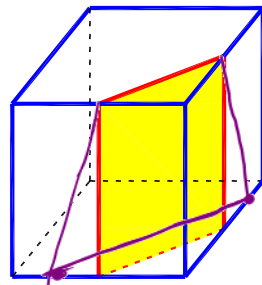
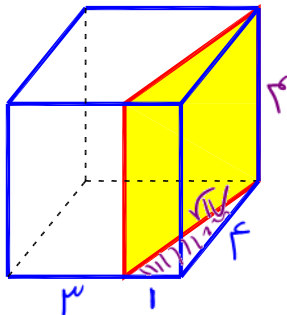
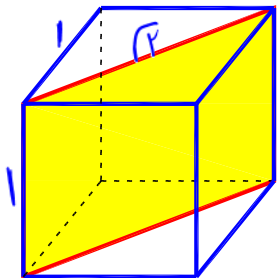
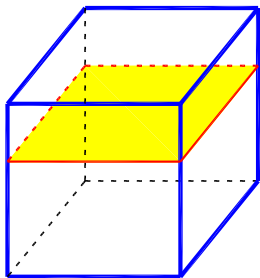


## برش، مقاطع مخروطی

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نام دارد.



# سطح مقطع صفحه با مکعب



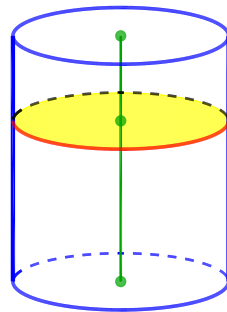
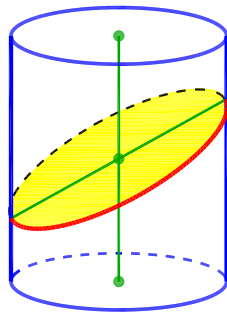
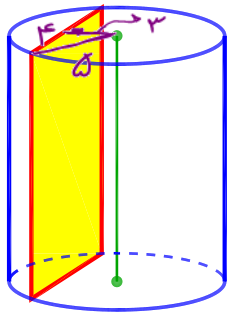
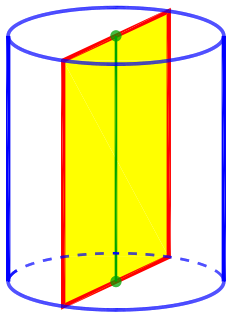
P.P

مربع = 2





# سطح مقطع صفحه با استوانه

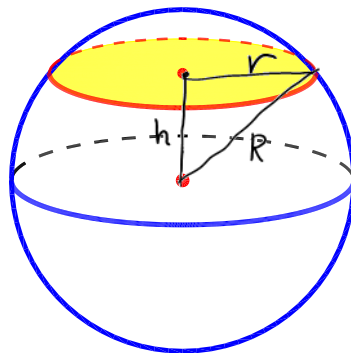
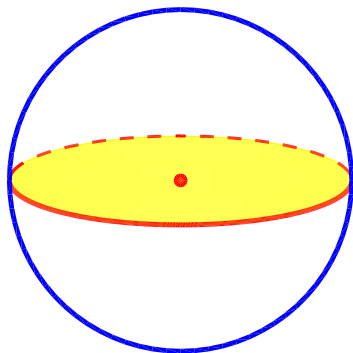


$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} &= 5 \\ \text{نصف قطر} &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{عرض} = 1$$



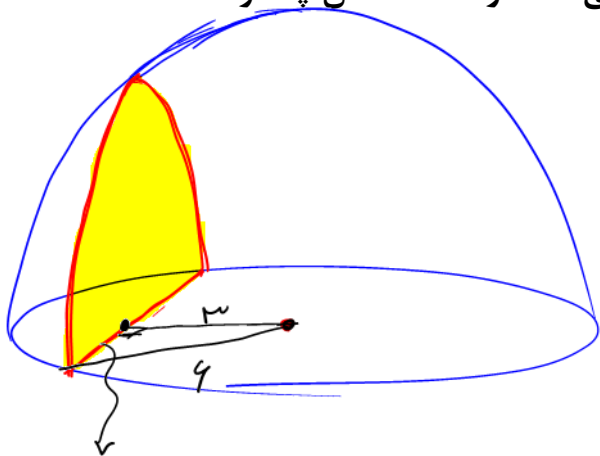
# سطح مقطع صفحه با کره





**تمرین ۸:** نیم کره‌ای به شعاع ۶ داریم. صفحه‌ای عمود بر قاعده‌ی آن و به فاصله‌ی ۳ واحد از مرکز

آن را در نظر بگیرید. سطح مقطع حاصل چه شکلی است و مساحت آن چقدر است؟



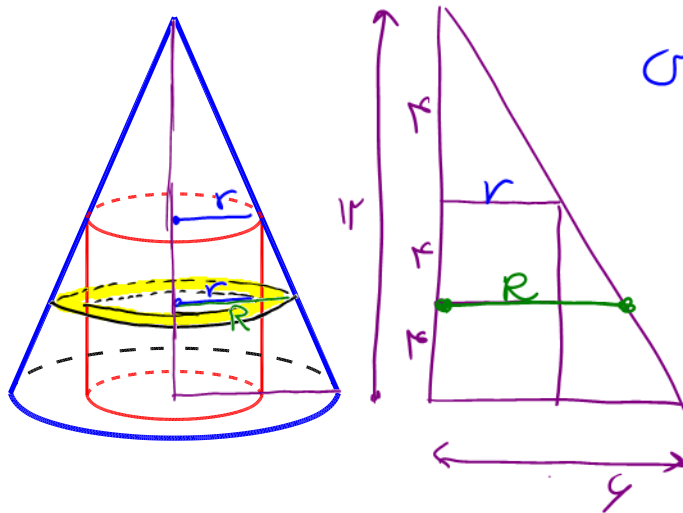
$$r = \sqrt{27}$$

$$S = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{27\pi}{2}$$

نیم کره



**تمرین ۹:** در شکل روبه‌رو، یک مخروطی توپر به شعاع قاعده‌ی ۶ و ارتفاع ۱۲ می‌بینید. از درون آن یک استوانه به ارتفاع ۸ را خالی می‌کنیم. صفحه‌ای به موازات دو قاعده استوانه و وسط آنها این حجم را قطع می‌کند. مساحت سطح مقطع را بیابید.



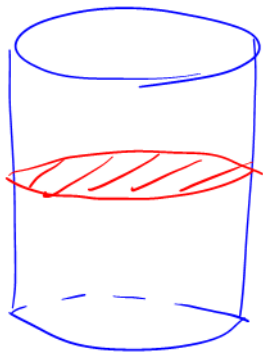
$$\begin{cases} \frac{r}{6} = \frac{8}{12} & r = 2 \\ \frac{R}{6} = \frac{8}{12} & R = 4 \end{cases}$$

$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

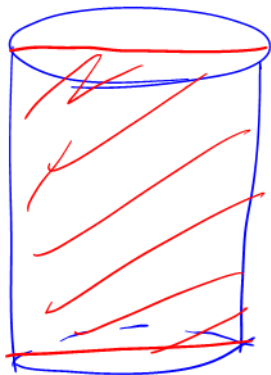
$$S = 14\pi - 4\pi = 10\pi$$



**تمرین ۱۰:** استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۸ داریم. دو صفحه یکی شامل محور استوانه و دیگری عمود بر آن این استوانه را قطع می‌کنند. مساحت سطح مقطع‌های حاصل را بیابید.



$$S = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

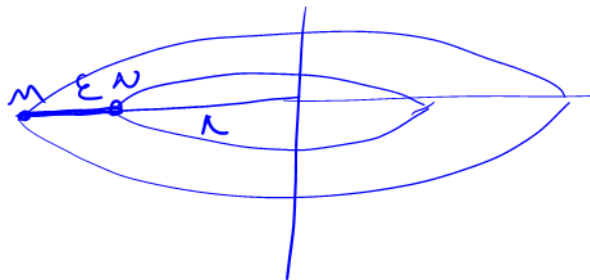
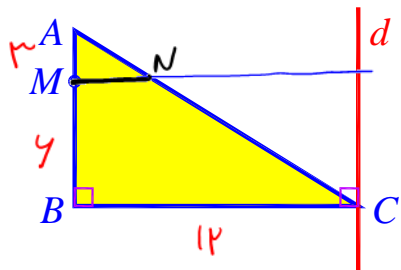


$$S = 4 \times 8 = 32$$



**تمرین ۱۱:** در شکل روبه‌رو،  $BC = ۱۲$  ،  $BM = ۶$  ،  $AM = ۳$  است. شکل حاصل از دوران مثلث

$ABC$  حول خط  $d$  را در نظر بگیرید. صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی  $M$  و عمود بر  $d$  این حجم را قطع می‌کند. مساحت سطح مقطع حاصل را بیابید.



$$\frac{MN}{12} = \frac{r}{9} \rightarrow MN = 4$$

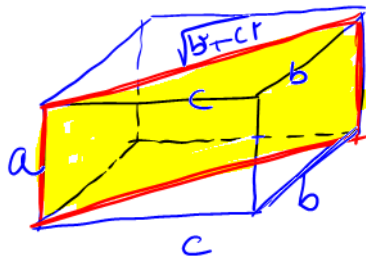
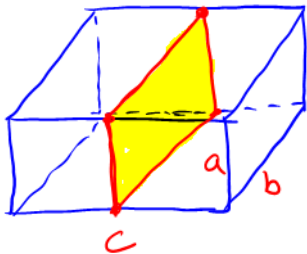
$$S = \pi \times 12^2 - \pi \times 4^2 = 100\pi$$



**تمرین ۱۲:** در یک مکعب مستطیل با اضلاع « ۳ ، ۴ ، ۴ » ، صفحه‌ای عمود بر دو وجه مکعب، در

نظر بگیرید. بیشترین و کمترین مقدار مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد این صفحه با مکعب را

بیابید. (گدرا از مرکز مکعب متغی)



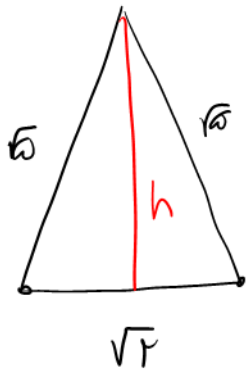
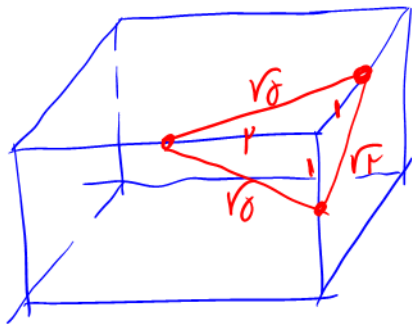
$$S_{\min} = ab = 3 \times 4 = 12$$

$$S_{\max} = a \sqrt{b^2 + c^2} \begin{cases} 3 \sqrt{4^2 + 4^2} = 12\sqrt{2} \\ 4 \sqrt{3^2 + 4^2} = 20 \end{cases}$$



**تمرین ۱۳:** در یک مکعب مستطیل طول اضلاع « ۲ ، ۲ ، ۲ » هستند. سه یالی که در یک رأس

مشترکند را در نظر بگیرید. صفحه‌ای شامل نقاط وسط این سه یال، مکعب را برش می‌دهد. مساحت شکل حاصل از این برش را بیابید.



$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$h^2 = \frac{9}{4} \rightarrow h = \frac{3}{2}$$

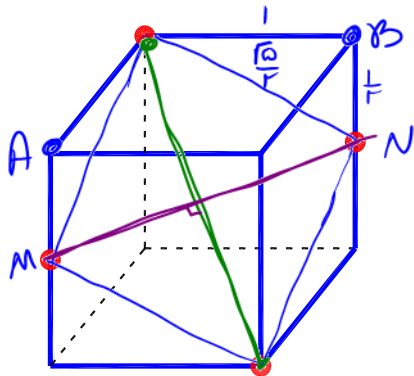
$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$





**تمرین ۱۴:** در شکل روبه‌رو مکعبی به ضلع واحد و چهار نقطه دیده می‌شود. دو تا از نقاط مشخص

شده وسط یال‌ها هستند. مساحت شکل حاصل از سطح مقطع صفحه‌ی گذرنده از این چهار نقطه، با مکعب را بیابید.



$$\text{قطر زرد} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{قطر صورت} = \frac{\text{قطر مکعب}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{قطر مربع} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \xrightarrow{a=b=c} \sqrt{3}a$$



**تمرین ۱۵:** در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع

(سراسری ریاضی فارج ۹۸)

حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

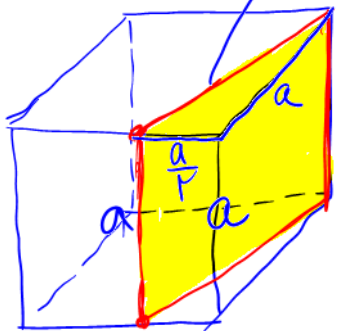
$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$a \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۱) \quad \checkmark$$

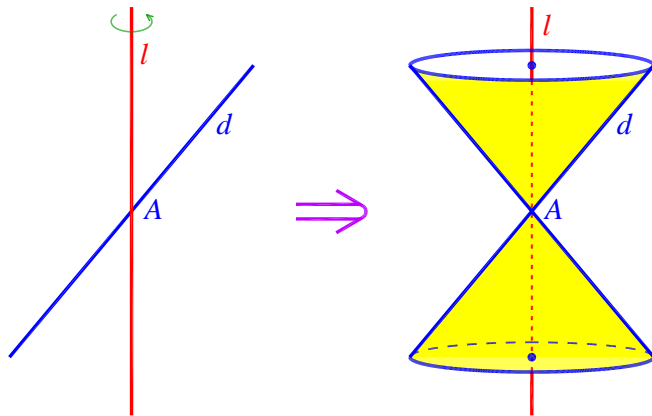


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \times a \frac{\sqrt{5}}{2}}{a \times a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



## مقاطع مخروطی

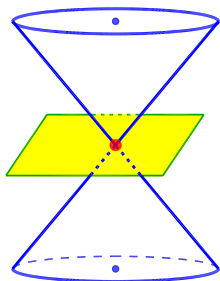
دو خط  $d$  و  $l$  در نقطه‌ای مثل  $A$  متقاطع‌اند. اگر خط  $d$  را حول خط  $l$  دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط  $l$  محور، نقطه‌ی  $A$  رأس و خط  $d$ ، مولد این سطح مخروطی است.



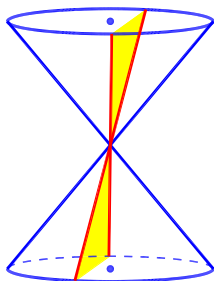
سطح مقطع یک صفحه با سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود.



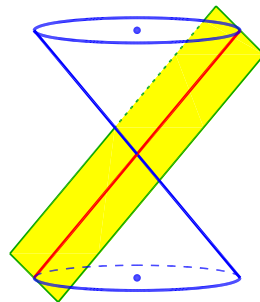
اگر صفحه از رأس مخروطی بگذرد :



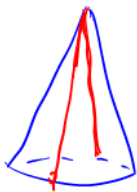
نقطه



دو خط متقاطع

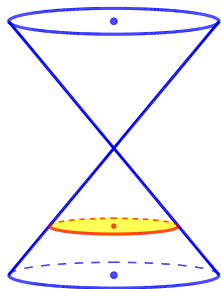


یک خط

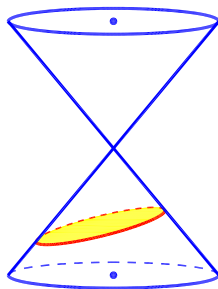




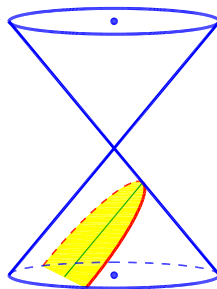
اگر صفحه از رأس مخروطی نگذرد :



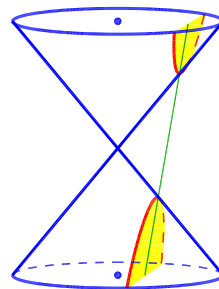
دایره



بیضی



سهمی



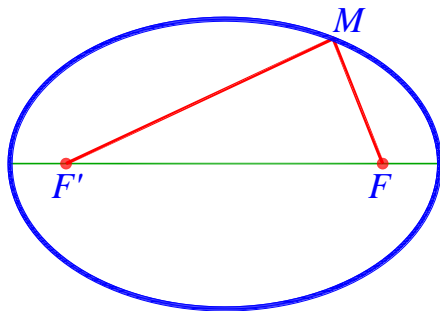
هذلولی

صفحه المولد



## درس ۳: بیضی

تعریف: بیضی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه (که کانون نامیده می‌شوند) برابر با مقدار ثابتی باشد. مقدار ثابت را با  $2a$  نشان می‌دهیم.



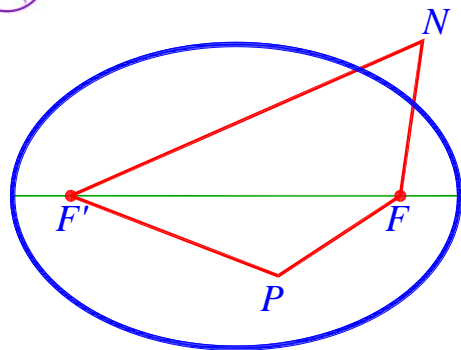
$$MF + MF' = 2a$$

برای رسم بیضی، یک تکه نخ به طول مقدار ثابت را در نظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون ثابت می‌کنیم. حال یک مداد را داخل این نخ کرده و با گرداندن مداد داخل نخ بیضی را رسم می‌کنیم.



درون و بیرون بیضی :

اگر نقطه‌ی  $P$  و  $N$  درون و بیرون بیضی باشند :

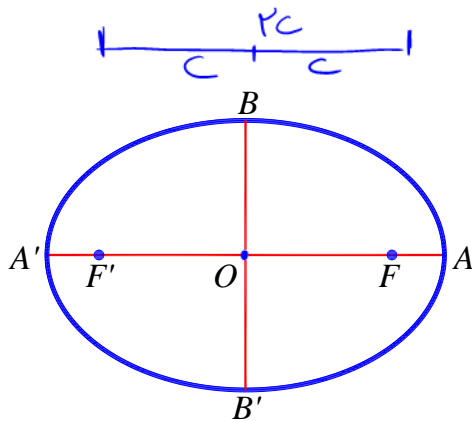


$$NF + NF' > 2a$$

$$PF + PF' < 2a$$



## اجزای بیضی



$AA'$  و  $BB'$  : قطرهای بزرگ و کوچک بیضی و محور تقارن

$$AA' = 2a , BB' = 2b$$

$F$  و  $F'$  : کانون‌های بیضی

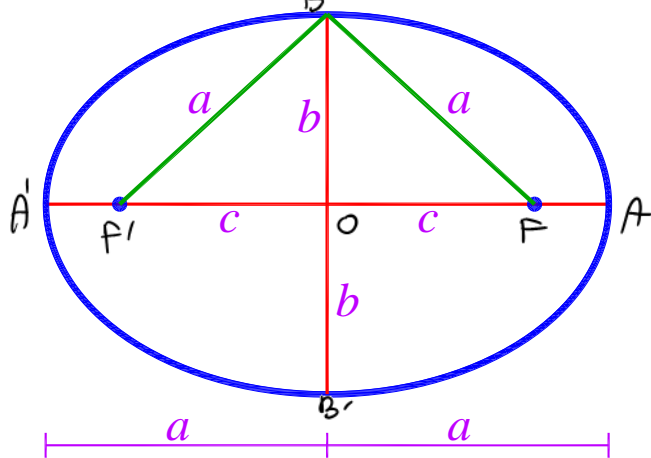
فاصله‌ی کانونی :  $FF' = 2c$

$O$  : مرکز بیضی که مرکز تقارن آن است.





فاصله‌ی نقطه‌های  $B$  و  $B'$  تا دو کانون برابر  $a$  است.



رابطه‌ی مهم بیضی :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

بنابراین عدد  $a$  را در سه جا می‌بینید :

مقدار ثابت بیضی :  $2a$  ، طول قطر بزرگ :  $2a$  ، فاصله‌ی دو سر قطر کوچک تا کانون‌ها



# خروج از مرکز بیضی

به عدد  $e = \frac{c}{a}$  خروج از مرکز بیضی نامیده می شود.

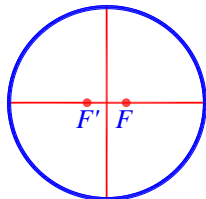
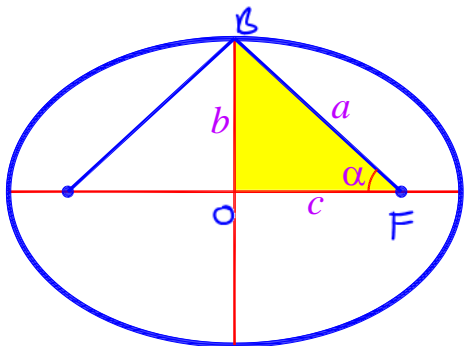
$$e = \frac{c}{a}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

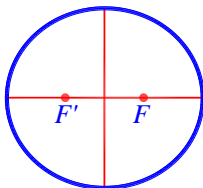
$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$e = \cos \alpha$$

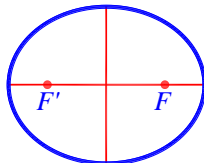
خروج از مرکز شاخص کشیدگی بیضی است. ببینید :



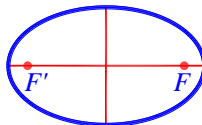
$$e = 0/2$$



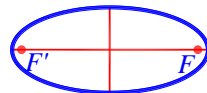
$$e = 0/4$$



$$e = 0/6$$



$$e = 0/8$$

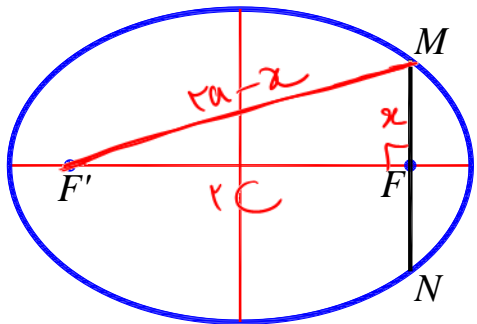


$$e = 0/9$$



## وتر کانونی

به پاره خطی که دو سر آن روی محیط بیضی است و از کانون می گذرد و بر قطر بزرگ عمود است، وتر کانونی می گویند.



