مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون A1 معادلات و توابع درجه ۲**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

۱) مجموع مقادیر m که به ازای آن‌ها سهمی $y = x^۲ + mx + ۱$ بر نیمساز ناحیه اول و سوم مماس شود، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

معادله نیمساز ناحیه اول و سوم، $y = x$ است.

چون سهمی بر $y = x$ مماس است، پس معادلات آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲ + mx + ۱ = x \Rightarrow x^۲ + (m - ۱)x + ۱ = ۰$$

و چون مماس است، یعنی یک نقطه برخورد دارند، پس: $\Delta = ۰$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (m - ۱)^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow (m - ۱)^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow m - ۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۳ \end{cases}$$

مجموع مقادیر m : $۳ + (-۱) = ۲$

۲) دو سهمی $y = x^۲ + ax + b$ و $y = -x^۲ + ۸x + c$ محور تقارن یکسانی دارند و فاصله عرض‌های رئوس آن‌ها ۲۳ واحد است. حاصل $a + b - c$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶۳ ۲) ۱ ۳) ۱۷ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

معادله محور تقارن را یکسان قرار داده و سپس اختلاف عرض نقاط رئوس را برابر ۲۳ قرار می‌دهیم. دو حالت داریم:

$$-\frac{a}{۲} = -\frac{۸}{-۲} \Rightarrow a = -۸$$

عرض رأس سهمی $y = a'x^۲ + b'x + c'$ برابر $\frac{-b'^۲ + ۴a'c'}{۴a'}$ است. بنابراین:

حالت اول : $(-\frac{۶۴+۴c}{-۴}) - (-\frac{۶۴-۴b}{۴}) = (۱۶ + c) - (b - ۱۶) = ۲۳$

$$\Rightarrow c - b = -۹ \Rightarrow a + b - c = ۱$$

حالت دوم : $(-\frac{۶۴-۴b}{۴}) - (-\frac{۶۴+۴c}{-۴}) = (b - ۱۶) - (۱۶ + c) = ۲۳$

$$\Rightarrow b - c = ۵۵ \Rightarrow a + b - c = ۴۷$$

۳) رأس سهمی $y = x^{۲} - kx + ۱$ روی خط $y = -۲x$ است. مقدار k کدام است؟

۱) $۲ \pm \sqrt{۳}$ ۲) $۲ \pm \sqrt{۵}$ ۳) $۲ \pm \sqrt{۸}$ ۴) $۳ \pm \sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

مختصات رأس سهمی را محاسبه می‌کنیم:

طول رأس سهمی : $-\frac{b}{۲a} = \frac{k}{۲}$

با جایگذاری $x = \frac{k}{۲}$ در ضابطه سهمی، عرض سهمی را به‌دست می‌آوریم:

عرض رأس سهمی: $= f(\frac{k}{۲}) = \frac{k^{۲}}{۴} - \frac{k^{۲}}{۲} + ۱ = ۱ - \frac{k^{۲}}{۴}$

مختصات رأس سهمی در معادله خط $y = -۲x$ صدق می‌کند.

$$y = -۲x \Rightarrow ۱ - \frac{k^{۲}}{۴} = -۲(\frac{k}{۲}) \Rightarrow ۴ - k^{۲} = -۴k$$

$$\Rightarrow k^{۲} - ۴k - ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۱۶ = ۳۲$$

$$k = \frac{۴ \pm \sqrt{۳۲}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۸}$$

۴) نمودار سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ از نقاط $A(۳ , -۴)$ و $B(۱ , -۴)$ گذشته و می‌دانیم کمترین مقدار y برابر ۵- می‌باشد. اگر رأس سهمی نقطه (m , n) باشد، $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۱- ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

عرض نقاط A و B یکسان است، پس طول رأس سهمی برابر است با میانگین طول‌های A و B:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۳}{۲} = ۲$$

از طرفی گفته شده کمترین مقدار تابع برابر (۵-) است لذا عرض رأس هم (۵-) می‌باشد. پس مختصات رأس به صورت $S(۲ , -۵)$ می‌باشد و داریم:

$$(۲, -۵) = (m, n) \Rightarrow \frac{n}{m} = -\frac{۵}{۲}$$

۵) محور تقارن سهمی $y = x^۲ + ۴x + k$، همین سهمی را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع می‌کند. طول پاره خطی که سهمی روی محورxها ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ **۲)** $۴\sqrt{۳}$ **۳)** $۲\sqrt{۲}$ **۴)** $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

محل برخورد سهمی با خط تقارنش همان رأس سهمی است که عرض آن از فرمول $-\frac{\Delta}{۴a}$ به دست می‌آید.

$$\Delta = (۴)^۲ - ۴(۱)(k) = ۱۶ - ۴k \qquad (۱)$$

$$-\frac{\Delta}{۴a} = -۲ \xrightarrow{a=۱} \Delta = ۸ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)} ۱۶ - ۴k = ۸ \Rightarrow ۸ = ۴k \Rightarrow k = ۲$$

معادله سهمی : $y = x^۲ + ۴x + ۲$

$$\left.\begin{aligned} x_۱ &= \frac{-۴+\sqrt{۸}}{۲} \\ x_۲ &= \frac{-۴-\sqrt{۸}}{۲} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{رویمحورxها}]{\text{صله بین ریشه ها}}$$

$$\left|\frac{-۴-\sqrt{۸}}{۲} - \frac{-۴+\sqrt{۸}}{۲}\right| = \left|-\frac{۲\sqrt{۸}}{۲}\right| = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

۶) اگر یک سهمی از نقاط $A(1, 3)$ و $B(3, 3)$ بگذرد و رأس آن روی خط $y = -x$ قرار داشته باشد، رأس این سهمی با رأس کدام یک از سهمی‌های زیر یکسان است؟

۱) $y = x^2 + 4x + 6$

۲) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

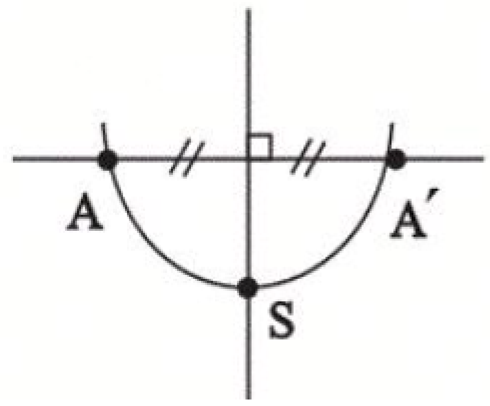
۳) $y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$

۴) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اینکه قرینه هر نقطه سهمی نسبت به محور تقارن بر روی خود سهمی قرار دارد، پس می‌توانیم x_S را به صورت زیر به دست آوریم:

$$x_S = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$



محور تقارن

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

در اینجا نیز دو نقطه A و B دارای عرض یکسان‌اند پس نسبت به محور تقارن قرینه‌اند.

و چون رأس سهمی روی خط $y = -x$ قرار دارد، پس y آن برابر ۲- است، یعنی $S = (2 , -2)$. حال مختصات رأس سهمی‌های داده شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

گزینه «۲»:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -2$$

گزینه «۳»:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times\frac{3}{2}} = 2$$

$$y_S = \frac{3}{2}(2)^2 - 6(2) + 4 = 6 - 12 + 4 = -2 \Rightarrow S = (2 , -2)$$

گزینه «۴»:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2\times\frac{1}{4}} = 2$$

$$y_S = \frac{1}{4}(2)^2 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow S = (2 , 2)$$

۷) اگر پایین‌ترین نقطه سهمی $y = x^{۲} - m(x-۱) + ۴$ روی نیمساز ربع دوم (در ناحیه دوم) قرار داشته باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

۱) -۲ **۲)** ۸ **۳)** -۴ **۴)** ۶

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا معادله سهمی را مرتب می‌کنیم:

$$f(x) = x^{۲} - mx + m + ۴$$

می‌دانیم که اگر $a > ۰$ باشد، مختصات پایین‌ترین نقطه سهمی به‌صورت $(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ است. چون این نقطه روی نیمساز ربع دوم یعنی خط $y = -x$ قرار دارد. بنابراین مختصات نقطه در خط صدق می‌کند (توجه کنید که چون پایین‌ترین نقطه روی نیمساز ناحیه دوم است طول آن منفی است.)

$$-\frac{b}{۲a} < ۰ \Rightarrow \frac{m}{۲} < ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$-\frac{\Delta}{۴a} = -(\frac{-b}{۲a}) \Rightarrow \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{b}{۲a} \Rightarrow \frac{-\Delta}{۲} = b \Rightarrow \Delta = -۲b \quad (*)$$

با توجه به معادله $y = x^{۲} - mx + m + ۴$ داریم:

$$\xrightarrow{(*)} m^{۲} - ۴(۱)(m+۴) = -۲(-m)$$

$$\Rightarrow m^{۲} - ۴m - ۱۶ = +۲m \Rightarrow m^{۲} - ۶m - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۸)(m+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۸ & \text{غ ق ق} \\ m = -۲ \end{cases}$$

توجه کنید که در $m = ۸$ شرط $m < ۰$ صدق نمی‌کند.

۸) اگر سهمی $y = ax^{۲} - bx + c$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۴}{b}$ قطع کند و با محور طول‌ها فقط در نقطه‌ای به طول ۲- مشترک باشد، a کدام است؟ (سهمی پایین محورxها قراردارد).

۱) $-\frac{۱}{۲}$ **۲)** $\frac{۱}{۲}$ **۳)** -۲ **۴)** $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

سهمی مورد نظر با محور x فقط درنقطه‌ای به طول ۲- = x مشترک است، یعنی یک ریشه مضاعف دارد و معادله آن به شکل زیر است:

$$y = a(x+۲)^{۲}$$

سهمی، محور عرض‌ها را در $-\frac{۴}{b}$ قطع می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} x = ۰ \Rightarrow y = ۴a = -\frac{۴}{b} \Rightarrow b = -\frac{۱}{a} \\ y = a(x+۲)^{۲} = ax^{۲} + ۴ax + ۴a = ax^{۲} - bx + c \Rightarrow ۴a = -b \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۴a = -(-\frac{۱}{a}) \Rightarrow a^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{سهمی پایین محور x ها قرار دارد.}} a = -\frac{۱}{۲}$$

۹) اگر معادله $۲x^۲+۵x=۳$ را به‌صورت $(x+a)^۲=b$ بنویسیم، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲

$$۲x^۲+۵x=۳ \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow a=\frac{۵}{۴},\ b=\frac{۴۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{۲۰}{۱۶}+\frac{۴۹}{۱۶}=\frac{۶۹}{۱۶}$$

۱۰) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۶x-۲=۰$ باشند، آنگاه حاصل عبارت $۴\alpha^۲-۱۲\alpha+۲\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$x^۲-۶x-۲=۰ \xrightarrow{\text{دارای دو ریشه}\ (\Delta>۰)} \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=۶ \\ P=\frac{c}{a}=-۲ \end{cases}$$

عبارت $۴\alpha^۲-۱۲\alpha+۲\beta^۲$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underbrace{۲\alpha^۲+۲\beta^۲}_{\mathrm{I}}+\underbrace{۲\alpha^۲-۱۲\alpha}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow ۲(\alpha^۲+\beta^۲)=۲(S^۲-۲P)=۲\times(۳۶+۴)=۸۰$$

برای به‌دست آوردن عبارت II کافیست معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌صورت $x^۲-۶x=۲$ نوشته و سپس $x=\alpha$ را که یکی از ریشه‌های آن است در معادله جایگذاری کنیم:

$$\alpha^۲-۶\alpha=۲ \xrightarrow{\times ۲} \underbrace{۲\alpha^۲-۱۲\alpha}_{\mathrm{II}}=۴$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}+\mathrm{II}=۸۰+۴=۸۴$$

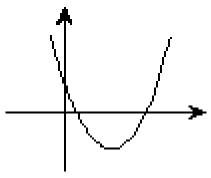
۱۱) محدودهٔ a کدام باشد تا نمودار تابع درجه دوم $y=(a+6)x^2+(a-2)x+1$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور <u>نکند</u>؟

۱) $-6<a<-2$ ۲) $a\le -6$ ۳) $a\ge -2$ ۴) $a>5$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

می‌دانیم اگر $(a+6)>0$ (ضریب x^2) معادلهٔ درجهٔ دوم رو به بالاست. حال حالت‌هایی را که ضریب x^2 مثبت و معادلهٔ درجهٔ دوم از ناحیهٔ چهارم عبور کند از $a+6>0$ کم می‌کنیم.



$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x^2 \text{ ضریب } >0 \Rightarrow a+6>0 \Rightarrow a>-6 \\ b<0 \Rightarrow a-2<0 \Rightarrow a<2 \end{array}\right\} \$-6<a<2\$ \\ \Delta>0 \Rightarrow (a-2)^2-4(a+6)>0 \Rightarrow (a^2-4a+4)-4a-24>0 \end{cases}$$

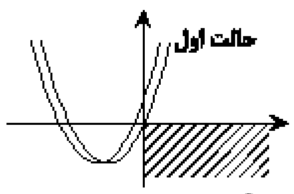
$a^2-8a-20>0 \Rightarrow (a-10)(a+2)>0 \Rightarrow a<-2$ یا $a>10$ (۲)

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -6<a<-2$

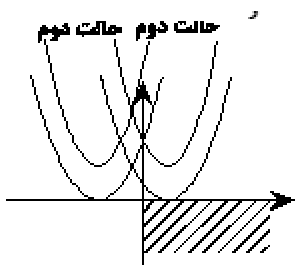
حال اگر از $a>-6$، $-6<a<-2$ را کم کنیم $a\ge -2$ به‌دست می‌آید.

روش دوم: در حالت‌های زیر معادلهٔ درجهٔ دوم از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

$$\text{حالت اول}\begin{cases} a+6>0 \Rightarrow a>-6 \\ b>0 \Rightarrow a-2>0 \Rightarrow a>2 \\ \Delta>0 \Rightarrow (a-2)^2-4(a+6)(1) \\ \Rightarrow a^2-8a-20>0 \Rightarrow \begin{cases} a>10 \\ a<-2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a>10\ (1)$$



$$\left.\begin{cases} (a+6)>0 \Rightarrow a>-6 \\ \Delta\le 0 \Rightarrow a^2-8a-20\le 0 \Rightarrow -2\le a\le 10 \end{cases}\right\} \Rightarrow -2\le a\le 10\ (2)$$



$\xrightarrow{(1),(2)} a\ge -2$

۱۲) به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^۲ - kx + (k - ۱) = ۰$ به صورت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هستند؟

۱) فقط صفر ۲) فقط ۴ ۳) صفر یا ۴ ۴) نشدنی

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

داریم:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow S^۲ - ۲P = ۱$$

$$\Rightarrow (+\frac{k}{۲})^۲ - ۲(\frac{k-۱}{۲}) = ۱ \Rightarrow \frac{k^۲}{۴} - k + ۱ = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{k^۲}{۴} - k = ۰ \Rightarrow k = ۰ \text{ یا } ۴$$

به ازای $k = ۴$ معادله $۲x^۲ - ۴x + ۳ = ۰$ را داریم که ریشه حقیقی ندارد. به ازای $k = ۰$ معادله $۲x^۲ - ۱ = ۰$ را داریم که ریشه‌های $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را دارد. پس فقط $k = ۰$ درست است.

۱۳) به ازای چند مقدار صحیح m معادله $x^۴ - ۲\sqrt{۳}x^۲ + m^۲ - ۱ = ۰$ دارای دو جواب حقیقی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با فرض $x^۲ = t$ داریم: $t^۲ - ۲\sqrt{۳}t + m^۲ - ۱ = ۰$

اگر این معادله دارای دو جواب مختلف‌العلامت یا دارای ریشه مضاعف مثبت باشد، معادله اصلی دارای دو جواب به صورت $x = \pm\sqrt{t}$ خواهد بود.

دارای دو ریشه مختلف‌العلامت ⇐ حالت اول:

$$ac < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۱ < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۱$$

دارای ریشه مضاعف مثبت ⇐ حالت دوم:

$$\begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow (-۲\sqrt{۳})^۲ - ۴(۱)(m^۲ - ۱) = ۰ \\ ۱۲ - ۴m^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow m^۲ = ۴ \Rightarrow m = \pm ۲ \\ \frac{-b}{۲a} > ۰ \text{ :برقرار است} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نهایی برای m برابر است با:

$$(-۱\ ,\ ۱) \cup \{\pm ۲\}$$

واضح است که سه مقدار صحیح $m = ۰\ ,\ \pm ۲$ وجود دارد.

۱۴) اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ بین ضرایب، رابطه $۴a + c = ۲b$ برقرار باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها همواره کدام است؟

۱) $\frac{c}{۲a}$ ۲) ۲ ۳) $۲ - \frac{b}{a}$ ۴) $۲ + \frac{b}{a}$

پاسخ: گزینه ۳

اگر $x = -۲$ را در معادله قرار دهیم، به رابطه $۴a - ۲b + c = ۰$ می‌رسیم که همان رابطه صورت سؤال است؛ بنابراین یکی از ریشه‌ها $x_۱ = -۲$ است. ریشه دیگر را $x_۲$ می‌نامیم:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = x_۱ + x_۲ = -۲ + x_۲ \Rightarrow x_۲ = ۲ - \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = x_۱ x_۲ = -۲x_۲ \Rightarrow x_۲ = -\frac{c}{۲a} \end{cases}$$

۱۵) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲ - x - ۳ = ۰$ باشند، حاصل $(\beta^۴ - ۵)(\alpha + ۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۷ ۴) ۷-

پاسخ: گزینه ۴

چون β ریشه معادله درجه دوم $x^۲ - x - ۳ = ۰$ است، داریم:

$$\beta^۲ - \beta - ۳ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ = \beta + ۳ \xrightarrow{\text{توان۲}} \beta^۴ = \beta^۲ + ۶\beta + ۹$$

$$\xrightarrow{\beta^۲ = \beta + ۳} \beta^۴ = \beta + ۳ + ۶\beta + ۹ \Rightarrow \beta^۴ = ۷\beta + ۱۲$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین با (۵-) جمع شود}} \beta^۴ - ۵ = ۷\beta + ۷$$

$$(\beta^۴ - ۵)(\alpha + ۱) = (۷\beta + ۷)(\alpha + ۱) = ۷(\beta + ۱)(\alpha + ۱)$$

$$= ۷(\underbrace{\alpha \, . \, \beta}_{P} + \underbrace{\beta + \alpha}_{S} + ۱) = ۷(-۳ + ۱ + ۱) = -۷$$

در محاسبات بالا دقت شود که:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-۱)}{۱} = ۱ \\ P = \alpha \, . \, \beta = \frac{c}{a} = -\frac{۳}{۱} = -۳ \end{cases}$$

(۱۶ حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $(3x^2+2x+1)^2 - 14x = 15 + 21x^2$ کدام است؟

۱) $-\frac{14}{9}$
۲) $-\frac{4}{3}$
۳) $-\frac{2}{3}$
۴) $-\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(3x^2+2x+1)^2 = 21x^2 + 14x + 15$$

حال با درنظر گرفتن $t = 3x^2+2x+1$، معادله را به معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$(3x^2+2x+1)^2 = \underbrace{21x^2+14x+7}_{7(3x^2+2x+1)} + 8$$

حالا با تغییر متغیر داریم:

$$t^2 = 7t + 8 \Rightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Rightarrow t = 8, -1$$

پس:
$$\begin{cases} 3x^2+2x+1 = 8 \Rightarrow 3x^2+2x-7 = 0 & (1) \\ 3x^2+2x+1 = -1 \Rightarrow 3x^2+2x+2 = 0 & (2) \end{cases}$$

معادله (۱) دارای دو ریشه حقیقی $(\Delta > 0)$ با حاصل‌ضرب $P = \frac{c}{a} = \frac{-7}{3}$ است. اما معادله (۲) ریشه حقیقی ندارد $(\Delta < 0)$. پس معادله دارای دو ریشه حقیقی با حاصل‌ضرب $-\frac{7}{3}$ است.

(۱۷ به ازای چند مقدار صحیح m، نمودار تابع $y = mx^2 - 2x + 2 - m$ از ربع سوم دستگاه مختصات عبور <u>نمی‌کند</u>؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

اگر $m = 0$ باشد، خط $y = -2x + 2$ از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد. اما با فرض $m \neq 0$، برای سهمی $y = mx^2 - 2x + 2 - m$ داریم:

$$\Delta = (-2)^2 - 4m(2-m) = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m-1)^2 \geq 0$$

بنابراین برای اینکه سهمی مورد نظر از ربع سوم نگذرد، کافی است شروط زیر برقرار باشند. (سهمی ریشه‌های نامنفی داشته باشد):

$$\begin{cases} \text{دهانه سهمی رو به بالا باشد.} \Rightarrow m > 0 & (1) \\ S > 0 \Rightarrow \frac{2}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 & (2) \\ P \geq 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 & (3) \end{cases}$$

با توجه به اینکه $m = 0$ نیز قابل قبول است، m می‌تواند اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ را بپذیرد.

۱۸) اگر ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله $x^۲-۳x+۲a-۱=۰$ هم‌علامت باشند، a کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

برای آنکه معادله درجه دوم دو ریشه متمایز هم‌علامت داشته باشد، باید دو شرط $\Delta > ۰$ و $P > ۰$ برقرار باشد:

$$x^۲-۳x+۲a-۱=۰$$

$$\begin{cases}\Delta=(-۳)^۲-۴(۲a-۱)=۱۳-۸a>۰\Rightarrow a<\frac{۱۳}{۸} \quad (I)\\ P=۲a-۱>۰\Rightarrow a>\frac{۱}{۲} \quad (II)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} \frac{۱}{۲}<a<\frac{۱۳}{۸}\Rightarrow ۰/۵<a<۱/۶۲۵$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۴) در نامعادله فوق صدق نمی‌کند.

۱۹) ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$ ۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

پاسخ: گزینه ۴

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ P=\alpha\beta=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

ریشه‌های معادله مورد نظر از معکوس ریشه‌های معادله بالا یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ است، لذا:

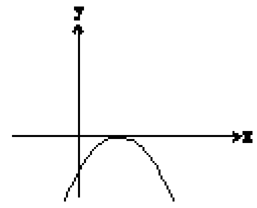
$$S'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}-۲=-۵$$

$$P'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+۱$$
$$=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}}+۱=۲$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$$

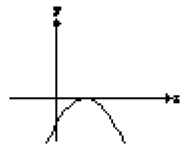
۲۰) اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = (۱۲x - m + ۱)(mx - ۱)$ به صورت زیر باشد، چند مقدار برای m قابل قبول است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نمودار، تابع درجه دوم f یک ریشه مضاعف دارد.



بنابراین در معادله $(۱۲x - m + ۱)(mx - ۱) = ۰$ بایستی هر دو عامل ریشه برابر داشته باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۲x - m + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{m - ۱}{۱۲} \\ mx - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{۱}{m} \end{cases} \qquad \Rightarrow \frac{m-۱}{۱۲} = \frac{۱}{m} \Rightarrow m^۲ - m = ۱۲$$

$$\Rightarrow m^۲ - m - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۴ \\ m = -۳ \end{cases}$$

با توجه به اینکه در ضابطه f ضریب $x^۲$ ، ۱۲m می‌باشد و سهمی رو به پایین است، بنابراین $m = ۴$ قابل قبول نیست.

همچنین با توجه به شکل تابع یک ریشه مضاعف مثبت دارد ولی به ازای $m = -۳$ ریشه مضاعف $-\frac{۱}{۳}$ می‌شود که غیرقابل قبول است بنابراین هیچ مقداری برای m قابل قبول نیست.

۲۱) علی و مهدی کاری را با هم در۸ ساعت و۴۵ دقیقه انجام می‌دهند. اگر هر کدام بخواهند به تنهایی این کار را انجام دهند، علی۶ ساعت کار را زودتر انجام می‌دهد. مهدی به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

۱) ۲۴
۲) ۲۱
۳) ۱۸
۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲

۸ ساعت و ۴۵ دقیقه یعنی $۸\frac{۳}{۴}$ ساعت که می‌شود $\frac{۳۵}{۴}$ ساعت.

نکته: اگر شخص اول کاری را در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم آن کار را در C ساعت انجام دهند، داریم:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

اگر فرض کنیم مهدی کار را در x ساعت انجام می‌دهد، علی آن کار را ۶ ساعت زودتر یعنی در $x - ۶$ ساعت انجام می‌دهد. با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{۱}{x-۶} + \frac{۱}{x} = \frac{۱}{\frac{۳۵}{۴}} \Rightarrow \frac{x+x-۶}{x^۲-۶x} = \frac{۴}{۳۵}$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۲۴x = ۷۰x - ۲۱۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴۷x + ۱۰۵ = ۰$$

دلتا را حساب می‌کنیم: $\Delta = (-۴۷)^۲ - ۴(۲)(۱۰۵) = ۱۳۶۹$

$$x = \frac{۴۷ \pm \sqrt{۱۳۶۹}}{۴} = \frac{۴۷ \pm ۳۷}{۴} \xrightarrow{x>۶} \begin{cases} x = ۲/۵ \checkmark \\ x = ۲۱ \times \end{cases}$$

۲۲) سهمی $y = f(x)$ ، محور xها را در نقاطی به طول ۱- و ۵ قطع می‌کند و خط $y = ۱۸$ بر آن مماس است. مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۳۲-
۳) ۱۶
۴) ۱۶-

پاسخ: گزینه ۲

سهمی محور xها را در ۱- و ۵ قطع می‌کند، پس ضابطه آن به صورت روبه‌رو است: $f(x) = a(x+۱)(x-۵)$

چون خط $y = ۱۸$ بر سهمی مماس است، عرض رأس سهمی ۱۸ است. از طرفی طول رأس سهمی، میانگین ریشه‌های سهمی است:

$$x_S = \frac{-۱+۵}{۲} = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۱۸ \Rightarrow -۹a = ۱۸ \Rightarrow a = -۲$$
$$\Rightarrow f(x) = -۲(x+۱)(x-۵) \Rightarrow f(۷) = -۲(۸)(۲) = -۳۲$$

۲۳) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲} - x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha + \frac{۱}{\alpha - ۱})^{۲} + (\beta + \frac{۱}{\beta - ