



حسابان / رشته ریاضی

ریاضی / رشته تجربی

کنکور ۱۴۰۰

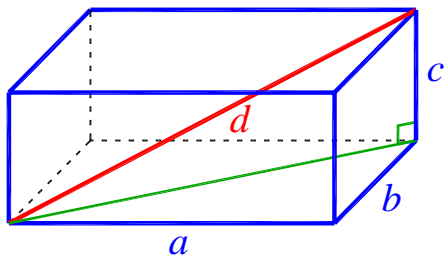
فصل بیستم : تفکر تجسمی، مقاطع مخروطی

مهرداد عباسپور



یادآوری

در مکعب مستطیل :

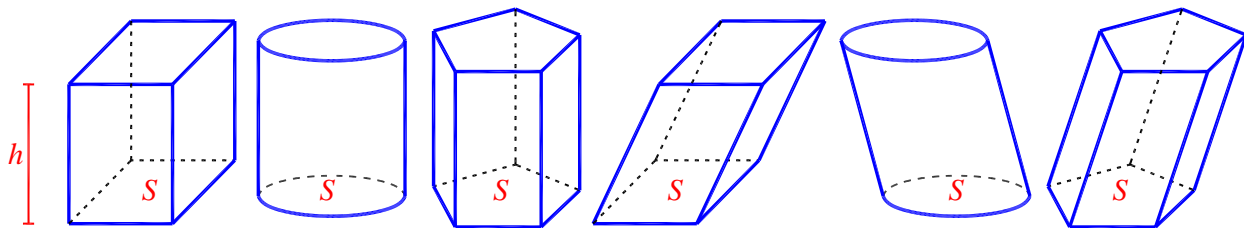


$$\text{حجم} : V = a \cdot b \cdot c$$

$$\text{قطر} : d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



در شکل‌های منشوری :



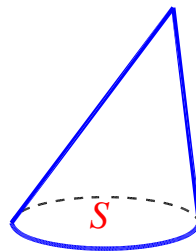
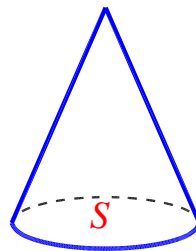
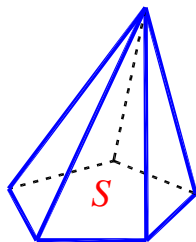
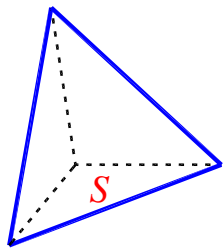
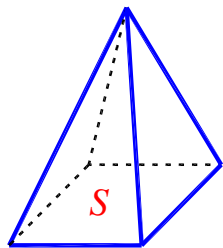
مساحت قاعده \times ارتفاع = حجم

$$V = h \cdot S$$



در شکل‌های هرمی :

h

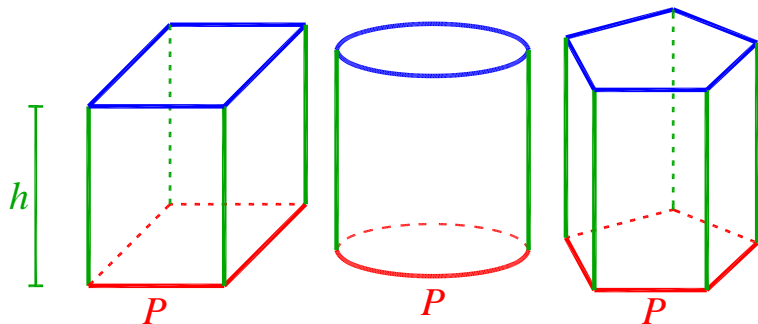


مساحت قاعده \times ارتفاع $\times \frac{1}{3}$ = حجم

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S$$



در شکل‌های به صورت منشور قائم :

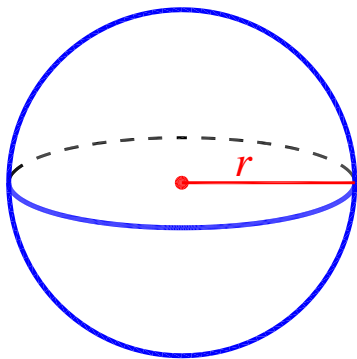


محیط قاعده \times ارتفاع = مساحت جانبی

$$A = h \cdot P$$



در کره به شعاع r :

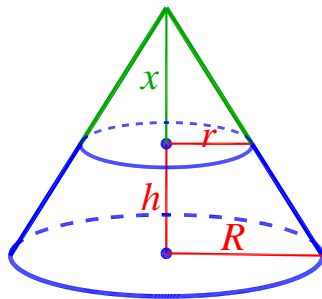
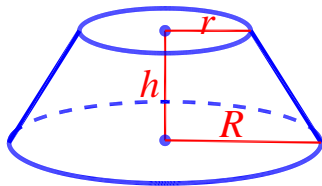


$$\text{حجم} : V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{مساحت} : A = 4\pi r^2$$



در مخروط ناقص :

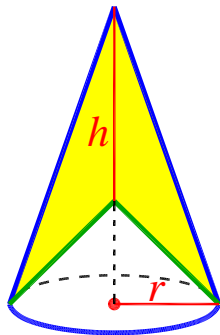
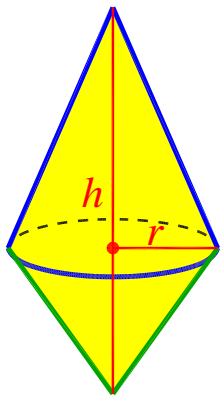


$$\text{حجم} : V = \frac{1}{3}h \cdot (r^2 + rR + R^2)\pi$$

برای اثبات، کافی است x را به کمک قضیه تالس حساب کنید و حجم دو مخروط را کم کنید.



جمع و تفریق دو مخروط با قاعده‌های یکسان :



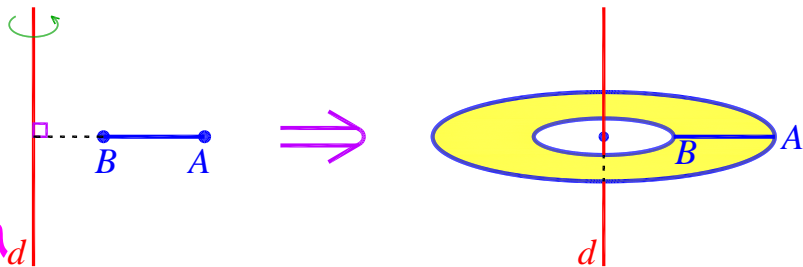
$$\text{حجم} : V = \frac{1}{3}h \cdot (r^2 \pi)$$

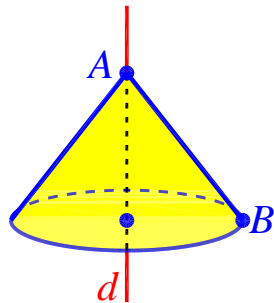
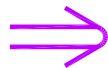
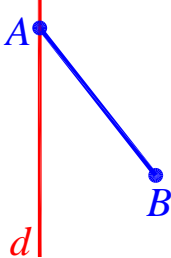
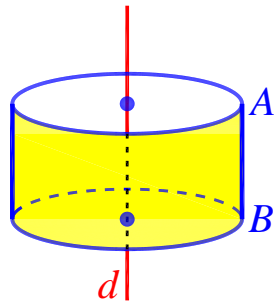
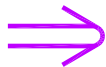
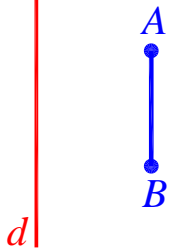
برای مناسبی حجم آن کافی است دو مخروط را جمع یا تفریق کنیم.



دوران حول محور

دوران پاره خط AB حول خط d :

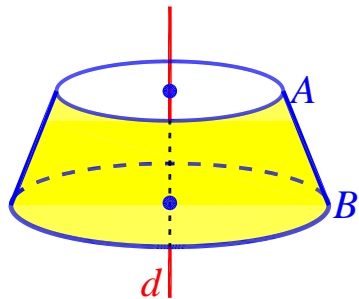
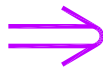




۱۰

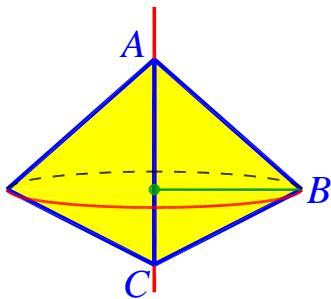
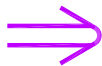
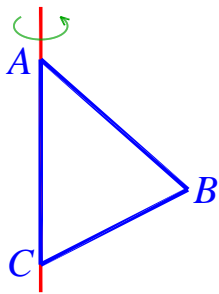
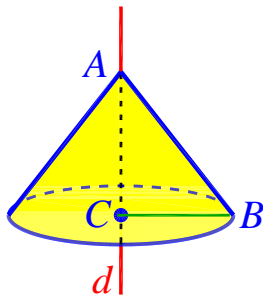
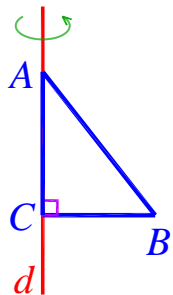


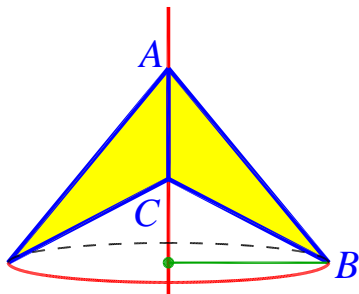
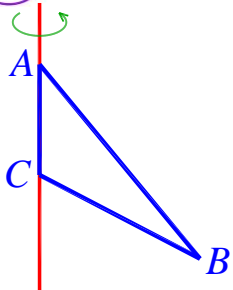
d





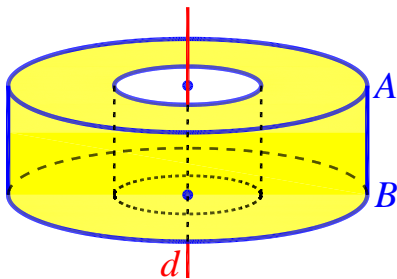
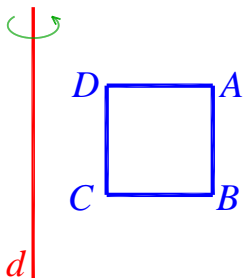
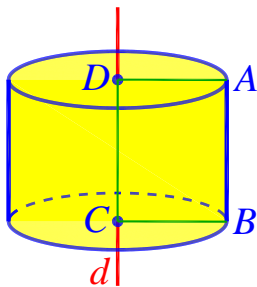
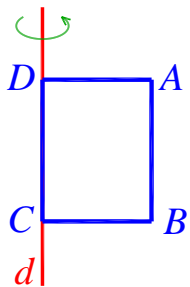
دوران مثلث حول یک ضلع :





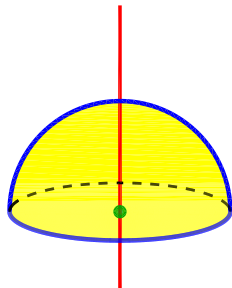
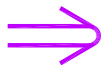
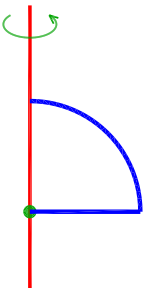
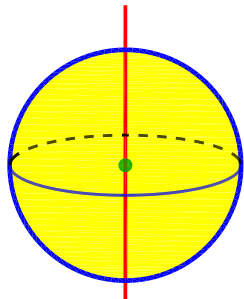
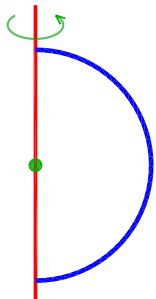


دوران مستطیل حول یک خط :



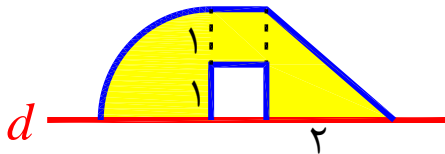


دوران نیم‌دایره و ربع‌دایره حول خط :





تمرین ۱: در شکل روبه‌رو، یک ربع دایره، مربع و مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین می‌بینید. با توجه به اندازه‌های داده شده، حجم شکل حاصل از دوران ناحیه‌ی سایه زده حول خط d را بیابید.



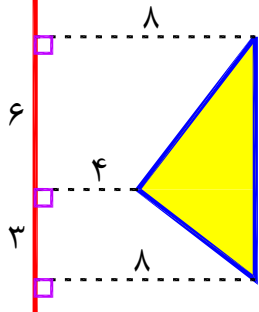


تمرین ۲: حجم شکل حاصل از دوران یک مثلث با اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ رو حول ضلع متوسط بیابید.



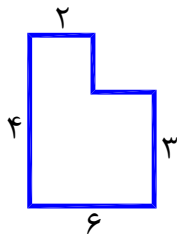
تمرین ۳ : حجم شکل حاصل از دوران یک مثلث با اضلاع ۵ ، ۵ و ۶ رو حول ضلع به طول ۵ را بیابید.

تمرین ۴ : حجم شکل حاصل از دوران مثلث حول خط نشان داده شده را بیابید.



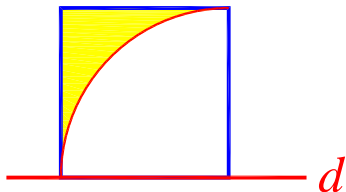


تمرین ۵: در شکل روبه‌رو، هر دو خط موازی یا بر هم عمودند. حجم شکل حاصل از دوران این شکل، حول ضلع به طول ۳ را بیابید.





تمرین ۶: در شکل روبه‌رو، یک ربع دایره به شعاع ۳ و یک مربع می‌بینید. حجم حاصل از دوران شکل سایه زده، حول خط d را بیابید.





تمرین ۷ : حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC ، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

۷۰π (۲)

۶۰π (۱)

۸۰π (۴)

۷۵π (۳)

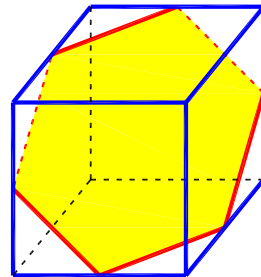
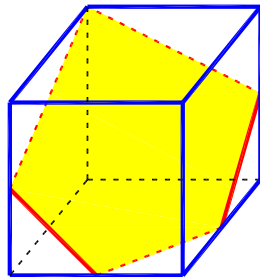
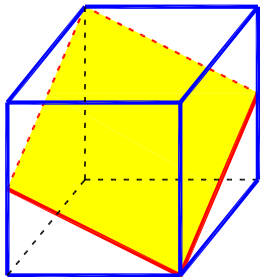
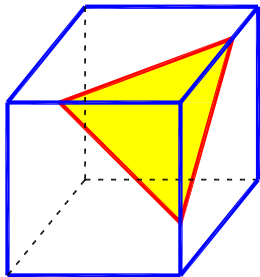
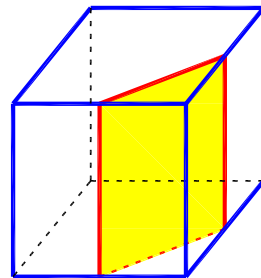
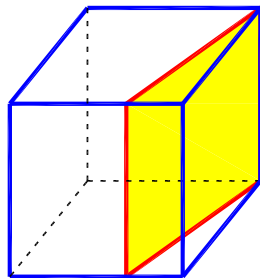
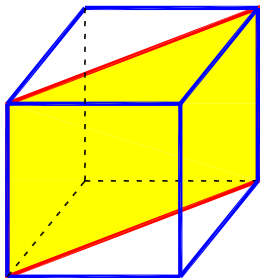
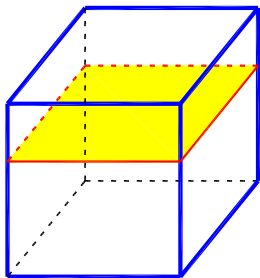


برش، مقاطع مخروطی

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نام دارد.

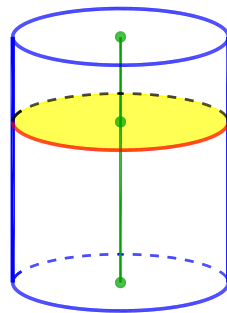
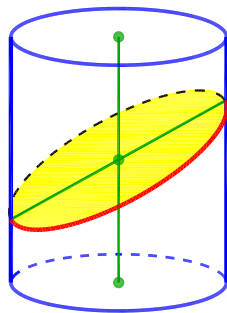
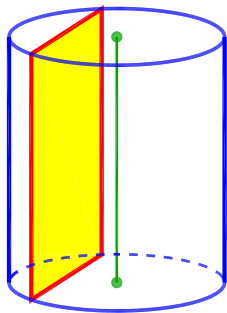
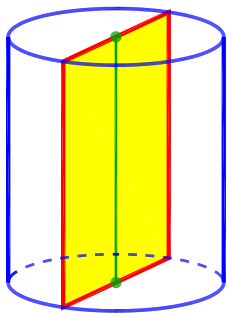


سطح مقطع صفحه با مکعب



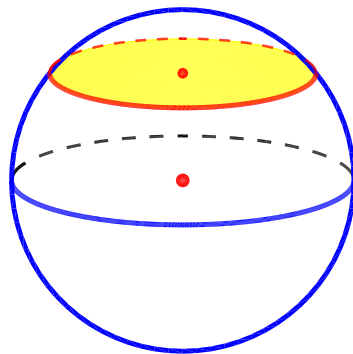
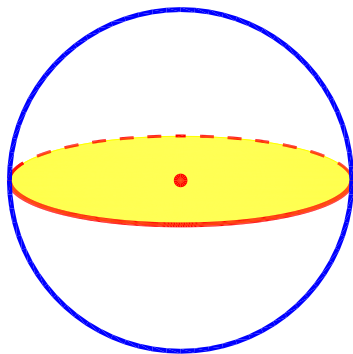


سطح مقطع صفحه با استوانه





سطح مقطع صفحه با کره



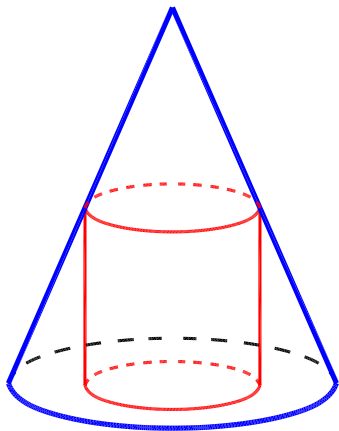


تمرین ۸ : نیم کره‌ای به شعاع ۶ داریم. صفحه‌ای عمود بر قاعده‌ی آن و به فاصله‌ی ۳ واحد از مرکز

آن را در نظر بگیرید. سطح مقطع حاصل چه شکلی است و مساحت آن چقدر است؟



تمرین ۹: در شکل روبه‌رو، یک مخروطی توپر به شعاع قاعده‌ی ۶ و ارتفاع ۱۲ می‌بینید. از درون آن یک استوانه به ارتفاع ۸ را خالی می‌کنیم. صفحه‌ای به موازات دو قاعده استوانه و وسط آنها این حجم را قطع می‌کند. مساحت سطح مقطع را بیابید.

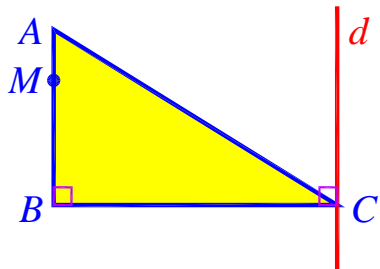




تمرین ۱۰: استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۸ داریم. دو صفحه یکی شامل محور استوانه و دیگری عمود بر آن این استوانه را قطع می‌کنند. مساحت سطح مقطع‌های حاصل را بیابید.



تمرین ۱۱: در شکل روبه‌رو، $AM = 3$ ، $BM = 6$ ، $BC = 12$ است. شکل حاصل از دوران مثلث ABC حول خط d را در نظر بگیرید. صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی M و عمود بر d این حجم را قطع می‌کند. مساحت سطح مقطع حاصل را بیابید.





تمرین ۱۲: در یک مکعب مستطیل با اضلاع « ۳ ، ۴ ، ۴ » ، صفحه‌ای عمود بر دو وجه مکعب، در نظر بگیرید. بیشترین و کمترین مقدار مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد این صفحه با مکعب را بیابید.

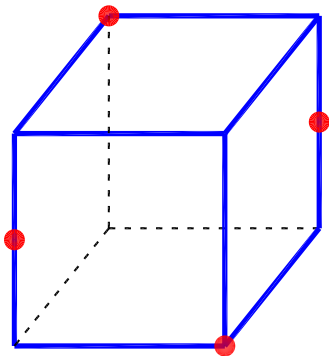


تمرین ۱۳: در یک مکعب مستطیل طول اضلاع « ۲ ، ۲ ، ۴ » هستند. سه یالی که در یک رأس مشترکند را در نظر بگیرید. صفحه‌ای شامل نقاط وسط این سه یال، مکعب را برش می‌دهد. مساحت شکل حاصل از این برش را بیابید.



تمرین ۱۴: در شکل روبه‌رو مکعبی به ضلع واحد و چهار نقطه دیده می‌شود. دو تا از نقاط مشخص

شده وسط یال‌ها هستند. مساحت شکل حاصل از سطح مقطع صفحه‌ی گذرنده از این چهار نقطه، با مکعب را بیابید.





تمرین ۱۵: در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع

(سراسری ریاضی فارج ۹۸)

حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

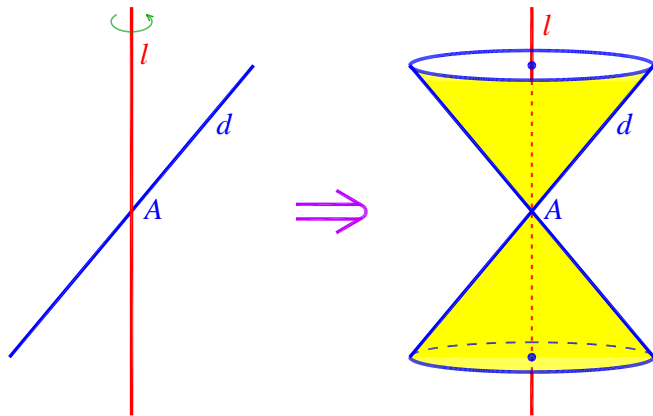
$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۱)$$



مقاطع مخروطی

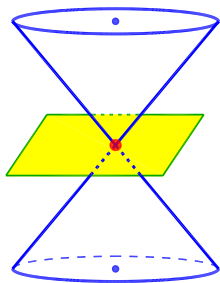
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط l محور، نقطه‌ی A رأس و خط d ، مولد این سطح مخروطی است.



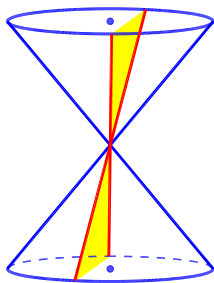
سطح مقطع یک صفحه با سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود.



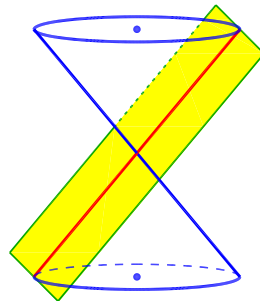
اگر صفحه از رأس مخروطی بگذرد :



نقطه



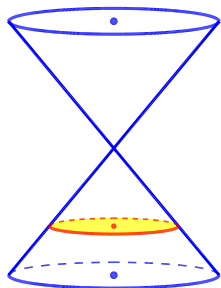
دو خط متقاطع



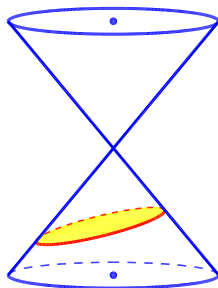
یک خط



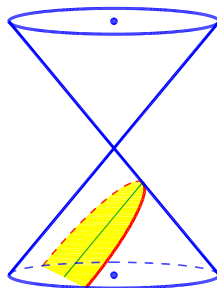
اگر صفحه از رأس مخروطی نگذرد :



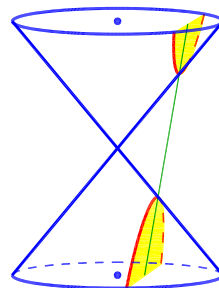
دایره



بیضی



سهمی

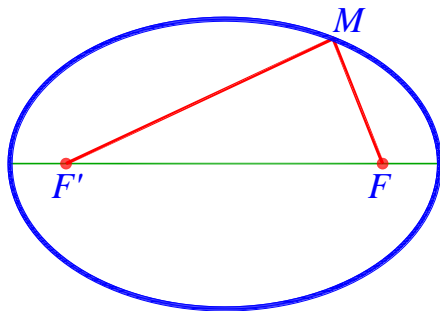


هذلولی



درس ۳: بیضی

تعریف: بیضی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه (که کانون نامیده می‌شوند) برابر با مقدار ثابتی باشد. مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهیم.



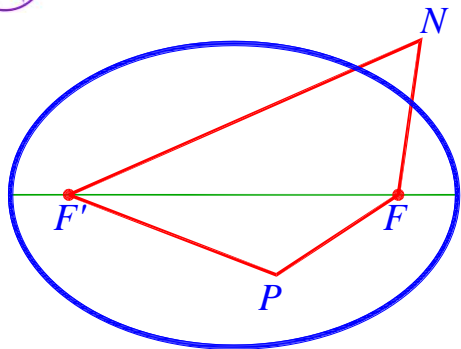
$$MF + MF' = 2a$$

برای رسم بیضی، یک تکه نخ به طول مقدار ثابت را در نظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون ثابت می‌کنیم. حال یک مداد را داخل این نخ کرده و با گرداندن مداد داخل نخ بیضی را رسم می‌کنیم.



درون و بیرون بیضی :

اگر نقطه‌ی P و N درون و بیرون بیضی باشند :

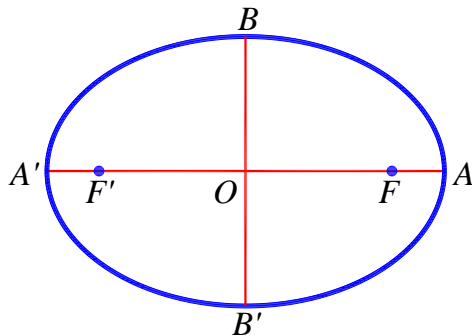


$$NF + NF' > 2a$$

$$PF + PF' < 2a$$



اجزای بیضی



AA' و BB' : قطرهای بزرگ و کوچک بیضی و محور تقارن

$$AA' = 2a \text{ , } BB' = 2b$$

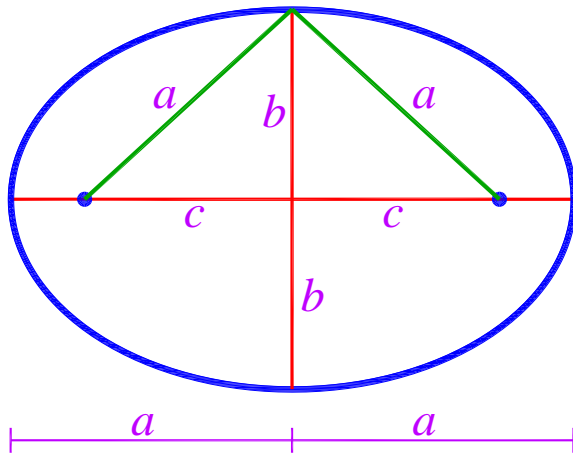
F و F' : کانون‌های بیضی

فاصله‌ی کانونی : $FF' = 2c$

O : مرکز بیضی که مرکز تقارن آن است.



فاصله‌ی نقطه‌های B و B' تا دو کانون برابر a است.



رابطه‌ی مهم بیضی :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

بنابراین عدد a را در سه جا می‌بینید :

مقدار ثابت بیضی : $2a$ ، طول قطر بزرگ : $2a$ ، فاصله‌ی دو سر قطر کوچک تا کانون‌ها



خروج از مرکز بیضی

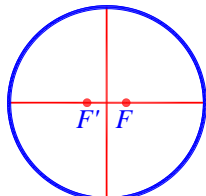
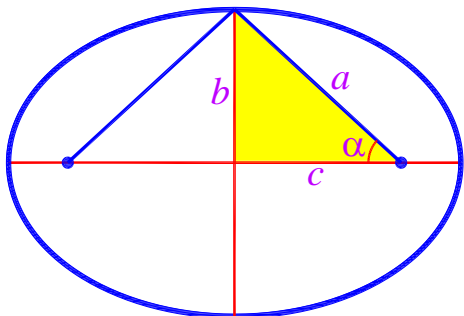
به عدد $e = \frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی نامیده می شود.

$$e = \frac{c}{a}$$

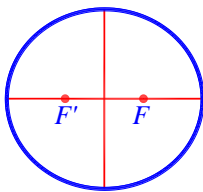
$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$e = \cos \alpha$$

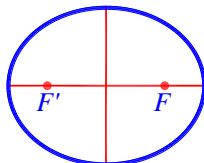
خروج از مرکز شاخص کشیدگی بیضی است. ببینید :



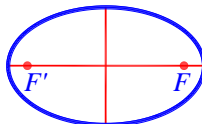
$$e = 0/2$$



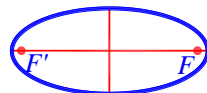
$$e = 0/4$$



$$e = 0/6$$



$$e = 0/8$$

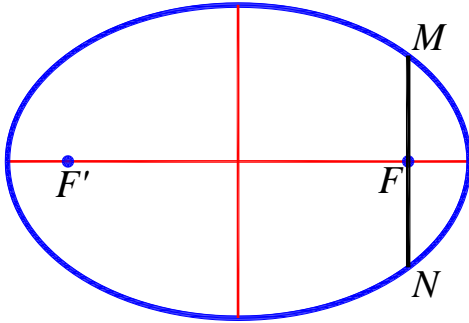


$$e = 0/9$$



وتر کانونی

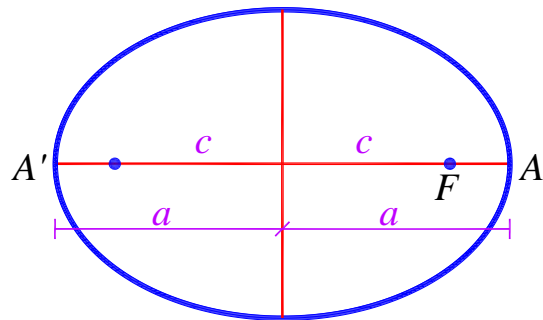
به پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط بیضی است و از کانون می‌گذرد و بر قطر بزرگ عمود است، وتر کانونی می‌گویند.



$$MN = \frac{2b^2}{a}$$



فاصله‌ی کانون تا سر قطر بزرگ



$$FA = a - c \quad , \quad FA' = a + c$$



بیضی قائم و افقی

هرگاه یک بیضی در دستگاه مختصات قرار بگیرد، در صورتی که قطر بزرگ آن موازی محور x باشد، آن را بیضی افقی و اگر موازی محور y باشد آن را بیضی قائم می‌نامند.



تمرین ۱۶: در یک بیضی با خروج از مرکز $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اگر قطر کوچک ۴ باشد، فاصله‌ی دو سر

قطرهای بزرگ و کوچک را بیابید.

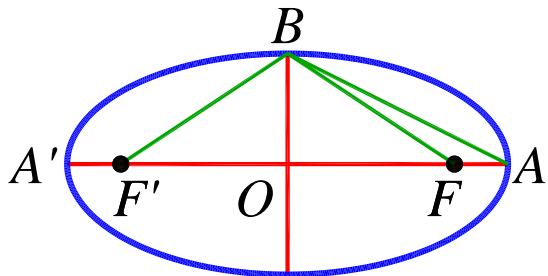


تمرین ۱۷: در یک بیضی دورترین و نزدیکترین فاصله‌ی نقاط بیضی تا یکی از کانون‌ها به ترتیب ۱۰ و ۴ است، خروج از مرکز بیضی را بیابید.



تمرین ۱۸: در شکل روبه‌رو یک بیضی با خروج از مرکز $2/0$ همراه با قطرهای بزرگ و کوچک آن

رسم شده‌اند. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، نسبت مساحت مثلث AFB به مساحت مثلث FBF' را بیابید.

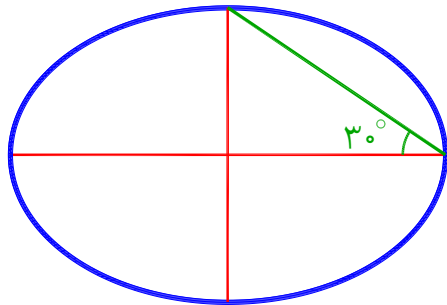




تمرین ۱۹: در یک بیضی با خروج از مرکز $۵/۰\%$ و طول وترکانونی ۱۲، فاصله‌ی کانونی را بیابید.



تمرین ۲۰: در بیضی شکل روبه‌رو، قطرهای بزرگ و کوچک بیضی رسم شده‌اند. اگر فاصله‌ی کانونی ۶ باشد، طول نخ بیضی را بیابید.





تمرین ۲۱: در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام

(سراسری ریاضی فارغ ۹۸)

زاویه رؤیت می شود؟

۱۵۰° (۴)

۱۲۰° (۳)

۹۰° (۲)

۶۰° (۱)



تمرین ۲۲: یک بیضی به قطرهای $AA' = ۱۴$ و $BB' = ۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض

است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M ، قطع می‌کند. اندازه

پاره خط AM ، کدام است؟

(سراسری ریاضی قارج ۹۹)

$۲\sqrt{۳}$ (۴)

$۲\sqrt{۶}$ (۳)

$۲\sqrt{۷}$ (۲)

۷ (۱)



تمرین ۲۳: در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{7}$ واحد و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر $F'F$

بیضی را در نقطه M ، قطع می‌کند. فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

(۱) $4 - 2\sqrt{2}$

(۲) $2/5$

(۴) ۳

(۳) $4 - \sqrt{2}$



تمرین ۲۴ : در یک بیضی قائم به مرکز $(۱, ۲)$ ، طول قطرهای بزرگ و کوچک ۱۰ و ۶ است. مختصات کانون‌ها و دو سر قطر بزرگ و کوچک را بیابید.



تمرین ۲۵ : در یک بیضی، مختصات دو سر قطر بزرگ $(۱,۵)$ و $(۱,۱۷)$ و فاصله‌ی کانونی $۴\sqrt{۵}$ است. مختصات دو سر قطر کوچک را بیابید.



تمرین ۲۶ : در یک بیضی افقی با خروج از مرکز $e = \frac{1}{3}$ ، مختصات یک سر قطر بزرگ بیضی

$A(6, 4)$ و کانون نزدیک به آن روی محور y قرار دارد. مختصات کانون دیگر بیضی را مشخص کنید.



تمرین ۲۷: در یک بیضی، مختصات یک کانون $(۳,۶)$ و یک سر قطر بزرگ که به این کانون نزدیکتر است، $(۷,۶)$ می باشد. اگر این بیضی بر محور x مماس باشد، طول نخ لازم برای رسم بیضی را بیابید.



تمرین ۲۸: در یک بیضی مختصات کانون‌ها $(1, 5)$ ، $(1, -3)$ است. اگر بیضی از نقطه‌ی $(-2, 1)$ بگذرد، خروج از مرکز آن را بیابید.



تمرین ۲۹: در یک بیضی به کانون‌های $(-1, 2)$ و $(7, 2)$ ، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از

(سراسری تپیری ۹۸)

مرکز این بیضی کدام است؟

۰/۸ (۴)

۰/۷۵ (۳)

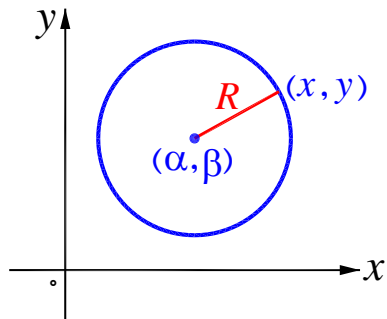
۰/۶۴ (۲)

۰/۶ (۱)



دایره

معادله‌ی دایره



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

این رابطه را معادله‌ی استاندارد دایره گویند.

معادله‌ی باز شده را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

این رابطه را معادله‌ی گسترده دایره گویند.



با مربع کامل کردن، می توان فرم گسترده ی دایره را به فرم استاندارد تبدیل کرد :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$$

که در این صورت، اگر عدد سمت راست یعنی $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$:

منفی باشد، هیچ نقطه ای در این رابطه صدق نمی کند.

صفر باشد، فقط یک نقطه در این رابطه صدق می کند.

مثبت باشد، دایره ای است به مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ و شعاع R که $R = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c}$.



تمرین ۳۰: دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ را رسم کنید. محدوده‌ی تغییرات x و y (دامنه و برد) را تعیین کنید.



تمرین ۳۱: اگر $ax^2 + y^2 + x - 3y = x^2 + b$ معادله‌ی یک دایره به شعاع ۲ باشد، مقادیر a و b

بیابید.



وضع نقطه با دایره

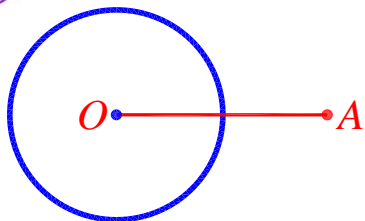
نقطه‌ی $A = (x_0, y_0)$ و دایره به معادله‌ی $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ را در نظر بگیرید.
فاصله‌ی مرکز دایره، یعنی $O = (\alpha, \beta)$ تا نقطه‌ی A را d می‌نامیم:

$$|OA| = d = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2}$$

اگر مقدار حاصل از قرار دادن مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی دایره را $f(A)$ بنامیم:

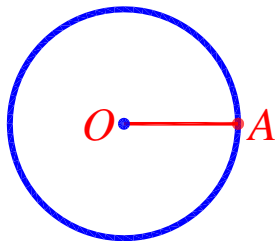
$$f(A) = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2 \Rightarrow f(A) = d^2 - R^2$$

خواهیم داشت:



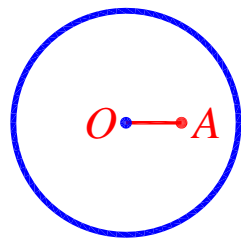
$$d > R \Rightarrow f(A) > \circ$$

A بیرون دایره است.



$$d = R \Rightarrow f(A) = \circ$$

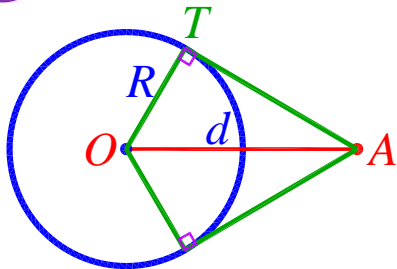
A روی محیط دایره است.



$$d < R \Rightarrow f(A) < \circ$$

A درون دایره است.

وقتی نقطه‌ی A بیرون دایره است، طول مماس رسم شده از نقطه‌ی A بر دایره برابر $\sqrt{f(A)}$ است. 



$$d^2 = R^2 + AT^2 \Rightarrow AT = \sqrt{d^2 - R^2} = \sqrt{f(A)}$$



تمرین ۳۲ : دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 2y = a$ و نقطه $A(1, 2)$ بیرون آن مفروض است. حدود a را بیابید.



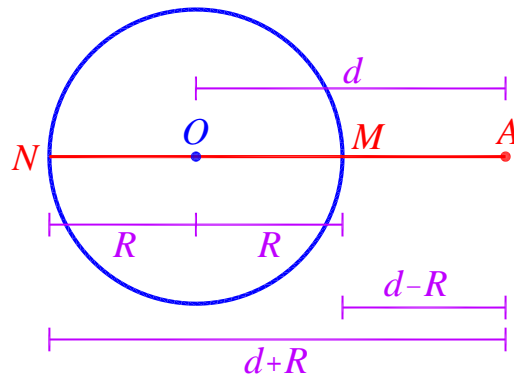
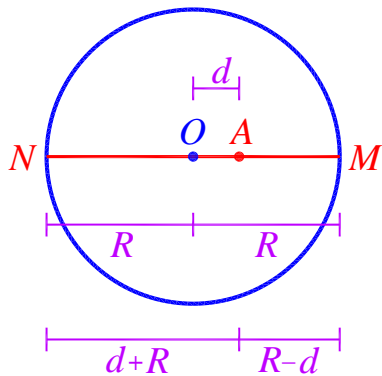
تمرین ۳۳: از نقطه‌ی $A(3, -1)$ دو مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2$ رسم شده است. طول این دو مماس و زاویه‌ی بین آنها را بیابید.



تمرین ۳۴ : طول مماسی که از نقطه‌ی $A(1, 2)$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x = a$ رسم می‌شود برابر ۲ است. مقدار a را بیابید.



دورترین و نزدیکترین فاصله‌ی یک نقطه تا محیط دایره



دورترین فاصله : $d + R$

نزدیکترین فاصله : $|d - R|$

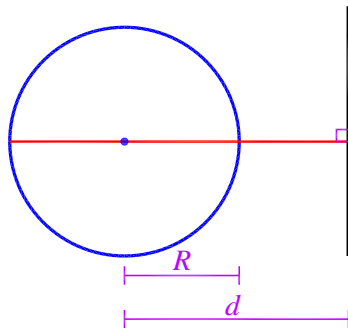


تمرین ۳۵: اگر دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2,1)$ از دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2x - 10y = a$ برابر ۸ باشد، عدد a و نزدیکترین فاصله‌ی نقطه‌ی A تا محیط دایره را تعیین کنید.



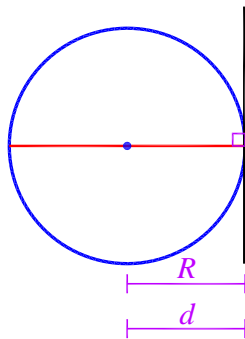
وضع خط با دایره

اگر شعاع دایره R و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مفروض برابر d باشد :



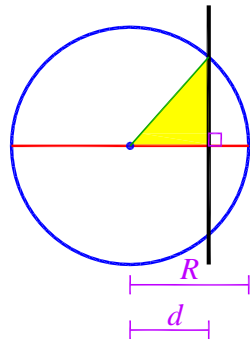
$$d > R$$

دورترین و نزدیکترین فاصله نقاط محیط دایره تا خط $d \pm R$ است.



$$d = R$$

خط بر دایره مماس است.



$$d < R$$

طول وتر ایجاد شده توسط دایره روی خط به کمک رابطه فیثاغورس به دست می‌آید.

تذکر : با قطع دادن معادله خط با دایره نیز می‌توان وضعیت را فهمید. معادله درجه دومی ایجاد می-

شود که صفر، یک یا دو جواب دارد.



تمرین ۳۶: وضع خط $x + y = 4$ را با دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 8$ را تعیین کرده و دورترین

فاصله‌ی نقاط محیط دایره تا خط را بیابید.



تمرین ۳۷ : خط $3x - y = 5$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 8x + 6y = k$ مماس است. k را بیابید.



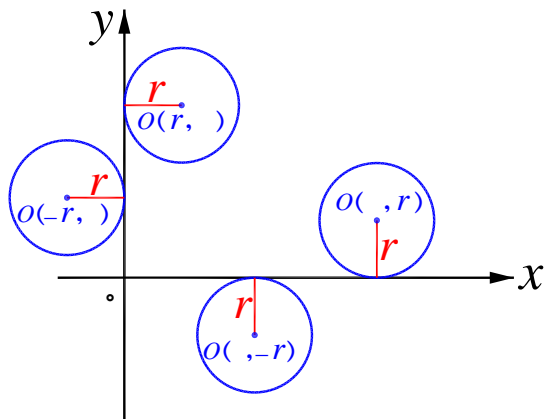
تمرین ۳۸ : خط $y = x + a$ دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 5$ را در وترى به طول ۲ قطع می‌کند. a را

بیابید.



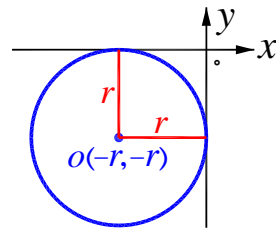
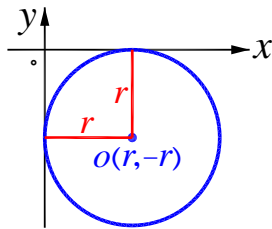
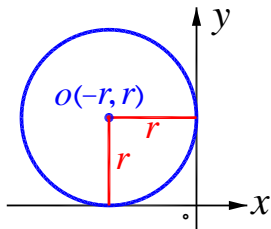
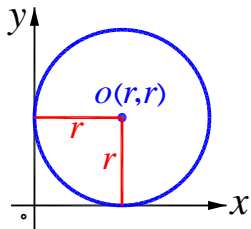
دایره مماس بر محورهای مختصات

دایره‌ای که بر یکی از محورهای مختصات مماس باشد، قدر مطلق x یا y مرکزش برابر شعاع دایره است. ببینید :





بنابراین دایره‌ی مماس بر هر دو محور مختصات، قدرمطلق x و y مرکز آن برابر شعاع دایره است در واقع مرکز آن روی نیمساز یکی از ربع‌های مختصات است.





تمرین ۳۹ : دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2ax + 4ay = a - 2$ در زیر محور x بر آن مماس است. عدد a را

بیابید.



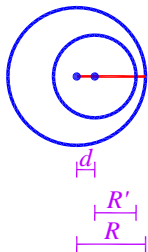
تمرین ۴۰ : دایره‌ی که از نقطه‌ی $(۲, -۹)$ می‌گذرد، بر هر دو محور مماس است. معادله‌ی دایره کوچکتر را بنویسید.



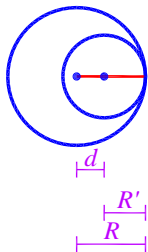
وضع نسبی دو دایره

باید فاصله‌ی دو مرکز (d) را با جمع و تفریق شعاع‌ها (R و R') مقایسه کنیم.

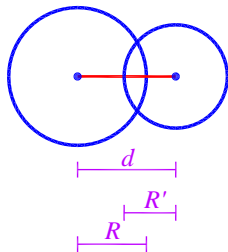
دو دایره متداخل



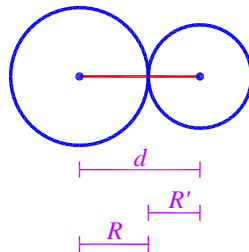
دو دایره مماس درونی



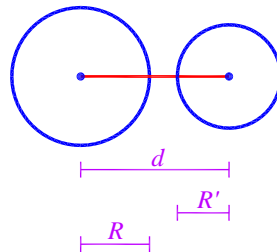
دو دایره متقاطع



دو دایره مماس بیرونی



دو دایره فارغ هم (متفارج)




$$d < |R - R'|$$

$$d = |R - R'|$$

$$|R - R'| < d < R + R'$$

$$d = R + R'$$

$$d > R + R'$$

 تمرین ۴۱: وضع نسبی دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 22$ را مشخص کنید.



تمرین ۴۲: وضع نسبی دو دایره به معادله‌های $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ و $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ را مشخص کنید.



تمرین ۴۳ : دو دایره به معادله‌های $x^2 - 2x + y^2 - 2y = k$ و $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 16 = 0$ خارج یکدیگرند. حدود k را مشخص کنید.



تمرین ۴۴: دو دایره $x^2 + y^2 + 2x = 3$ و $x^2 + y^2 - 6x - 6y + a = 0$ مماس درونی اند. مقدار a

را بیابید.



تمرین ۴۵: دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x = a$ درون دایره‌ی $x^2 + y^2 = 8x + 9$ قرار دارد. مجموعه‌ی مقادیر a را مشخص کنید.



تمرین ۴۶: دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 = 6$ و $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 6 = 0$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. طول پاره‌خط AB و معادله‌ی این خط را بنویسید.

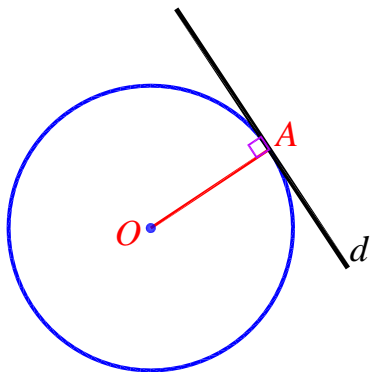


تمرین ۴۷: شعاع بزرگترین دایره‌ای به مرکز $(۳, ۴)$ که بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = ۱$ مماس باشد، را

بیابید.



مماس و قائم بر دایره



نقطه‌ی A را روی دایره‌ای به مرکز O را در نظر بگیرید.
خطی که در نقطه‌ی A بر OA عمود شود، خط مماس بر دایره است.
خط OA نیز خط عمود (قائم) بر دایره است. در واقع :
هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.



تمرین ۴۸: معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$ در نقطه‌ی $A(2,1)$ را بیابید.



تمرین ۴۹: معادله‌ی خطی را بیابید که بر هر دو دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 4y$ عمود

باشد.



حل مسئله‌های مختلف

تمرین ۵۰: دایره‌ای که دو سر یک قطر آن $A(-۸, ۵)$ و $B(-۲, -۳)$ هستند، چند نقطه‌ی مشترک با محورهای مختصات دارد؟



تمرین ۵۱: معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن بر نیمساز ربع اول و سوم باشد و از نقاط $A(۲,۴)$ و $B(۴,-۶)$ بگذرد، را بنویسید.



تمرین ۵۲ : مرکز دایره‌ای روی خط $x + y = 3$ و شعاع آن $\sqrt{5}$ است. این دایره بر خط $2x + y = 1$ مماس است. مرکز دایره را بیابید.



تمرین ۵۳: دو خط $y = x + 7$ و $y = 2x + 3$ بر دایره‌ای عمود هستند. این دایره بر محور x مماس است. شعاع این دایره را بیابید.



تمرین ۵۴: معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن روی محور x ها باشد و بر دو خط $y = x + 1$ و $y = x + 9$ مماس شود، را بیابید.



تمرین ۵۵ : معادله‌ی دایره‌ای که از نقاط $A(1,2)$ ، $B(3,3)$ و $C(-1,6)$ می‌گذرد، را بنویسید.



تمرین ۵۶: معادله‌ی قطرهای دایره‌ای به صورت $3 - 5m = (m - 1)x + (2 - m)y$ است. این دایره از کجای
نقطه‌ی $A(3, 3)$ می‌گذرد. شعاع این دایره را بیابید.



۵۷- دایره‌ای از نقاط $(1,1)$ و $(5,1)$ می‌گذرد و بر خط $y = 2$ مماس است، شعاع این دایره را بیابید.



۵۸- وتر مشترک دایره‌ی C با دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 6$ منطبق بر نیمساز ناحیه‌ی اول

است. اگر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(-1, 4)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

$$(1) \quad x^2 + y^2 - y + 3x = 6$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 2y - x = 6$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2y + x = 6$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 3y - x = 6$$

۵۹- نقطه‌ی $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وترى به طول $2\sqrt{7}$ جدا

(سراسری تهری قارج ۹۸)

می کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول قطع می کند؟

$$-1 \pm \sqrt{3} \quad (4)$$

$$-1 \pm \sqrt{2} \quad (3)$$

$$2, -4 \quad (2)$$

$$3, -5 \quad (1)$$



۶۰- از بین دایره‌های گذرا از نقطه $A(1, -4)$ و مماس بر خط‌های $4x + 3y = 0$ و محور y ها،

(سراسری ریاضی ۹۹)

بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

$$\frac{22}{9} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$\frac{17}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$