مدت زمان آزمون: -

نام و نام خانوادگی:

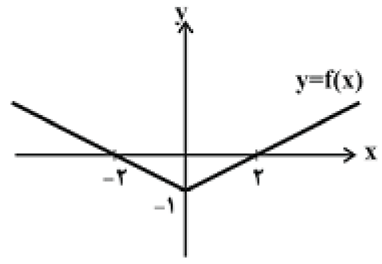
نام آزمون: **آزمون A۱ قدرمطلق**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۰/۱۲/۲۶

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

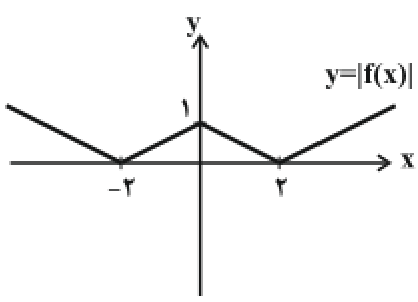
۱) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مساحت سطح محدود بین نمودار تابع $y = ||f(x)| - ۱|$ و محور xها کدام است؟

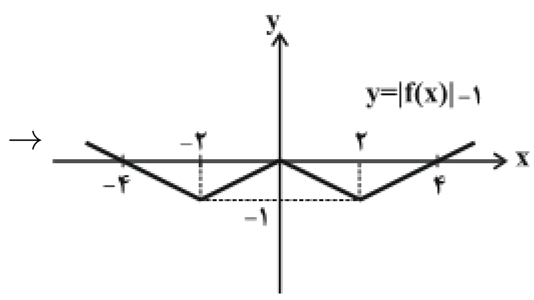


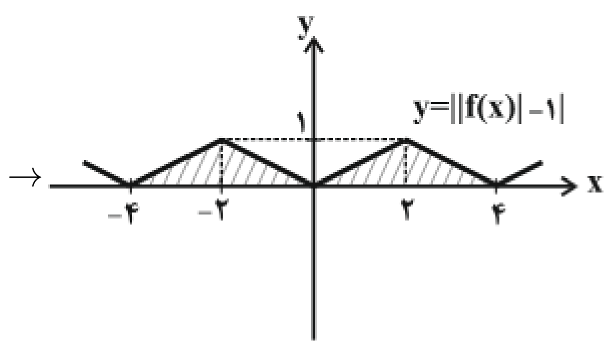
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»







$\Rightarrow S_{\text{هاشور خورده}} = ۲\,(\text{مساحت مثلث}) = ۲\left(\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱\right) = ۴$

۲ اگر تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه برد تابع $a|x-۱|+b$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx & , \quad x\ge ۳ \\ ۶x-۳a & , \quad x\le ۳ \\ -۳ & , \quad x=۰ \end{cases}$$

۱) $[۱, +\infty)$ **۲)** $[۲, +\infty)$

۳) $[-۲, +\infty)$ **۴)** $[-۱, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۲

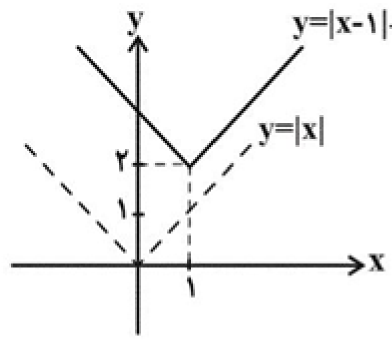
$f(x)$ نمایش یک تابع است بنابراین برای هر عضو از دامنه آن تنها یک عضو نظیر از برد داریم:

$$x=۰ \Rightarrow (۰, -۳), (۰, ۶(۰)-۳a) \Rightarrow -۳=۰-۳a \Rightarrow a=۱ \quad (۱)$$

$$x=۳ \Rightarrow (۳, ۶(۳)-۳a) \ , \ (۳, a(۳)^{۲}+b(۳)) \Rightarrow ۱۸-۳a=۹a+۳b$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۱۸-۳(۱)=۹(۱)+۳b \Rightarrow ۳b=۶ \Rightarrow b=۲$$

با رسم نمودار $|x-۱|+۲$ با استفاده از انتقال نمودار $y=|x|$ برد آن را به دست می‌آوریم.



بنابراین برد این تابع برابر بازه $[۲, +\infty)$ است.

