۱ چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) اگر تعداد اعضای دامنه یک رابطه، متناهی و کمتر از تعداد اعضای برد آن باشد، آن رابطه قطعاً تابع نیست.

ب) اگر تعداد اعضای برد یک رابطه، متناهی و کمتر یا مساوی تعداد اعضای دامنه رابطه باشد، ممکن است رابطه تابع نباشد.

ج) اگر تعداد اعضای دامنه و برد یک رابطه، نامتناهی باشد، آن رابطه قطعاً تابع است.

د) اگر برد رابطه‌ای دقیقاً یک عضو داشته باشد، آن رابطه قطعاً تابع است.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

الف) فرض کنیم دامنه رابطه R به صورت $D = \{x , y\}$ و برد آن مجموعه اعداد طبیعی باشد:

$$R = \{(x , ۱) , (x , ۲) , (x , ۳) , \ ... \ , (y, ۱) , (y, ۲) , (y, ۳) , \ ...\}$$

مشخص است که چنین رابطه‌ای قطعاً تابع نیست. بنابراین گزاره الف درست است.

ب) رابطه $R = \{(۱ , ۱) , (۱ , ۳) , (۰ , ۱)\}$ را در نظر بگیرید تعداد اعضای برد آن متناهی و کمتر یا مساوی تعداد اعضای دامنه آن است اما معرف یک تابع نیست، یعنی گزاره ب نیز درست است.

ج) اگر تعداد اعضای دامنه و برد یک رابطه نامتناهی باشند، تنها در صورتی این رابطه می‌تواند معرف تابع باشد که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متمایز وجود نداشته باشد، بنابراین به طور قطع نمی‌توان گفت که رابطه‌ای با این شرایط معرف تابع است، یعنی گزاره ج نادرست است.

د) اگر برد رابطه‌ای تنها یک عضو داشته باشد، رابطه قطعاً تابع است چون هیچ مؤلفه اولی نمی‌تواند دو یا چند مؤلفه متمایز داشته باشد، بنابراین گزاره «د» درست است. نمونه بارز این مطلب معادله خطوط به صورت $y = k$ می‌باشد.

۲ چه تعداد از روابط زیر، معرف یک تابع است؟ (y را تابعی از x در نظر بگیرید.)

الف) $x^۲ + |y - ۱| = ۴$

ب) $|x - ۱| + |y| = ۰$

پ) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۵ = ۰$

ت) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ۲$

ث) $x^۲ - ۲x + |y| = -۱$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

رابطه‌ای تابع است که به ازای هر x یک مقدار برای y وجود داشته باشد، حال به بررسی تک تک موارد می‌پردازیم:

الف) $x = ۰ \Rightarrow ۰^۲ + |y - ۱| = ۴ \Rightarrow |y - ۱| = ۴$

$\Rightarrow y - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} y = ۵ \\ y = -۳ \end{cases}$ تابع نیست.

ب) $|x - ۱| + |y| = ۰ \xrightarrow[\text{پس هریک برابر صفر است}]{\text{مجموع دو مقدار نامنفی ۰}}$

$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \{(۱, ۰)\}$ تابع است.

پ) $x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ = ۰$

$\Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۰$

مجموع دو مقدار نامنفی صفر شده است پس هریک برابر صفر است.

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۲ \end{cases} \Rightarrow \{(۱, -۲)\}$ تابع است.

ت) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ۲ \xrightarrow{x,y \neq ۰} x^۲ + y^۲ - ۲xy = ۰$

$\Rightarrow (x - y)^۲ = ۰ \rightarrow y = x$ تابع است.

ث) $x^۲ - ۲x + ۱ + |y| = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + |y| = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \{(۱, ۰)\}$ تابع است.

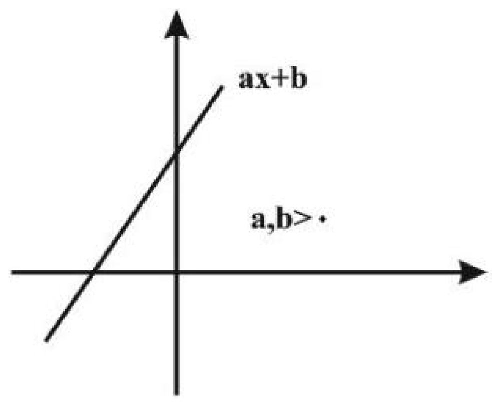
③ خط $y=\frac{m-1}{m}x+m(m-1)$، با شرط $m\in R-\{0,1\}$، همواره از کدام نواحی صفحه مختصات می‌گذرد؟

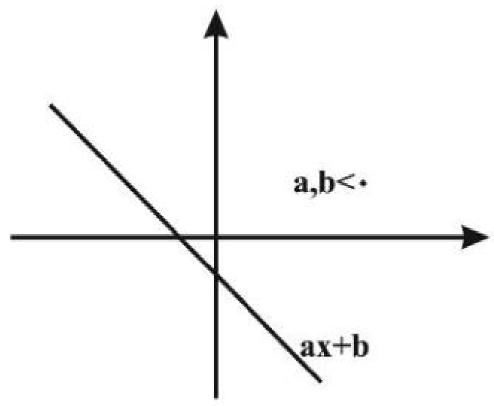
۱) اول و دوم **۲)** دوم و سوم **۳)** سوم و چهارم **۴)** اول و چهارم

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

علامت $\frac{m-1}{m}$ و $m(m-1)$ در دامنه مشترک‌شان همواره مثل هم است؛ بنابراین برای حل سؤال، کافی است خط $y=ax+b$ را که $ab>0$ در نظر بگیریم. حالات زیر امکان دارد:





بنابراین، این خط همواره از ربع‌های دوم و سوم می‌گذرد.

۴) اگر تابع $y = (a^۲ - \frac{۳}{۲}a)x^۲ + ۲ax + ۴$ یک تابع خطی و نقطه $(۲,۱۰)$ عضو این تابع باشد، این تابع محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) ۴

۳) $\frac{-۳}{۴}$ ۴) $\frac{-۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه تابع خطی به صورت $y = ax + b$ است، پس ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$a^۲ - \frac{۳}{۲}a = ۰ \Rightarrow a(a - \frac{۳}{۲}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ a = \frac{۳}{۲} \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\xrightarrow{(۲,۱۰)\ \text{عضو تابع}} ۱۰ = ۰ + ۲a \times ۲ + ۴ \Rightarrow ۶ = ۴a \Rightarrow a = ۳۲ \qquad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

$$y = ۳x + ۴ \xrightarrow{y=۰} ۰ = ۳x + ۴ \Rightarrow ۳x = -۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$$

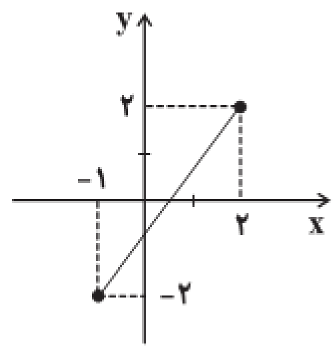
این تابع خطی محور طول‌ها را در نقطه $(-\frac{۴}{۳}, ۰)$ قطع می‌کند.

۵) دامنه تابع خطی f به صورت [۲ , ۱-] و برد آن [۲ , ۲-] است. کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع f نمی‌تواند باشد؟

۱) $(۱\ ,\ \frac{۲}{۳})$ ۲) $(۰\ ,\ -\frac{۲}{۳})$ ۳) $(۱\ ,\ -\frac{۲}{۳})$ ۴) $(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱)$

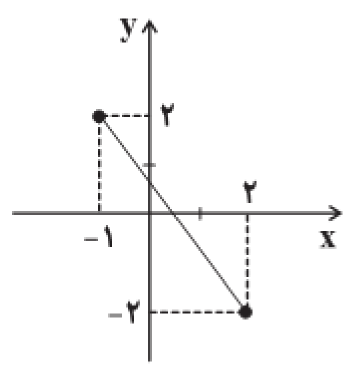
پاسخ: گزینه ۴

تابع f خطی است و با توجه به دامنه و بردش، نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است:



$$y - ۲ = \frac{۲-(-۲)}{۲-(-۱)}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۴}{۳}x - \frac{۲}{۳} \Rightarrow f(۰) = -\frac{۲}{۳} \quad , \quad f(۱) = \frac{۲}{۳} \quad , \quad f(\frac{۱}{۲}) = ۰$$



$$y - ۲ = \frac{-۲-۲}{۲-(-۱)}(x + ۱) \Rightarrow y = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۲}{۳} \Rightarrow f(۱) = -\frac{۲}{۳} \quad , \quad f(\frac{۱}{۲}) = ۰ \quad , \quad f(۰) = \frac{۲}{۳}$$

همانطور که دیده می‌شود نقطه $(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱)$ به هیچ وجه نمی‌تواند روی نمودار تابع f قرار گیرد.

۶) اگر تابع $f(x)=\frac{ax^۳-bx^۲+cx+d}{x^۲+x+۱}$ یک تابع همانی با دامنه R و تابع $g(x)=\frac{ax^۲+۳}{۳x^۲+e}$ یک تابع ثابت با دامنه R باشند، خط $y=ax-e-c$، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تابع f همانی است، پس ضابطه آن به‌صورت $f(x)=x$ است.

$$\frac{ax^۳-bx^۲+cx+d}{x^۲+x+۱}=x$$

$$\Rightarrow ax^۳-bx^۲+cx+d=x^۳+x^۲+x \xrightarrow{\text{به ازای هر x برقرار است}} \begin{cases} a=۱ \\ b=-۱ \\ c=۱ \\ d=۰ \end{cases}$$

تابع g ثابت است، پس ضابطه آن به‌صورت $g(x)=k$ است $(k\in R)$.

$$\frac{ax^۲+۳}{۳x^۲+e}=k \Rightarrow ax^۲+۳=۳kx^۲+ke$$

$$\xrightarrow{\text{به ازای هر x برقرار است}} \begin{cases} ۳k=a \xrightarrow{a=۱} k=\frac{۱}{۳} \\ ke=۳ \xrightarrow{k=\frac{۱}{۳}} e=۹ \end{cases}$$

$$y=ax-e-c \Rightarrow y=x-۹-۱=x-۱۰$$

خط $y=x-۱۰$ محور xها را در $x=۱۰$ قطع می‌کند.

۷) دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x}{۳x^۲+ax+b}$ به‌صورت $R-\{۱,۲\}$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{x+a}+\frac{۱}{x+b}$ کدام است؟

۱) $R-\{-۶,۱۲\}$ ۲) $R-\{-۹,۶\}$ ۳) $R-\{-۶,۹\}$ ۴) $R-\{-۳,۶\}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

دامنهٔ توابع گویا از حذف ریشه‌های مخرج از مجموعهٔ اعداد حقیقی به‌دست می‌آید. بنابراین ۲ و ۱ ریشه‌های $۳x^۲+ax+b$ هستند. یعنی:

$$\begin{cases} ۳+a+b=۰ \\ ۱۲+۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۳ \\ ۲a+b=-۱۲ \end{cases} \Rightarrow a=-۹\ ,\ b=۶$$

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{x+a}+\frac{۱}{x+b}=\frac{۱}{x-۹}+\frac{۱}{x+۶}$ برابر $R-\{۹,-۶\}$ است.

۸) اگر برد تابع $f(x) = x - ۵[\frac{x}{۵}] + ۳$ به‌صورت بازهٔ $[a,b)$ باشد، آن‌گاه $b-a$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۷   ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه«۲»

می‌دانیم: $۰ \le x - [x] < ۱$. بنابراین داریم:

$$f(x) = x - ۵[\frac{x}{۵}] + ۳ = ۵(\frac{x}{۵} - [\frac{x}{۵}]) + ۳$$

$$\Rightarrow ۰ \le \frac{x}{۵} - [\frac{x}{۵}] < ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۰ \le ۵(\frac{x}{۵} - [\frac{x}{۵}]) < ۵$$

$$\xrightarrow{+۳} ۳ \le R_f < ۸$$

درنتیجه: $a = ۳ , b = ۸ \Rightarrow b - a = ۸ - ۳ = ۵$

۹) اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $۲x^۲ - x - ۱ = f(x)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & , x \in Z \\ -۱ & , x \notin Z \end{cases}$، بنابراین:

$$\text{پس} \begin{cases} x \in Z , ۲x^۲ - x - ۱ = ۰ \to \begin{cases} x = ۱ \checkmark \\ x = \frac{-۱}{۲} & \times \end{cases} \\ x \notin Z , ۲x^۲ - x - ۱ = -۱ \to \begin{cases} x = ۰ & \times \\ x = \frac{۱}{۲} \checkmark \end{cases} \end{cases} \qquad \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{مجموع}} ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۱۰) اگر توابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+۱} & , x \ge ۳ \\ x + ۲ & , x < ۳ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۵ & , x \ge ۱ \\ \frac{۱}{x} & , x < ۱ \end{cases}$

مفروض باشند، آنگاه حاصل $[(۲f + \frac{g}{۳})(x)]$ در نقطهٔ $x = g(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$x = g(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۳ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \begin{cases} f(۳) = \sqrt{۳+۱} = ۲ \\ g(۳) = -۹ + ۵ = -۴ \end{cases}$$

$$[(۲f + \frac{g}{۳})(۳)] = [۲f(۳) + \frac{g(۳)}{۳}] = [۲ \times ۲ + \frac{۱}{۳} \times (-۴)]$$

$$= [۴ - \frac{۴}{۳}] = [\frac{۸}{۳}] = ۲$$

۱۱) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}+۲}{x^۳-۱}$ و $g(x) = \frac{x}{x^۳-۱}$ باشد، چند عدد طبیعی در برد تابع $h(x) = \frac{xf(x)}{g(x)}$ قرار <u>ندارد</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع f به صورت $[۰,+\infty) - \{۱\}$ و دامنه تابع g به صورت $R - \{۱\}$ است. بنابراین داریم:

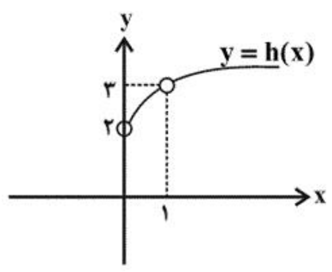
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = (۰,+\infty) - \{۱\}$$

دقت کنید که از $g(x) = ۰$ نتیجه می‌شود که $x=۰$ است.

از طرف دیگر داریم:

$$h(x) = \frac{xf(x)}{g(x)} = \frac{x(\frac{\sqrt{x}+۲}{x^۳-۱})}{\frac{x}{x^۳-۱}} = \sqrt{x} + ۲$$

بنابراین نمودار تابع h به صورت زیر است.



$$\Rightarrow R_h = (۲,+\infty) - \{۳\}$$

اعداد طبیعی ۱، ۲ و ۳ در برد h قرار ندارند.

۱۲) اگر $f(x) = \sqrt{۱-۲x} + \sqrt{x+۴}$ و $g(x) = \sqrt{x+۴} - \sqrt{۱-۲x}$ باشند، برد تابع f.g شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۴

$$D_f : \begin{cases} x+۴ \ge ۰ \\ ۱-۲x \ge ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۴ \le x \le \frac{۱}{۲}$$

$$D_g : \begin{cases} x+۴ \ge ۰ \\ ۱-۲x \ge ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۴ \le x \le \frac{۱}{۲}$$

دامنه f.g را حساب می‌کنیم:

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = [-۴,\frac{۱}{۲}] \cap [-۴,\frac{۱}{۲}] = [-۴,\frac{۱}{۲}]$$

ضابطه f.g را به‌دست می‌آوریم:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x+۴) - (۱-۲x) = ۳x+۳$$

حال از روی دامنه، برد f.g را حساب می‌کنیم:

$$-۴ \le x \le \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۳} -۱۲ \le ۳x \le \frac{۳}{۲} \xrightarrow{+۳}$$
$$-۹ \le ۳x+۳ \le ۴/۵$$

پس برد f.g ، بازه $[-۹,۴/۵]$ است که شامل ۱۴ عدد صحیح است.

۱۳) اگر توابع $f(x)=\frac{x^۲-(c-۱)x+۶-b}{x+a}$ و $g(x)=\frac{x^۳+bx+۲a}{x^۲-a^۲}$ برابر باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باید دامنه توابع برابر باشد:

$D_f : R-\{-a\}$ ، $D_g : R-\{\pm a\}$

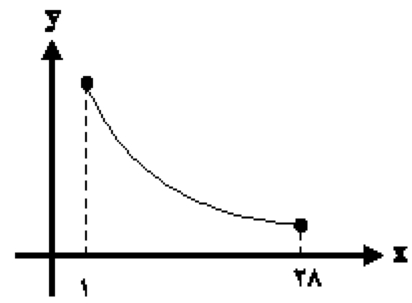
که برای برابر بودن دامنه‌ها، a باید صفر باشد.

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۲-(c-۱)x+۶-b}{x} \\ g(x)=\dfrac{x^۳+bx}{x^۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^۲-(c-۱)x+۶-b}{x}=\frac{x^۳+bx}{x^۲}$$

$$\Rightarrow x^۴-(c-۱)x^۳+(۶-b)x^۲=x^۴+bx^۲ \Rightarrow \begin{cases} c-۱=۰ \Rightarrow c=۱ \\ ۶-b=b \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=۰+۳+۱=۴$$

۱۴) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مجموعه جواب‌های نامعادله $f(x^۳+۱)<f(۴x+۱)$ کدام است؟



۱) $(۲,۳]$
۲) $(۲,۲۸]$
۳) $(-۲,+\infty)-[۰,۲]$
۴) $(۰,۳]$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

واضح است که دامنه تابع بازه $[۱,۲۸]$ است. حال داریم:

$$f(x^۳+۱)<f(۴x+۱) \xrightarrow{\text{f اکیدا نزولی است}} ۴x+۱<x^۳+۱$$

$$\xrightarrow{\text{برقراری شرط برونده}} ۱\le ۴x+۱<x^۳+۱\le ۲۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x+۱\ge ۱ \Rightarrow x\ge ۰ \quad (۱) \\ x^۳+۱>۴x+۱ \Rightarrow x^۳-۴x=x(x^۲-۴)>۰ \Rightarrow x\in(-۲,۰)\cup(۲,+\infty) \quad (۲) \\ x^۳+۱\le ۲۸ \Rightarrow x^۳\le ۲۷ \Rightarrow x\le ۳ \quad (۳) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) مجموعه جواب‌های نامعادله اصلی به دست می‌آید:

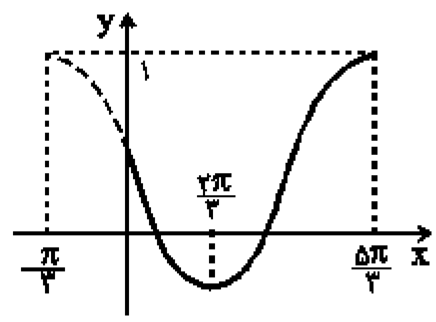
$$\Rightarrow x\in(۲,۳]$$

۱۵ نمودار تابع $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$ ؛ $x\in[0,\frac{5\pi}{3}]$ را $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست منتقل کرده و سپس طول تمام نقاط را ۳ برابر می‌کنیم. نمودار حاصل روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $[\pi,3\pi]$
۲) $[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{2}]$
۳) $[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2}]$
۴) $[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}]$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



ابتدا نمودار تابع f را روی بازه داده شده رسم می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که بزرگترین بازه‌ای که تابع f با دامنه داده شده روی آن نزولی است، بازه $[0,\frac{2\pi}{3}]$ می‌باشد. اکنون ضابطه تابع جدید را تشکیل می‌دهیم:

$\frac{\pi}{2}$ به سمت راست یعنی $y=f(x-\frac{\pi}{2})$ و طول تمام نقاط را ۳ برابر می‌کنیم یعنی $g(x)=f(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{2})$.

از طرفی می‌دانیم که تابع f روی $[0,\frac{2\pi}{3}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع g نیز روی بازه‌ای نزولی است که $0\le\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{2}\le\frac{2\pi}{3}$ باشد:

$$\Rightarrow 0\le\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{2}\le\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{+\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{3}x\le\frac{7\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\times 3}\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{2}$$

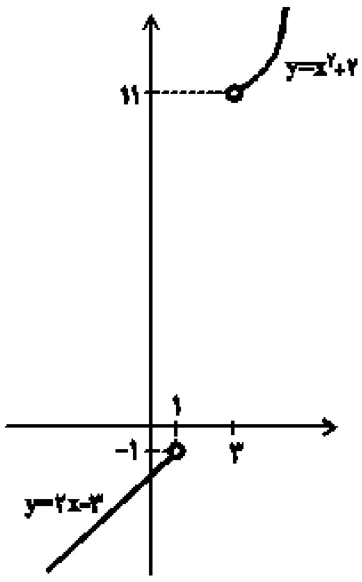
۱۶) اگر $m \in [a,b]$ باشد، تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۳ & ; \quad x < ۱ \\ x^۲ - (۲m - ۱)x + ۲ & ; \quad ۱ \le x \le ۳ \\ x^۲ + ۲ & ; \quad x > ۳ \end{cases}$ اکیداً صعودی است. حداکثر b-a کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ((۲))

نمودار تابع f به ازای x<۱ و x>۳ به‌صورت مقابل است.



برای این‌که سهمی $y = x^۲ - (۲m - ۱)x + ۲$ در بازه $[۱,۳]$ اکیداً صعودی باشد، باید شروط زیر برقرار باشند.

اولاً: طول رأس سهمی کوچکتر یا مساوی ۱ باشد.

$\frac{۲m-۱}{۲} \le ۱ \Rightarrow m \le \frac{۳}{۲}$

ثانیاً:

$-۱ \le f(۱) \Rightarrow -۱ \le ۴ - ۲m \Rightarrow m \le \frac{۵}{۲}$

ثالثاً:

$f(۳) \le ۱۱ \Rightarrow ۱۴ - ۶m \le ۱۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le m$

و از اشتراک ۳ شرط به دست می‌آید: $m \in [\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \text{کمترین} & a = \frac{۱}{۲} \\ \text{بیشترین} & b = \frac{۳}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow b - a = ۱$

۱۷) اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = ۲x^۳ + kx^۲ + ۲۵x - ۳$ برابر با ۳ باشد، مجموع صفرهای دیگر این تابع کدام است؟

۱) ۲-   ۲) ۲   ۳) ۴-   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$x = ۳$ صفر تابع f است، پس:

$$f(۳) = ۰ \Rightarrow ۲(۳)^۳ + k(۳)^۲ + ۲۵(۳) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۵۴ + ۹k + ۷۵ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۹k = -۱۲۶ \Rightarrow k = -۱۴$$

با جای‌گذاری $k = -۱۴$، $f(x)$ را بر $x - ۳$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ - ۱۴x^۲ + ۲۵x - ۳ & x - ۳ \\ \cline{2-2} \underline{-۲x^۳ + ۶x^۲} & ۲x^۲ - ۸x + ۱ \\ -۸x^۲ + ۲۵x - ۳ & \\ \underline{۸x^۲ - ۲۴x} & \\ \quad x - ۳ & \\ \quad \underline{-x + ۳} & \\ \quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۳)(۲x^۲ - ۸x + ۱)$$

دو صفر دیگر تابع f، جواب‌های معادله $۲x^۲ - ۸x + ۱ = ۰$ هستند. مجموع‌شان را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۱۸) اگر دامنهٔ تابع $y = f(۲x - ۱) + ۳$ به‌صورت $[-۲, ۶]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $g(x) = ۳f(۴x - ۲) - ۳$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۳]$ ۲) $[-\frac{۳}{۴}, \frac{۱۳}{۴}]$ ۳) $[\frac{۳}{۸}, \frac{۱۱}{۸}]$ ۴) $[-۳, ۱]$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ $f(x)$ را به‌دست آورده و سپس از روی آن دامنهٔ $g(x) = ۳f(۴x - ۲) - ۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-۲ \le x \le ۶ \Rightarrow -۴ \le ۲x \le ۱۲ \Rightarrow -۵ \le ۲x - ۱ \le ۱۱$$

پس دامنهٔ $f(x)$ به‌صورت $[-۵, ۱۱]$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن دامنهٔ g داریم:

$$-۵ \le ۴x - ۲ \le ۱۱ \Rightarrow -۳ \le ۴x \le ۱۳ \Rightarrow -\frac{۳}{۴} \le x \le \frac{۱۳}{۴}$$

۱۹) اگر $f(x)=\sqrt{10x-x^2}$ و $g(x)=\frac{1}{x+|x|}$ باشند، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=(fog-gof)(x)$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{20},+\infty)$

۲) $(0,10)$

۳) $[\frac{1}{20},10)$

۴) $(\frac{1}{10},10]$

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تفریق fog و gof برابر اشتراک دامنهٔ آن‌ها است.

$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$

$D_g: x+|x|\neq 0 \Rightarrow x>0$

$D_f: 10x-x^2\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 10$

$\Rightarrow 0\leq \frac{1}{x+|x|}\leq 10$

چون می‌دانیم $x>0$، داریم:

$\frac{1}{2x}\leq 10 \Rightarrow \frac{1}{20}\leq x$

$\Rightarrow D_{fog}=[\frac{1}{20},+\infty)$

$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}$

$D_f: 0\leq x\leq 10$

$f(x)\in D_g: \sqrt{10x-x^2}>0 \Rightarrow x\neq 0,10$

$\Rightarrow D_{gof}=(0,10)$

$D_{fog}\cap D_{gof}=[\frac{1}{20},10)$

۲۰) اگر $f(x)=\frac{ax+2}{x+a-2}$ و $(fof)(x)=x$ باشد، مقدار $f^{-1}(a-1)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، با شرط $a+d=0$ تابع f و f^{-1} بر هم منطبق می‌شوند ($f=f^{-1}$). در این جا با توجه به این که $(fof)(x)=x$ شده، پس نتیجه می‌گیریم $f(x)=f^{-1}(x)$ است و داریم:

$f(x)=\frac{ax+2}{x+a-2}\xrightarrow{f=f^{-1}} a+a-2=0 \Rightarrow a=1$

بنابراین ضابطه f به‌صورت $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ درمی‌آید و مقدار $f^{-1}(a-1)$ برابر است با:

$f^{-1}(a-1)=f(a-1)=f(1-1)=f(0)=\frac{2}{-1}=-2$

۲۱) اگر $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۳$، $(fog)(x) = x^{۲} + ۳x + \frac{۵}{۴}$ و $g(x)$ یک تابع خطی با شیب مثبت باشد، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $-x^{۲} + ۴x + \frac{۱}{۲}$ **۲)** $-x^{۲} + ۴x - \frac{۱۳}{۲}$ **۳)** $x^{۲} - ۴x - \frac{۱}{۲}$ **۴)** $x^{۲} - ۴x + \frac{۱۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا در تابع $f(x)$، به‌جای x، $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم و آن را با تابع $(fog)(x)$ که در صورت سؤال داده شده است، معادل قرار می‌دهیم و $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g^{۲}(x) - ۴g(x) + ۳ = x^{۲} + ۳x + \frac{۵}{۴}$$

در دو سمت رابطه فوق مربع کامل تشکیل می‌دهیم:

$$\Rightarrow (g(x) - ۲)^{۲} - ۴ + ۳ = (x + \frac{۳}{۲})^{۲} - \frac{۹}{۴} + \frac{۵}{۴}$$

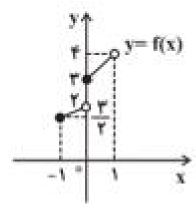
$$\Rightarrow (g(x) - ۲)^{۲} - ۱ = (x + \frac{۳}{۲})^{۲} - ۱$$

$$\Rightarrow g(x) - ۲ = \pm(x + \frac{۳}{۲}) \xrightarrow{\text{شیب } g(x) \text{ مثبت است}} g(x) = x + \frac{۷}{۲}$$

برای به‌دست آوردن $g(f(x))$، در تابع $g(x)$ ، به‌جای x، $f(x)$را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = f(x) + \frac{۷}{۲} = x^{۲} - ۴x + ۳ + \frac{۷}{۲} = x^{۲} - ۴x + \frac{۱۳}{۲}$$

۲۲) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، مجموع جواب‌های معادله $(fof^{-۱})(x) = x^{۲} - ۳x + ۳$ کدام است؟



۱) ۳
۲) -۴
۳) ۴
۴) معادله جواب ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم که $(fof^{-۱})(x) = x$ برای همه مقادیر عضو $D_{f^{-۱}}$ برقرار است. از طرفی $D_{f^{-۱}} = R_f$ و $R_f = [\frac{۳}{۲}, ۲) \cup [۳, ۴)$. بنابراین باید معادله $x = x^{۲} - ۳x + ۳$ را حل کنیم. البته تنها جواب‌هایی قابل قبول هستند که عضو R_f باشند. با حل این معادله به $x = ۱$ و $x = ۳$ می‌رسیم که تنها $x = ۳$ قابل قبول است.

۲۳) اگر $f^{-1}(x) = g(x-۱)$ باشد، حاصل $(fog)(۰) + (g^{-1} of^{-1})(۱)$ کدام است؟ (دامنه دو تابع وارون‌پذیر f و g برابر با R است.)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) $f^{-1}(۰)$　　۴) $f^{-1}(۱)$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به رابطه داده شده داریم:

$$(۱)\ f^{-1}(۱) = g(۰) \Rightarrow (fog)(۰) = f(g(۰)) = f(f^{-1}(۱)) = ۱$$

$$(۲)\ (g^{-1} of^{-1})(۱) = g^{-1}(f^{-1}(۱)) = g^{-1}(g(۰)) = ۰$$

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)} (fog)(۰) + (g^{-1} of^{-1})(۱) = ۱$$

۲۴) اگر $f(x) = \sqrt{۴-x} + ۲$ و نقاط A و B ابتدا و انتهای نمودار تابع $h(x) = (fof^{-1})(x) + (f^{-1} of)(x)$ باشند، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $۲\sqrt{۵}$　　۳) $۴\sqrt{۵}$　　۴) $۹\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که $(f^{-1} of)(x)$ و $(fof^{-1})(x)$ هر دو تابع همانی می‌باشند.

$f^{-1} of(x)$ تابعی همانی روی دامنه f و $(fof^{-1})(x)$ تابعی همانی روی برد f است، لذا:

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad (f^{-1} of)(x) = x$$

$$\forall x \in R_f \quad ; \quad (fof^{-1})(x) = x$$

دامنه f بازه $(-\infty\ ,\ ۴]$ و برد آن بازه $[۲\ ,\ +\infty)$ است. بنابراین:

$$\forall x \in (-\infty\ ,\ ۴] \quad ; \quad (f^{-1} of)(x) = x$$

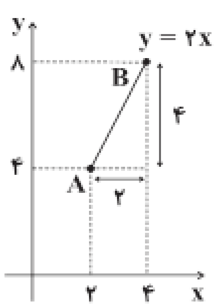
$$\forall x \in [۲\ ,\ +\infty) \quad ; \quad (fof^{-1})(x) = x$$

بنابراین از آنجایی که دامنه مجموع دو تابع، اشتراک دامنه‌های آنهاست، می‌توان نوشت:

$$h(x) = (f^{-1} of)(x) + (fof^{-1})(x) = x + x = ۲x$$

$$D_{h(x)} = (-\infty\ ,\ ۴] \cap [۲\ ,\ +\infty) = [۲\ ,\ ۴]$$

بنابراین نمودار h(x) به شکل زیر است:



طول پاره‌خط AB برابر است با: $\sqrt{۴+۱۶} = ۲\sqrt{۵}$

۲۵ اگر نمودار تابع $y = ۲f^{-۱}(x - ۱) + ۳$ از نقطه $(۳,۷)$ بگذرد، کدام نقطه زیر، قطعاً روی نمودار $y = f(x + ۱)$ قرار ندارد؟

۱) $(۳,۲)$ **۲)** $(۲,۴)$ **۳)** $(۱,۲)$ **۴)** $(۳,۴)$

پاسخ: گزینه ۱

$$y = ۲f^{-۱}(x - ۱) + ۳ \xrightarrow{(۳,۷)} ۷ = ۲f^{-۱}(۲) + ۳$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲) = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۲$$

یعنی نقطه $(۱,۲)$ روی نمودار $f(x + ۱)$ قرار دارد. چون $f^{-۱}$ وجود دارد، f یک به یک است، بنابراین $f(x + ۱)$ نیز یک به یک است و هیچ نقطه دیگری با عرض ۲ ندارد. در نتیجه $(۳,۲)$ قطعاً روی نمودار $y = f(x + ۱)$ قرار ندارد.