$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

$$(c)^2 + x^2 = (2a - x)^2$$

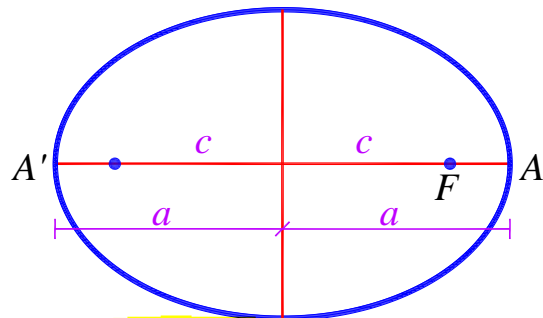
$$c^2 + x^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$$

$$c^2 = 4a^2 - 4ax$$

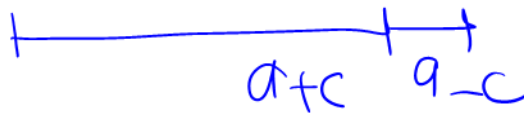
$$x = \frac{4a^2 - c^2}{4a} = \frac{b^2}{a}$$



## فاصله‌ی کانون تا دو سر قطر بزرگ



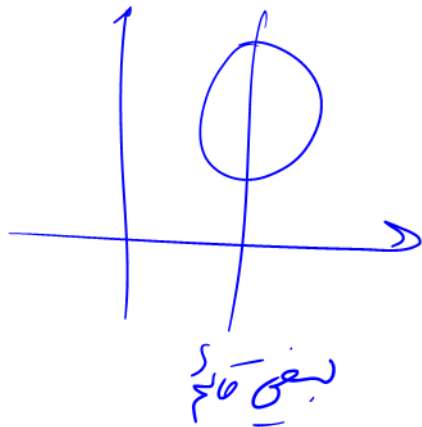
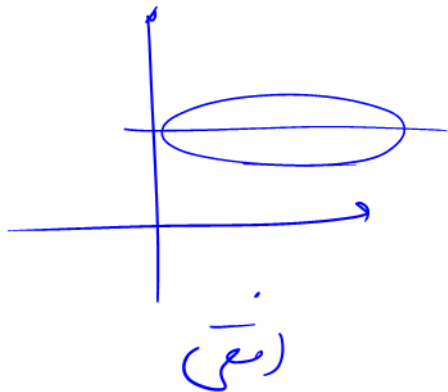
$$FA = a - c \quad , \quad FA' = a + c$$





## بیضی قائم و افقی

هرگاه یک بیضی در دستگاه مختصات قرار بگیرد، در صورتی که قطر بزرگ آن موازی محور  $x$  باشد، آن را بیضی قائم می‌نامند.





**تمرین ۱۶:** در یک بیضی با خروج از مرکز  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$  اگر قطر کوچک ۴ باشد، فاصله‌ی دو سر

قطرهای بزرگ و کوچک را بیابید.

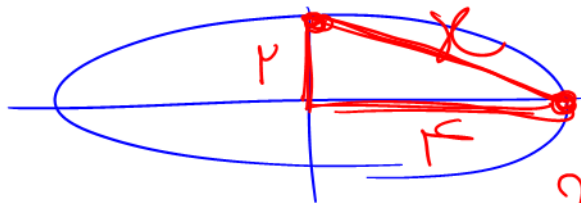
$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$2b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 4 + \frac{3}{4}a^2$$

$$\rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = 4$$

$$a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}$$



$$a = \sqrt{16}$$



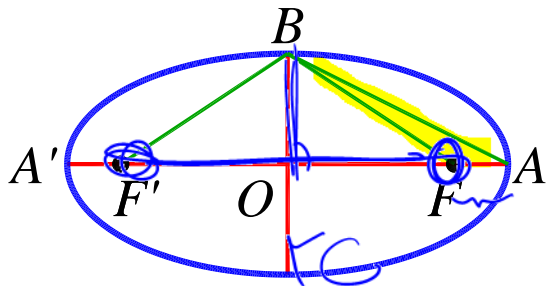
**تمرین ۱۷:** در یک بیضی دورترین و نزدیکترین فاصله‌ی نقاط بیضی تا یکی از کانون‌ها به ترتیب ۱۰ و ۴ است، خروج از مرکز بیضی را بیابید.

$$\begin{cases} a+c=10 \\ a-c=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=7 \\ c=3 \end{cases} \quad e = \frac{c}{a}$$



**تمرین ۱۸:** در شکل روبه‌رو یک بیضی با خروج از مرکز  $2/1$  همراه با قطرهای بزرگ و کوچک آن

رسم شده‌اند. اگر  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی باشند، نسبت مساحت مثلث  $AFB$  به مساحت مثلث  $FBF'$  را بیابید.



$$\frac{S_{AFB}}{S_{FBF'}} = \frac{\frac{1}{2} \times b \times (a-c)}{\frac{1}{2} \times b \times c}$$

$$= \frac{a-c}{c} = \frac{1}{c} \left( \frac{a}{c} - 1 \right) = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = \frac{1}{c} (1-1) = 0$$





تمرین ۱۹: در یک بیضی با خروج از مرکز ۵٪ و طول وترکانونی ۱۲، فاصله‌ی کانونی را بیابید.

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{5} \\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \\ c = ? \end{cases}$$

$$a = 5c$$

$$b^2 = 4a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4a^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^2$$

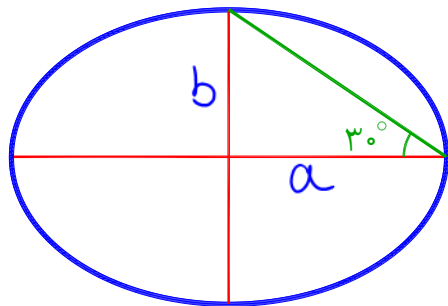
$$\xrightarrow{-a} a = 4 + \frac{a}{25} \rightarrow a = 1 \rightarrow c = \frac{1}{5}$$

۴۹

$$c = \frac{1}{5}$$



تمرین ۲۰: در بیضی شکل روبه‌رو، قطرهای بزرگ و کوچک بیضی رسم شده‌اند. اگر فاصله‌ی کانونی ۶ باشد، طول نخ بیضی را بیابید.



$$\tan \theta = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{r\mu}{\mu}$$

$$rc = y \rightarrow c = r$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = \left(\frac{r\mu}{c\mu}\right)^2 + r^2$$

$$a^2 = \frac{1}{\mu^2} a^2 + 9 \rightarrow \frac{1}{\mu} a^2 = 9 \rightarrow a^2 = \frac{14}{\mu} \quad a = \frac{3\sqrt{14}}{\mu}$$

$$\rightarrow \mu a = 3\sqrt{14}$$



**تمرین ۲۱:** در یک بیضی با خروج از مرکز  $\frac{2}{3}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام

(سراسری ریاضی فارغ ۹۸)

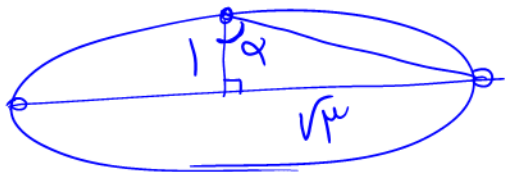
زاویه رؤیت می شود؟

۱۵۰° (۴)

۱۲۰° (۳)

۹۰° (۲)

۶۰° (۱)



$$\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{e}{\mu}}$$

$$c = r_1$$

$$a = r_2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$$

$$b = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{c}{a} \rightarrow \alpha = 90^\circ \rightarrow \angle \alpha = 120^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{r_1}{r_2}$$

۵۱

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \rightarrow \sqrt{\frac{e}{\mu}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\mu}$$

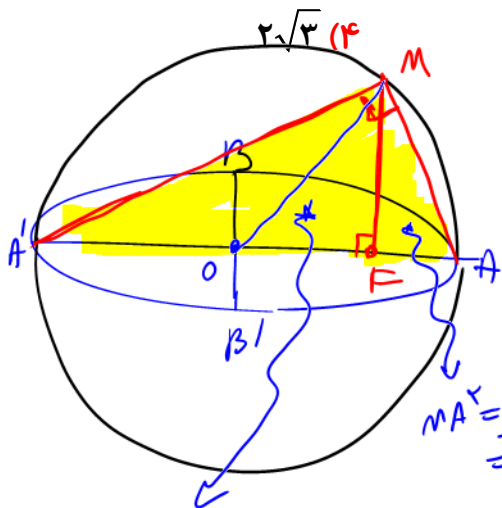


**تمرین ۲۲:** یک بیضی به قطرهای  $AA' = 14$  و  $BB' = 4\sqrt{6}$  و کانون  $F$  نزدیک به نقطه  $A$ ، مفروض

است. خط عمود بر قطر  $AA'$  از نقطه  $F$ ، دایره به قطر  $AA'$  را در نقطه  $M$  قطع می‌کند. اندازه

پاره خط  $AM$ ، کدام است؟

(سراسری ریاضی قاجار ۹۹)



$$2\sqrt{6} \quad (3)$$

$$2\sqrt{7} \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

$$AMA' : MA^2 = AF \times AA'$$

$$MA^2 = (a - c) \times a$$

$$MA^2 = MF^2 + FA^2 = (2\epsilon + \epsilon) = (3 - 0) \times 14 = 42$$

$$MA = \sqrt{42}$$

$$r_a = 14$$

$$r_b = 4\sqrt{6}$$

$$a = 7$$

$$b = 2\sqrt{6}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = 0$$

$$42 = 0^2 + MF^2 \rightarrow MF^2 = 42$$



تمرین ۲۳: در یک بیضی به قطرهای ۸ و  $2\sqrt{7}$  واحد و کانون‌های  $F$  و  $F'$ ، دایره‌ای به قطر  $F'F$

بیضی را در نقطه  $M$ ، قطع می‌کند. فاصله نقطه  $M$  تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

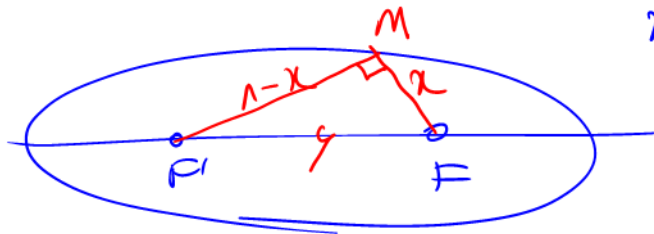
۲/۵ (۲)

$4 - 2\sqrt{2}$  (۱)

۳ (۴)

$4 - \sqrt{2}$  (۳)

$$\begin{cases} a = \varepsilon \\ b = r\sqrt{7} \end{cases} \quad a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4$$



$$x^2 + (4-x)^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{7}$$

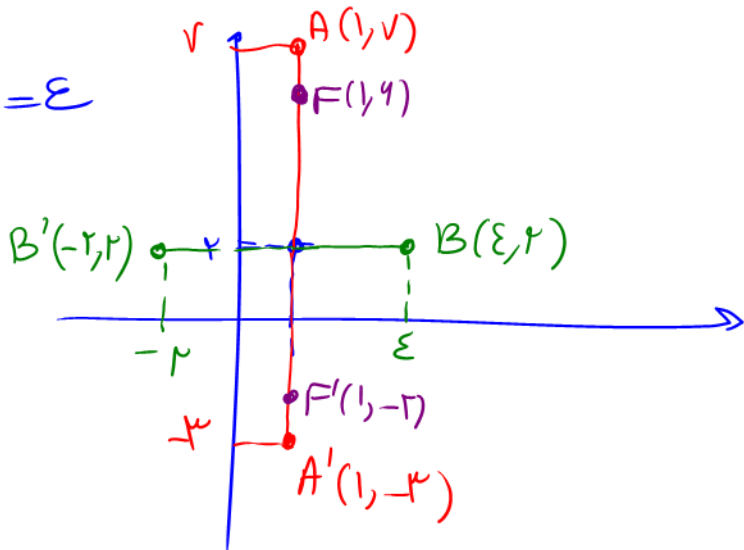


تمرین ۲۴: در یک بیضی قائم به مرکز  $(1, 2)$ ، طول قطرهای بزرگ و کوچک ۱۰ و ۶ است. مختصات

کانون‌ها و دو سر قطر بزرگ و کوچک را بیابید.

$$2a = 10$$

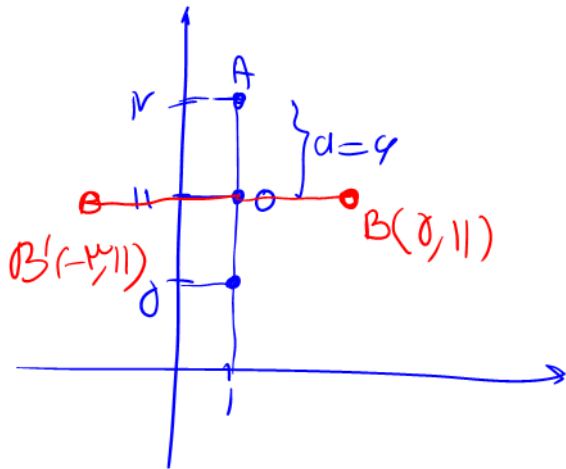
$$2b = 6 \rightarrow a = 5, b = 3, c = 4$$





تمرین ۲۵: در یک بیضی، مختصات دو سر قطر بزرگ  $(1, 5)$  و  $(1, 17)$  و فاصله‌ی کانونی  $4\sqrt{5}$  است.

مختصات دو سر قطر کوچک را بیابید.



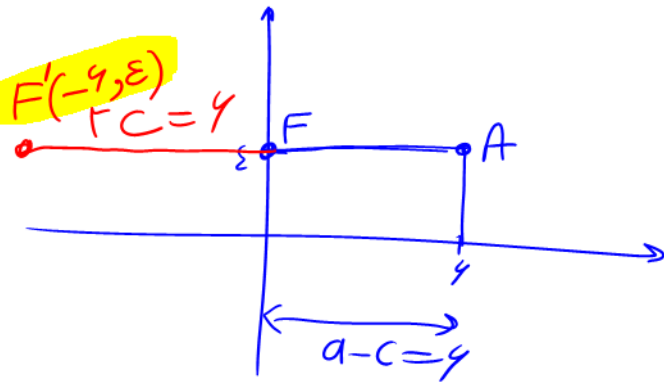
$$a = 9$$

$$2c = 4\sqrt{5} \rightarrow c = 2\sqrt{5} \rightarrow b = 3$$



**تمرین ۲۶:** در یک بیضی افقی با خروج از مرکز  $e = \frac{1}{3}$ ، مختصات یک سر قطر بزرگ بیضی

$A(6, 4)$  و کانون نزدیک به آن روی محور  $y$  قرار دارد. مختصات کانون دیگر بیضی را مشخص کنید.



$$\begin{cases} a - c = 4 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 3c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 9 \\ c = 3 \end{cases}$$



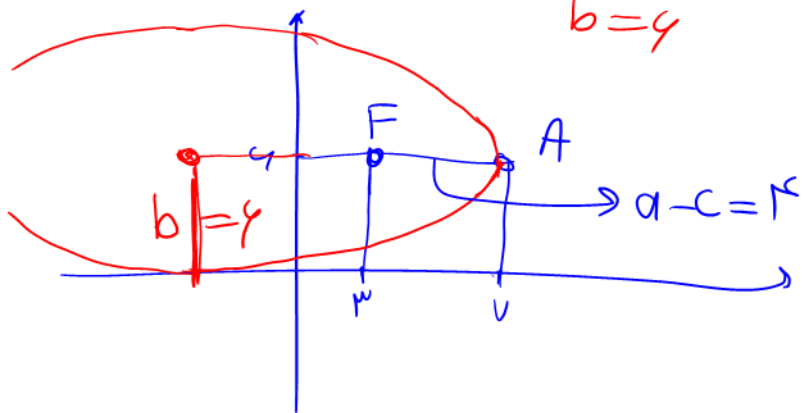


**تمرین ۲۷:** در یک بیضی، مختصات یک کانون (۳, ۶) و یک سر قطر بزرگ که به این کانون

نزدیکتر است، (۷, ۶) می باشد. اگر این بیضی بر محور  $x$  مماس باشد، طول نخ لازم برای رسم بیضی

را بیابید.

$$b = 4$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 - c^2 = 16$$

$$(a-c)(a+c) = 16$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\varepsilon}$

$$\begin{cases} a-c = \varepsilon \\ a+c = 9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 2a = 13$$

$$\rightarrow a+c = 9$$

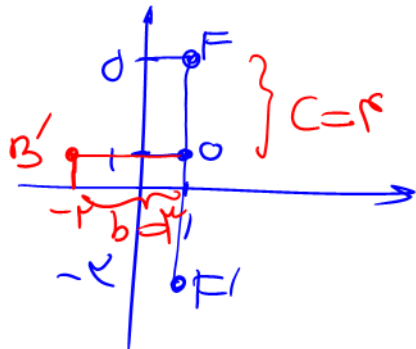


**تمرین ۲۸:** در یک بیضی مختصات کانون‌ها  $(1, 5)$ ،  $(1, -3)$  است. اگر بیضی از نقطه‌ی  $(-2, 1)$  بگذرد، خروج از مرکز آن را بیابید.

$M$   $F'$   $F$

$$MF + MF' = 2a \rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{3^2 + 6^2} = 2a \rightarrow 10 = 2a = a = 5$$

$$FF' = 2c \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4 \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$



$$\rightarrow a = 5$$



## تمرین ۲۹

در یک بیضی به کانون‌های  $(2, -1)$  و  $(2, 7)$  ، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(سراسری تهرانی ۹۸)

۱)  $\frac{1}{6}$

۲)  $\frac{1}{64}$

۳)  $\frac{1}{75}$

۴)  $\frac{1}{8}$

$$2c = 6 \rightarrow c = 3$$

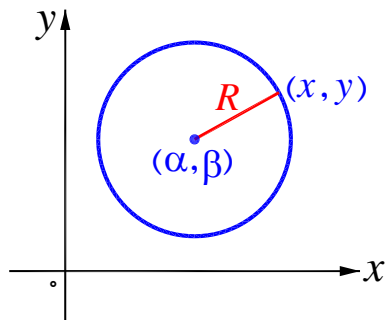
$$\rightarrow a = 5 \rightarrow e = \frac{4}{5}$$

$$2b = 6 \rightarrow b = 3$$



# دایره

## معادله‌ی دایره



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

این رابطه را معادله‌ی استاندارد دایره گویند.

معادله‌ی باز شده را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

این رابطه را معادله‌ی گسترده دایره گویند.



با مربع کامل کردن، می توان فرم گسترده ی دایره را به فرم استاندارد تبدیل کرد :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$$

که در این صورت، اگر عدد سمت راست یعنی  $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$  :

منفی باشد، هیچ نقطه ای در این رابطه صدق نمی کند.

صفر باشد، فقط یک نقطه در این رابطه صدق می کند.

مثبت باشد، دایره ای است به مرکز  $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$  و شعاع  $R$  که  $R = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c}$ .



**تمرین ۳۰:** دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  را رسم کنید. محدوده‌ی تغییرات  $x$  و  $y$  (دامنه و برد) را تعیین کنید.



**تمرین ۳۱:** اگر  $ax^2 + y^2 + x - 3y = x^2 + b$  معادله‌ی یک دایره به شعاع ۲ باشد، مقادیر  $a$  و  $b$

بیابید.



## وضع نقطه با دایره

نقطه‌ی  $A = (x_0, y_0)$  و دایره به معادله‌ی  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$  را در نظر بگیرید.  
فاصله‌ی مرکز دایره، یعنی  $O = (\alpha, \beta)$  تا نقطه‌ی  $A$  را  $d$  می‌نامیم:

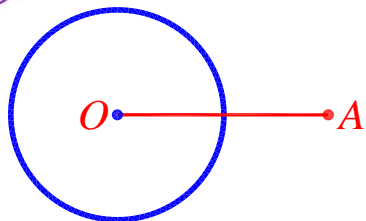
$$|OA| = d = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2}$$

اگر مقدار حاصل از قرار دادن مختصات نقطه‌ی  $A$  در معادله‌ی دایره را  $f(A)$  بنامیم:

$$f(A) = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2 \Rightarrow f(A) = d^2 - R^2$$

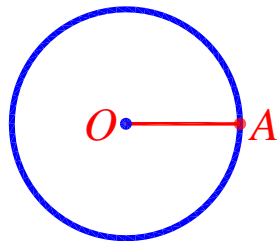
خواهیم داشت:





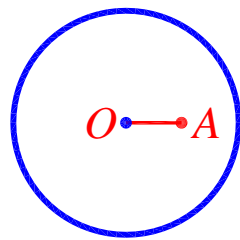
$$d > R \Rightarrow f(A) > \circ$$

$A$  بیرون دایره است.



$$d = R \Rightarrow f(A) = \circ$$

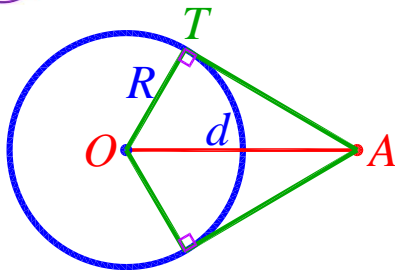
$A$  روی محیط دایره است.



$$d < R \Rightarrow f(A) < \circ$$

$A$  درون دایره است.

وقتی نقطه‌ی  $A$  بیرون دایره است، طول مماس رسم شده از نقطه‌ی  $A$  بر دایره برابر  $\sqrt{f(A)}$  است.



$$d^2 = R^2 + AT^2 \Rightarrow AT = \sqrt{d^2 - R^2} = \sqrt{f(A)}$$



**تمرین ۳۲ :** دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = a$  و نقطه  $A(1, 2)$  بیرون آن مفروض است. حدود  $a$  را بیابید.



**تمرین ۳۳:** از نقطه‌ی  $A(3, -1)$  دو مماس بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2$  رسم شده است. طول

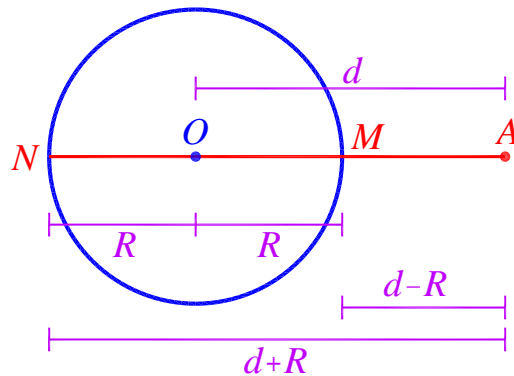
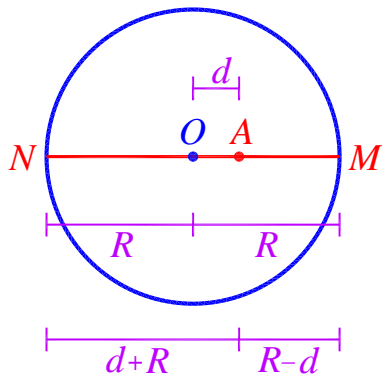
این دو مماس و زاویه‌ی بین آنها را بیابید.



**تمرین ۳۴ :** طول مماسی که از نقطه‌ی  $A(1, 2)$  بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 4x = a$  رسم می‌شود برابر ۲ است. مقدار  $a$  را بیابید.



## دورترین و نزدیکترین فاصله‌ی یک نقطه تا محیط دایره



دورترین فاصله :  $d + R$

نزدیکترین فاصله :  $|d - R|$

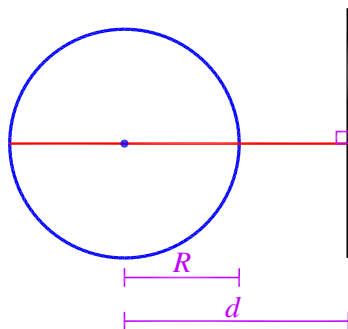


**تمرین ۳۵:** اگر دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی  $A(2,1)$  از دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 2x - 10y = a$  برابر ۸ باشد، عدد  $a$  و نزدیکترین فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  تا محیط دایره را تعیین کنید.



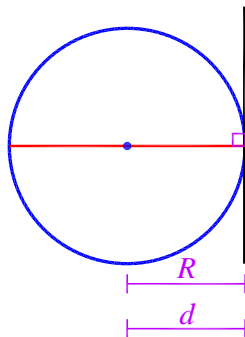
## وضع خط با دایره

اگر شعاع دایره  $R$  و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مفروض برابر  $d$  باشد :



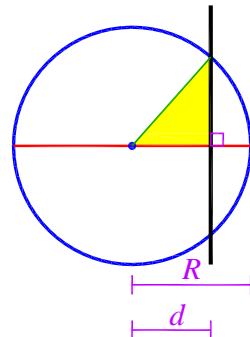
$$d > R$$

دورترین و نزدیکترین فاصله نقاط محیط دایره تا خط  $d \pm R$  است.



$$d = R$$

خط بر دایره مماس است.



$$d < R$$

طول وتر ایجاد شده توسط دایره روی خط به کمک رابطه فیثاغورس به دست می‌آید.

تذکر : با قطع دادن معادله خط با دایره نیز می‌توان وضعیت را فهمید. معادله درجه دومی ایجاد می-

شود که صفر، یک یا دو جواب دارد.





**تمرین ۳۶:** وضع خط  $x + y = 4$  را با دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 8$  را تعیین کرده و دورترین

فاصله‌ی نقاط محیط دایره تا خط را بیابید.



تمرین ۳۷ : خط  $3x - y = 5$  بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = k$  مماس است.  $k$  را بیابید.



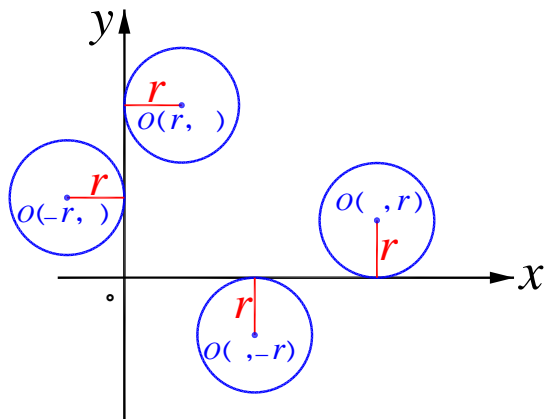
**تمرین ۳۸ :** خط  $y = x + a$  دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 4x = 5$  را در وترى به طول ۲ قطع می‌کند.  $a$  را

بیابید.



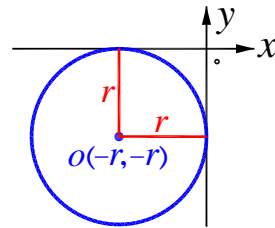
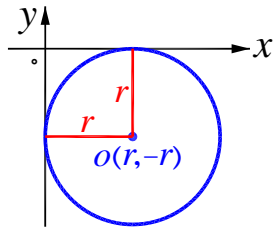
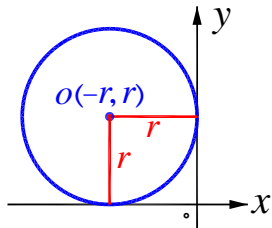
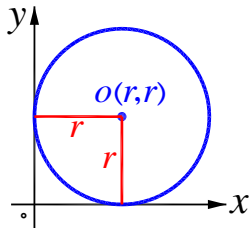
## دایره مماس بر محورهای مختصات

دایره‌ای که بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد، قدر مطلق  $x$  یا  $y$  مرکزش برابر شعاع دایره است. ببینید :





بنابراین دایره‌ی مماس بر هر دو محور مختصات، قدرمطلق  $x$  و  $y$  مرکز آن برابر شعاع دایره است در واقع مرکز آن روی نیمساز یکی از ربع‌های مختصات است.





**تمرین ۳۹ :** دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 2ax + 4ay = a - 2$  در زیر محور  $x$  بر آن مماس است. عدد  $a$  را

بیابید.



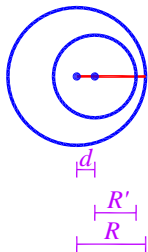
**تمرین ۴۰ :** دایره‌ی که از نقطه‌ی  $(۲, -۹)$  می‌گذرد، بر هر دو محور مماس است. معادله‌ی دایره کوچکتر را بنویسید.



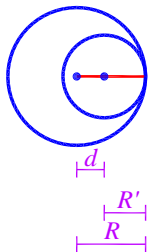
## وضع نسبی دو دایره

باید فاصله‌ی دو مرکز ( $d$ ) را با جمع و تفریق شعاع‌ها ( $R$  و  $R'$ ) مقایسه کنیم.

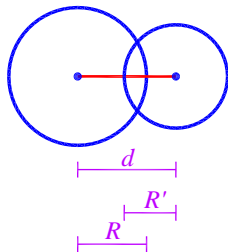
دو دایره متداخل



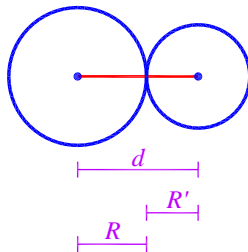
دو دایره مماس درونی



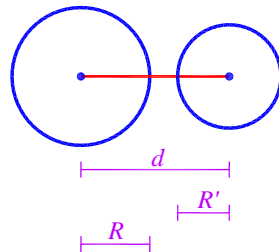
دو دایره متقاطع



دو دایره مماس بیرونی



دو دایره فارغ هم (متفارج)



$$d < |R - R'|$$


$$d = |R - R'|$$

$$|R - R'| < d < R + R'$$

$$d = R + R'$$

$$d > R + R'$$



 تمرین ۴۱: وضع نسبی دو دایره به معادله‌های  $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$  و  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 22$  را مشخص کنید.



**تمرین ۴۲:** وضع نسبی دو دایره به معادله‌های  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$  و  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$  را مشخص کنید.



**تمرین ۴۳ :** دو دایره به معادله‌های  $x^2 - 2x + y^2 - 2y = k$  و  $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 16 = 0$  خارج یکدیگرند. حدود  $k$  را مشخص کنید.



تمرین ۴۴: دو دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 2x = 3$  و  $x^2 + y^2 - 6x - 6y + a = 0$  مماس درونی‌اند. مقدار  $a$

را بیابید.



**تمرین ۴۵:** دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x = a$  درون دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 8x + 9$  قرار دارد. مجموعه‌ی مقادیر  $a$  را مشخص کنید.



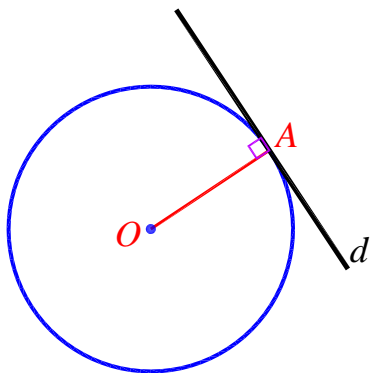
**تمرین ۴۶:** دو دایره به معادله‌های  $x^2 + y^2 = 6$  و  $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 6 = 0$  در نقاط  $A$  و  $B$  متقاطع‌اند. طول پاره‌خط  $AB$  و معادله‌ی این خط را بنویسید.



**تمرین ۴۷:** شعاع بزرگترین دایره‌ای به مرکز  $(۳, ۴)$  که بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 = ۱$  مماس باشد، را بیابید.



## مماس و قائم بر دایره



نقطه‌ی  $A$  را روی دایره‌ای به مرکز  $O$  را در نظر بگیرید.  
خطی که در نقطه‌ی  $A$  بر  $OA$  عمود شود، خط مماس بر دایره است.  
خط  $OA$  نیز خط عمود (قائم) بر دایره است. در واقع :  
هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.





**تمرین ۴۸:** معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$  در نقطه‌ی  $A(2,1)$  را بیابید.



**تمرین ۴۹:** معادله‌ی خطی را بیابید که بر هر دو دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 2x$  و  $x^2 + y^2 = 4y$  عمود

باشد.



## حل مسئله‌های مختلف

**تمرین ۵۰:** دایره‌ای که دو سر یک قطر آن  $A(-۸, ۵)$  و  $B(-۲, -۳)$  هستند، چند نقطه‌ی مشترک با محورهای مختصات دارد؟



**تمرین ۵۱:** معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن بر نیمساز ربع اول و سوم باشد و از نقاط  $A(۲,۴)$  و  $B(۴,-۶)$  بگذرد، را بنویسید.



**تمرین ۵۲ :** مرکز دایره‌ای روی خط  $x + y = 3$  و شعاع آن  $\sqrt{5}$  است. این دایره بر خط  $2x + y = 1$  مماس است. مرکز دایره را بیابید.



**تمرین ۵۳:** دو خط  $y = x + 7$  و  $y = 2x + 3$  بر دایره‌ای عمود هستند. این دایره بر محور  $x$  مماس است. شعاع این دایره را بیابید.



**تمرین ۵۴:** معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن روی محور  $x$  ها باشد و بر دو خط  $y = x + 1$  و  $y = x + 9$  مماس شود، را بیابید.



تمرین ۵۵ : معادله‌ی دایره‌ای که از نقاط  $A(1,2)$ ،  $B(3,3)$  و  $C(-1,6)$  می‌گذرد، را بنویسید.





**تمرین ۵۶:** معادله‌ی قطرهای دایره‌ای به صورت  $(m-1)x + (2-m)y = 5m-3$  است. این دایره از کجای  
نقطه‌ی  $A(3,3)$  می‌گذرد. شعاع این دایره را بیابید.



۵۷- دایره‌ای از نقاط  $(1,1)$  و  $(5,1)$  می‌گذرد و بر خط  $y = 2$  مماس است، شعاع این دایره را بیابید.



۵۸- وتر مشترک دایره‌ی  $C$  با دایره به معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 4x = 6$  منطبق بر نیمساز ناحیه‌ی اول

است. اگر دایره‌ی  $C$  از نقطه‌ی  $(-1, 4)$  بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

$$(1) \quad x^2 + y^2 - y + 3x = 6$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 2y - x = 6$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2y + x = 6$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 3y - x = 6$$

۵۹- نقطه‌ی  $A(-1, 4)$  مرکز یک دایره است که بر روی خط  $2x - 3y + 1 = 0$  وترى به طول  $2\sqrt{7}$  جدا

(سراسری تهری قارج ۹۸)

می کند. این دایره خط  $y = 2$  را با کدام طول قطع می کند؟

$$-1 \pm \sqrt{3} \quad (4)$$

$$-1 \pm \sqrt{2} \quad (3)$$

$$2, -4 \quad (2)$$

$$3, -5 \quad (1)$$



۶۰- از بین دایره‌های گذرا از نقطه  $A(1, -4)$  و مماس بر خط‌های  $4x + 3y = 0$  و محور  $y$  ها،

(سراسری ریاضی ۹۹)

بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

$$\frac{22}{9} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$\frac{17}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$