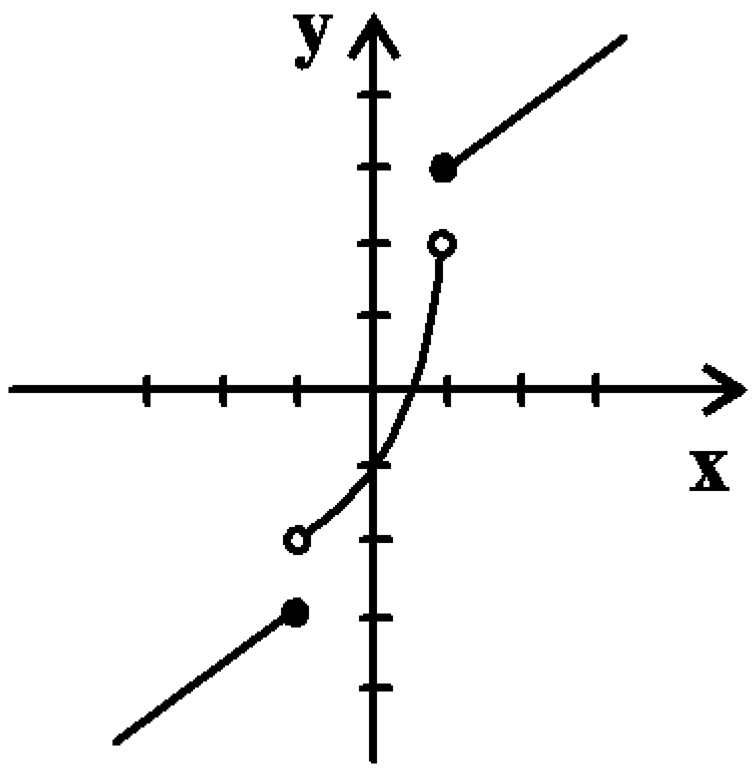
۳) برد تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x-۱ & , \quad |x|<۱ \\ x+\dfrac{|۲x|}{x} & , \quad |x|\geq ۱ \end{cases}$ شامل چند عدد صحیح <u>نیست</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

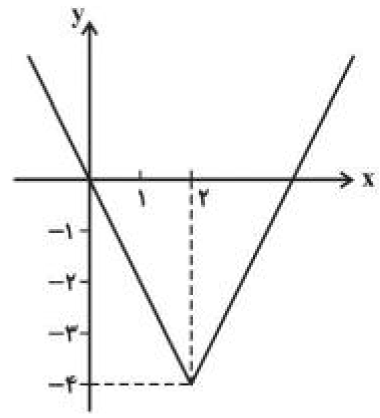
$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & , \quad x\geq ۱ \\ (x+۱)^{۲}-۲ & , \quad -۱<x<۱ \\ x-۲ & , \quad x\leq -۱ \end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع، روشن است که دو عدد صحیح ۲ و ۲- عضو برد تابع f نیستند. به عبارتی:

$$R_f=(-\infty\ ,\ -۳]\cup(-۲\ ,\ ۲)\cup[۳\ ,\ +\infty)$$

④ نمودار تابع $f(x) = ۲\,|ax + b| + c$ به صورت مقابل است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟ $(b < ۰)$



۱) ۶-

۲) ۵-

۳) ۱-

۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲

$x = ۲$ ریشه داخل قدرمطلق می‌باشد: $۲a + b = ۰$

$$(۰,۰) \in f \Rightarrow ۲\,|b| + c = ۰ \xrightarrow{b<۰} -۲b + c = ۰$$

$$(۲,-۴) \in f \Rightarrow ۲|\underbrace{۲a+b}_{۰}| + c = -۴ \Rightarrow c = -۴$$

$$-۲b + c = ۰ \xrightarrow{c=-۴} -۲b - ۴ = ۰ \Rightarrow -۲b = ۴ \Rightarrow b = -۲$$

$$۲a + b = ۰ \Rightarrow ۲a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۱ - ۲ - ۴ = -۵$$

۵ اگر دامنه تابع $f(x)=\left|\frac{x-۲}{۳}+۱\right|-۱$، بازه $(-۲,۲)$ و برد آن $[a,b)$ باشد، بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

$$-۲<x<۲ \Rightarrow -۴<x-۲<۰ \Rightarrow -\frac{۴}{۳}<\frac{x-۲}{۳}<۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}<\frac{x-۲}{۳}+۱<۱ \Rightarrow ۰\le\left|\frac{x-۲}{۳}+۱\right|<۱$$

$$\Rightarrow -۱\le\left|\frac{x-۲}{۳}+۱\right|-۱<۰ \Rightarrow -۱\le f(x)<۰$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع}=[-۱,۰)=[a,b) \Rightarrow b-a=۰-(-۱)=۱$$

راه حل دوم:

$$(۱)\ -۱\le x<۲ \Rightarrow f(x)=\frac{x-۲}{۳}+۱-۱=\frac{x-۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع}=[-۱,۰)$$

$$(۲)\ -۲<x<-۱ \Rightarrow f(x)=\frac{۲-x}{۳}-۱-۱=\frac{۲-x}{۳}-۲=\frac{-x-۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع}=(-۱,-\frac{۲}{۳})$$

$$(۱)\cup(۲)=[-۱,۰)\cup(-۱,-\frac{۲}{۳})=[-۱,۰)$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع}=[-۱,۰)=[a,b) \Rightarrow b-a=۰-(-۱)=۱$$

۶) نمودار تابع $y = |-x+۱|+۱$ را ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به پایین می‌بریم. این تابع محورهای مختصات را در سه نقطه A، B و C قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

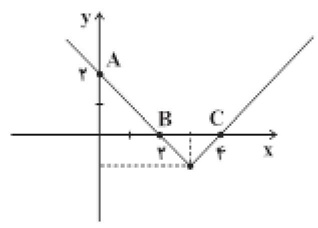
اول ضابطه تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = |-x+۱|+۱ \Rightarrow y = |x-۱|+۱$$

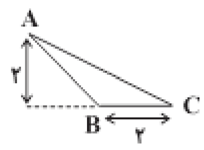
$$\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به سمت راست}} y = |(x-۲)-۱|+۱ \Rightarrow y = |x-۳|+۱$$

$$\xrightarrow[f\to f-۲]{\text{۲ واحد پایین}} y = |x-۳|+۱-۲ = |x-۳|-۱$$

برای رسم نمودار تابع $y = |x-۳|-۱$ باید نمودار $y = |x|$ را ۳ واحد به راست و ۱ واحد به پایین ببریم:



مثلث ABC برابر است با:



$$S_{ABC} = \frac{۲\times۲}{۲} = ۲$$

۷) مجموعه جواب نامعادله $(۱-|x|)(۱+x) > ۰$ کدام است؟

۱) $(-\infty\,,\,۱)$ ۲) $(۱\,,\,+\infty)$ ۳) $(-\infty\,,\,-۱)\cup(۱\,,\,+\infty)$ ۴) $(-\infty\,,\,-۱)\cup(-۱\,,\,۱)$

پاسخ: گزینه ۴

برای این‌که حاصل‌ضرب $(۱-|x|)(۱+x)$ مثبت باشد، یا هر دو عبارت باید مثبت باشند یا هر دو عبارت باید منفی باشند.

$$(۱)\quad \begin{cases} ۱+x > ۰ \Rightarrow x > -۱ \\ ۱-|x| > ۰ \Rightarrow ۱ > |x| \Rightarrow -۱ < x < ۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{دوجواب}]{\text{اشتراک}} (-۱,۱)$$

$$\begin{cases} ۱+x < ۰ \Rightarrow x < -۱ \\ ۱-|x| < ۰ \Rightarrow ۱ < |x| \Rightarrow x > ۱ \ \text{یا}\ x < -۱ \end{cases}$$

$$(۲)\quad \xrightarrow[\text{دوجواب}]{\text{اشتراک}} x < -۱$$

جواب اصلی اجتماع جواب‌های (۱) و (۲) است.

$$(-۱\,,\,۱)\cup(-\infty\,,\,-۱)$$

⑧ می‌دانیم معادله $|x^۲ - ۳| = |۲ - a| - ۱$ برای x جواب حقیقی دارد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(۰,۳)$ **۲)** $R - [۰,۳]$ **۳)** $[۱,۲]$ **۴)** $R - (۱,۳)$

پاسخ: گزینه ۴

شرط آن‌که معادله $|x^۲ - ۳| = |۲ - a| - ۱$ جواب حقیقی داشته باشد این است که عبارت سمت راست نامنفی باشد.

$$|۲ - a| - ۱ \ge ۰ \Rightarrow |۲ - a| \ge ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲ - a \ge ۱ \Rightarrow a \le ۱ \\ ۲ - a \le -۱ \Rightarrow a \ge ۳ \end{cases}$$

بنابراین مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$(-\infty, ۱] \cup [۳, +\infty) = R - (۱,۳)$$

⑨ معادله $[x]x = ۱ - |x|$ چند جواب دارد؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳ **۲)** ۲ **۳)** ۱ **۴)** صفر

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

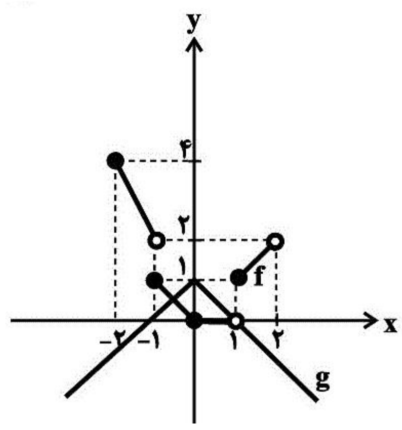
راه اول: نمودارهای دو تابع $f(x) = [x]x$ و $g(x) = ۱ - |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$-۲ \le x < -۱ : f(x) = -۲x$

$-۱ \le x < ۰ : f(x) = -x$

$۰ \le x < ۱ : f(x) = ۰$

$۱ \le x < ۲ : f(x) = x$



با توجه به شکل فوق، نمودارهای دو تابع f و g فقط در یک نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادله صورت سؤال یک جواب دارد. دقت کنید که $f(۱) = ۱$ است.

راه دوم:

واضح است که اگر $x \ge ۰$ باشد، $[x] \ge ۰$ و در نتیجه $x[x] \ge ۰$است و اگر $x < ۰$ باشد، $[x] < ۰$ و در نتیجه $x[x] > ۰$ است، بنابراین در هر حالت $x[x] \ge ۰$ خواهد بود، برای این‌که معادله جواب داشته باشد، باید $۱ - |x| \ge ۰$ یعنی $-۱ \le x \le ۱$ باشد. حال اگر $۰ \le x < ۱$ باشد، معادله به صورت $۱ - x = ۰$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-۱ \le x < ۰$ باشد، معادله به صورت $-x = ۱ + x$ در می‌آید که جواب آن $x = -\frac{۱}{۲}$ است و اگر $x = ۱$ باشد، معادله به صورت $۱ - ۱ = ۱$ در می‌آید که برقرار نیست. پس تنها جواب معادله (طول تنها نقطه مشترک دو نمودار) $x = -\frac{۱}{۲}$ است.

(۱۰) اگر $f(x) = (x - ۲)(۱ - \frac{۱}{|x-۲|})$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح k معادله $|f(x)| = k$ دارای ۳ جواب است؟

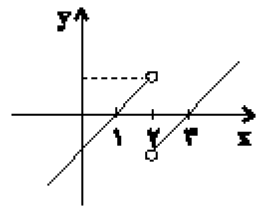
۱) هیچ مقدار **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** ۴

پاسخ: گزینه ۱

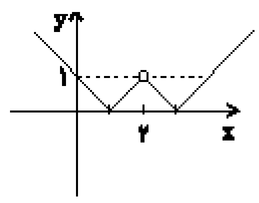
ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = (x - ۲) - \frac{x-۲}{|x-۲|} = \begin{cases} x - ۲ - ۱ = x - ۳ & , \quad x > ۲ \\ x - ۲ + ۱ = x - ۱ & , \quad x < ۲ \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:

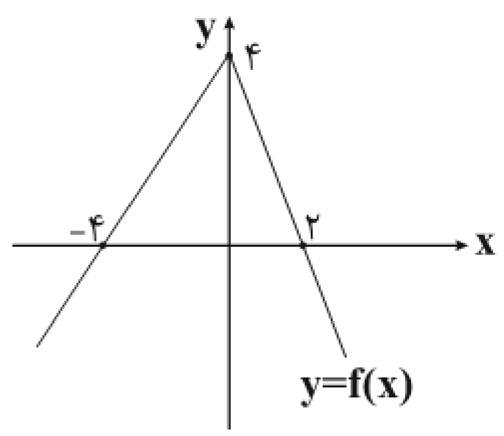


بنابراین نمودار $|f|$ به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به نمودار $|f|$، خط $y = k$ هیچ‌گاه نمی‌تواند نمودار $|f|$ را در ۳ نقطه قطع کند.

۱۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه تابع با ضابطه $g(x) = \sqrt{2 - |f(x)|}$ کدام است؟



۱) $[-4,-2] \cup [1,2]$

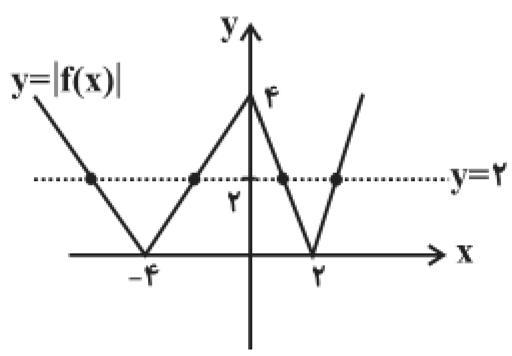
۲) $(-\infty, -4] \cup [-2, 1] \cup [2, +\infty)$

۳) $[-6,-2] \cup [1,3]$

۴) $(-\infty, -6] \cup [-2, 1] \cup [3, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار $y = |f(x)|$ را رسم می‌کنیم:



در تابع $g(x)$ با توجه به این‌که عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، داریم: $2 - |f(x)| \geq 0 \Rightarrow |f(x)| \leq 2$

واضح است که باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن‌ها $|f(x)| = 2$ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & , x < 0 \\ -2x+4 & , x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{|f(x)|=2} \begin{cases} x+4 = 2 \Rightarrow x = -2 \\ x+4 = -2 \Rightarrow x = -6 \\ -2x+4 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ -2x+4 = -2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

دامنه تابع $g(x)$، نقاطی می‌شود که در آن مقدار تابع $y = |f(x)|$ کمتر یا مساوی ۲ باشد.

$D_g = [-6,-2] \cup [1,3]$

۱۲) اگر خط $x = ۱$ محور تقارن تابع $f(x) = |x+۱| + |x+k|$ باشد، کدام معادله زیر بی‌شمار جواب دارد؟ $(k \in R)$

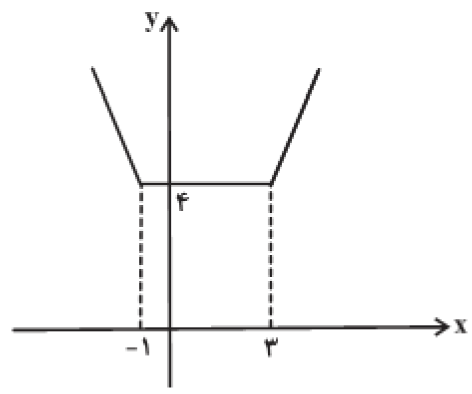
۱) $f(x) = -k + ۵$
۲) $f(x) = \frac{k}{۳} + ۵$
۳) $f(x) = -k + ۷$
۴) $f(x) = -\frac{k}{۳} + ۴$

پاسخ: گزینه ۲

معادله محور تقارن تابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$ برابر با $x = \frac{a+b}{۲}$ است، پس در این‌جا: $\frac{-۱+(-k)}{۲} = ۱ \Rightarrow k = -۳$

نمودار f را رسم می‌کنیم:

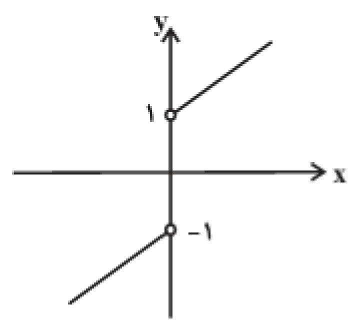
پس با توجه به گزینه‌ها فقط معادله $f(x) = ۴$ بی‌شمار جواب دارد. با جای‌گذاری $k = -۳$، فقط گزینه «۲» به‌صورت $f(x) = ۴$ درمی‌آید.



۱۳) اگر برد تابع $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ را مجموعه A و برد تابع $g(x) = x^۲ - ۶x$ را B در نظر بگیریم، در این صورت مجموعه‌ی $B - A$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۲
۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۱



$$f(x) = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+۱ & x > ۰ \\ x-۱ & x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = R_f = R - [-۱, ۱]$$

$$g(x) = x^۲ - ۶x = (x-۳)^۲ - ۹ \Rightarrow g(x) \geq -۹$$

$$\Rightarrow B = R_g = [-۹, +\infty)$$

$B - A = [-۱, ۱] \Rightarrow$ شامل سه عدد صحیح ۱ و ۰ و ۱- است.

۱۴) تابع $f(x) = |x - ۱| - |x - ۵|$ مفروض است. تابع $g = -f^{۲}$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

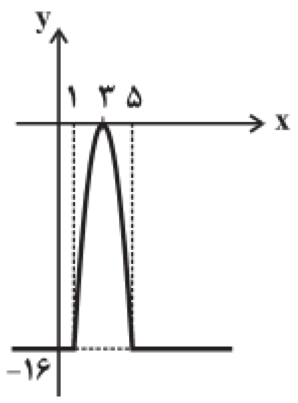
۱) $[-۱,۱]$
۲) $[۲,\frac{۵}{۲}]$
۳) $[۴,\frac{۹}{۲}]$
۴) $[\frac{۷}{۲},\frac{۱۱}{۲}]$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

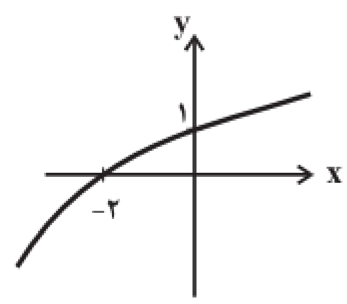
$$f(x) = \begin{cases} -۴ & ;x \le ۱ \\ ۲(x-۳) & ;۱ \le x \leqslant \\ ۴ & ;x \ge ۵ \end{cases} \Rightarrow f^{۲}(x) = \begin{cases} ۱۶ & ;x \le ۱ \\ ۴(x-۳)^{۳} & ;۱ \le x \le ۵ \\ ۱۶ & ;x \geqslant ۵ \end{cases}$$

و با توجه به ضابطه $f^{۲}$، نمودار $g = -f^{۲}$ به‌صورت زیر خواهد بود.



با توجه به نمودار، تابع g در بازه $[۳,۵]$ اکیداً نزولی است که بازه $[۴,\frac{۹}{۲}]$ زیر بازه‌ای از آن است.

۱۵) اگر نمودار تابع $y = -f(x)$ به صورت شکل زیر و جواب نامعادله $f(|x|) > f\left(\frac{x+۴}{۳}\right)$ بازه (a,b) باشد، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

تابع $-f$ اکیداً صعودی با دامنه R است، پس تابع f اکیداً نزولی با دامنه R است.

$$f(|x|) > f(\frac{x+۴}{۳}) \xrightarrow{\text{اکیدا نزولی است}} |x| < \frac{x+۴}{۳}$$

در دو حالت $x \ge ۰$ و $x < ۰$، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge ۰ : x < \dfrac{x+۴}{۳} \Rightarrow ۳x < x+۴ \Rightarrow x < ۲ \xrightarrow{\cap(x\ge۰)} ۰ \le x < ۲ \\ x < ۰ : -x < \dfrac{x+۴}{۳} \Rightarrow -۳x < x+۴ \Rightarrow x > -۱ \xrightarrow{\cap(x<۰)} -۱ < x < ۰ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\cup} -۱ < x < ۲ \Rightarrow a = -۱ \gg b = ۲$$

پس حداکثر $b - a$ برابر است با: $۳ = (۱-) - ۲$.

۱۶) نمودار تابع $f(x)=|2x|-|x-1|$ در بازه‌ای که اکیداً نزولی است، چند نقطه مشترک با نمودار تابع $y=x^3-2x^2-2x+1$ دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(x)=|2x|-|x-1|=\begin{cases}-x-1; & x<0\\ 3x-1; & 0\le x<1\\ x+1; & x\ge 1\end{cases}$$

تابع f در $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$x^3-2x^2-2x+1=-x-1$$

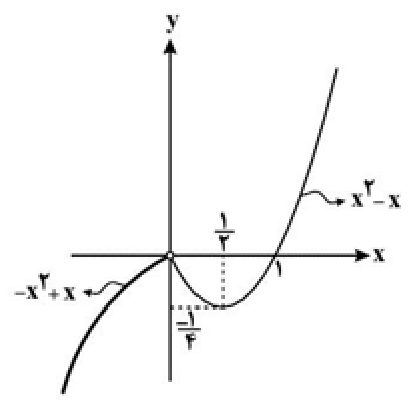
$$\Rightarrow x^3-2x^2-x+2=(x^2-1)(x-2)=0 \xrightarrow{x\le 0} x=-1$$

۱۷) تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^2}{|x|}(x-1)$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ و $-\frac{1}{4}\le x<0$
۲) $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ و $-\frac{1}{4}\le x<0$
۳) $\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ و $-\frac{1}{4}\le x<1$
۴) $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ و $-\frac{1}{4}\le x<1$

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل تابع در بازه $[0,\frac{1}{2})$ نزولی است که ضابطه آن در این بازه $y=x^2-x$ می‌باشد و برد آن هم $(0,-\frac{1}{4}]$ است. حالا ضابطه معکوس آن را پیدا می‌کنیم:

$$y=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Rightarrow y+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+\frac{1}{4}}=|x-\frac{1}{2}|$$

$$\xrightarrow{0<x\le\frac{1}{2}} \sqrt{y+\frac{1}{4}}=-(x-\frac{1}{2})\Rightarrow x=\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \qquad -\frac{1}{4}\le x<0$$

۱۸) در بزرگترین بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = ۲x + |۲x + ۱|$ وارون‌پذیر است، ضابطه وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۴}\ ;\ x \geq -۱$

۲) $f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۴}\ ;\ x \geq -\frac{۱}{۲}$

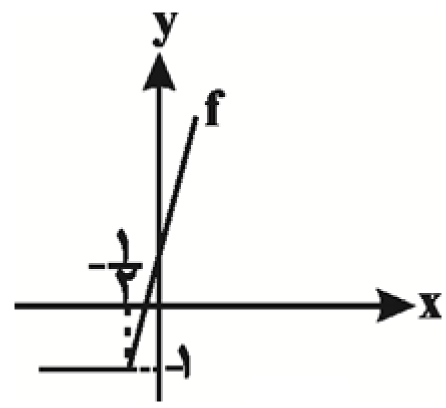
۳) $f^{-۱}(x) = ۴x + ۱\ ;\ x \geq -۱$

۴) $f^{-۱}(x) = ۴x + ۱\ ;\ x \geq -\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} ۲x+(۲x+۱)=۴x+۱ & ;x\geq -\frac{۱}{۲} \\ ۲x-(۲x+۱)=-۱ & ;x< -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با توجه به شکل، $[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f در آن وارون‌پذیر است، داریم:



$f : y = ۴x + ۱\ ;\ x \geq -\frac{۱}{۲}$

$x \geq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴x \geq -۲ \Rightarrow ۴x + ۱ \geq -۱ \Rightarrow y \geq -۱ \Rightarrow D_{f^{-۱}} = [-۱, +\infty)$

$\Rightarrow f^{-۱} : x = ۴y + ۱\ ;\ x \geq -۱$

$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۴}\ ;\ x \geq -۱$

۱۹) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۱|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $-x + ۷\ ;\ x > ۸$

۲) $\frac{۱}{۳}x + ۲\ ;\ x > ۳$

۳) $x + ۷\ ;\ x > -۴$

۴) $\frac{۱}{۲}x - ۱\ ;\ -۴ < x < ۸$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به ریشه‌های داخل هر قدر مطلق، تابع f را بعد از تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق، بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۶ + x + ۱ & x < -۱ \\ -۲x + ۶ - x - ۱ & -۱ \leq x \leq ۳ \\ ۲x - ۶ - x - ۱ & x > ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + ۷ & , \quad x < -۱ \\ -۳x + ۵ & , \quad -۱ \leq x \leq ۳ \\ x - ۷ & , \quad x > ۳ \end{cases}$$

با توجه به شیب خط‌های حاصل، تابع f در فاصله‌ی $x > ۳$ صعودی است (ضریب x مثبت است.). پس ضابطه‌ی معکوس تابع را در این فاصله می‌یابیم: $f(x) = x - ۷$ و $x > ۳$

$y = x - ۷ \Rightarrow x = y + ۷ \Rightarrow$ تابع معکوس: $y = x + ۷$

دامنه‌ی تابع معکوس که همان برد تابع f است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$x > ۳ \Rightarrow x - ۷ > -۴ \Rightarrow$ دامنه‌ی $f^{-۱}$: $x > -۴$

پس ضابطه‌ی تابع معکوس عبارت است از: $y = x + ۷$ و $x > -۴$

۲۰) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - |x-۲| + ۱$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه معکوس آن در بازه‌ی مذکور کدام است؟

۱) $y = \frac{x-۱}{۲}\ ;\ x \le ۲$
۲) $y = \frac{x+۱}{۲}\ ;\ x \le ۲$
۳) $y = \frac{x-۱}{۲}\ ;\ x \le ۳$
۴) $y = \frac{x+۱}{۲}\ ;\ x \le ۳$

پاسخ: گزینه ۴

$$x - |x-۲| + ۱ = \begin{cases} x - (x-۲) + ۱ = ۳ & , \quad x > ۲ \\ x + (x-۲) + ۱ = ۲x - ۱ & , \quad x \le ۲ \end{cases}$$

پس در فاصله‌ی $(-\infty , ۲)$ تابع با ضابطه‌ی $y = ۲x - ۱$ وارون‌پذیر است و داریم:

$$f(x) = ۲x - ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲}$$

$$F : \begin{cases} \text{دامنه} = D = (-\infty, ۲] \\ \text{برد} = R = (-\infty, ۳] \end{cases} \Rightarrow D_{f^{-۱}} R_f = (-\infty, ۳]$$

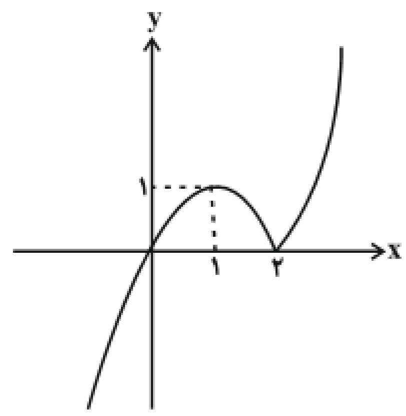
۲۱) تابع با ضابطه‌ی $y = x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $۱ - \sqrt{۱+x}\ ;\ x < ۰$
۲) $۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ x < ۱$
۳) $۱ + \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$
۴) $۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$

پاسخ: گزینه ۳

اگر نمودار تابع را رسم کنیم با ضابطه‌بندی خواهیم داشت:

$$y = x|x-۲| = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \ge ۲ \\ -x^۲ + ۲x & x < ۲ \end{cases}$$



این تابع در محدوده‌ی $۱ < x < ۲$ نزولی است که برد آن در این فاصله، $۰ < y < ۱$ خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع معکوس آن در این فاصله، $۰ < x < ۱$ است که مربوط به ضابطه‌ی $y = -x^۲ + ۲x$ می‌باشد.

$$y = -x^۲ + ۲x \Rightarrow -y = x^۲ - ۲x$$

$$\Rightarrow ۱ - y = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱ - y$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \sqrt{۱-y} \Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۱-y}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x} \quad (۰ < x < ۱)$$

۲۲) تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۶x + ۹} - |x+۲|$ در بازه‌ای یک‌به‌یک است، معکوس تابع در این بازه کدام است؟

۱) $y = \frac{x-۱}{۲}\ , x \in [-۵,۵]$

۲) $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\ , x \in [-۲,۳]$

۳) $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\ , x \in [-۵,۵]$

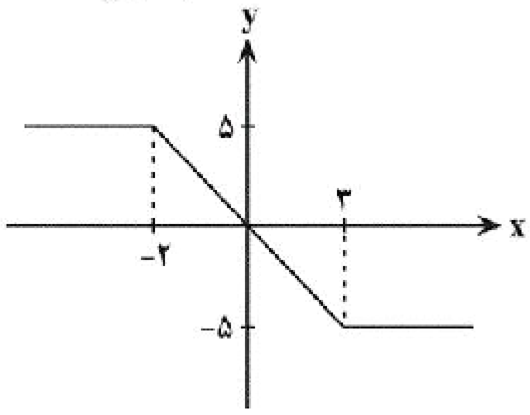
۴) $y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}\ , x \in [-۲,۳]$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(x) = \sqrt{(x-۳)^۲} - |x+۲| = |x-۳| - |x+۲|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۵ & x > ۳ \\ -۲x+۱ & -۲ \leqslant x \leqslant +۳ \\ ۵ & x < -۲ \end{cases}$$



$y = -۲x + ۱ \qquad [-۲,۳]$

$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{-۲} = -\frac{x-۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲},\ [-۵,۵]$

۲۳) اگر $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = x^۲ - ۶x + ۱۰$ باشند، مساحت ناحیهٔ محدود بین نمودار تابع fog و خط $y = ۲$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

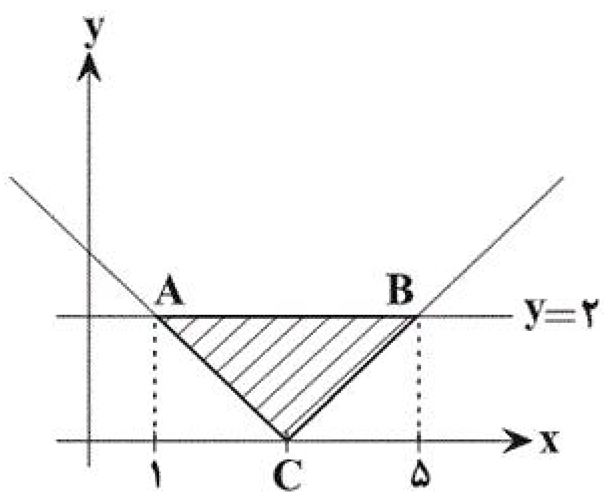
ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم: $y = f(g(x)) = \sqrt{x^۲ - ۶x + ۱۰ - ۱}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^۲ - ۶x + ۹} = \sqrt{(x-۳)^۲} = |x-۳|$$

حال نمودار $(fog)(x) = |x-۳|$ را با خط $y = ۲$ قطع می‌دهیم: $|x-۳| = ۲$

$$\Rightarrow x - ۳ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۵ \end{cases}$$

مساحت مثلث ABC: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$



۲۴) تابع با ضابطه $y = x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۱+x}\ ;\ x<۰$

۲) $۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ x<۱$

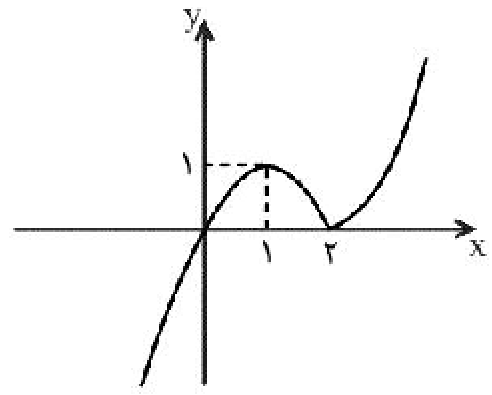
۳) $۱+\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$

۴) $۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$

پاسخ: گزینه ۳

اگر نمودار تابع را رسم کنیم با ضابطه‌بندی خواهیم داشت:

$$y = x|x-۲| = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & x < ۲ \end{cases}$$



این تابع وقتی $۱<x<۲$ نزولی است که برد آن در این فاصله، $۰<y<۱$ خواهد بود. پس دامنه تابع معکوس آن در این فاصله، $۰<x<۱$ است که مربوط به ضابطه $y=-x^۲+۲x$ می‌باشد.

$$y = -x^۲ + ۲x \Rightarrow -y = x^۲ - ۲x$$

$$\Rightarrow ۱-y = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱-y$$

$$\xrightarrow{۱<x<۲} x-۱ = \sqrt{۱-y} \Rightarrow x = ۱+\sqrt{۱-y}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱+\sqrt{۱-x} \quad (۰<x<۱)$$

۲۵) مجموعه جواب نامعادله $\frac{۲x^۲-|x|-۶}{-۳x^۲+۲x-۶} \leq ۰$ با مجموعه جواب کدام نامعادله یکسان است؟

۱) $|x| \leq ۲$

۲) $|x| \leq \frac{۳}{۲}, |x| \geq ۲$

۳) $|x| \geq ۲$

۴) $|x| \leq \frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

توجه کنید که مخرج کسر یعنی $-۳x^۲ + ۲x - ۶$ (دلتای منفی و ضریب $x^۲$ منفی دارد) همواره منفی است. در نتیجه صورت کسر باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یعنی:

$$۲x^۲ - |x| - ۶ \geq ۰$$

اگر فرض کنیم $k = |x|$، بنابراین نامعادله $۲k^۲ - k - ۶ \geq ۰$ را باید حل کنیم که جواب آن $k \geq ۲$ یا $k \leq -\frac{۳}{۲}$ است. چون $k = |x| > ۰$ است، پس مجموعه جواب قابل قبول $k \geq ۲$ یعنی $|x| \geq ۲$ است.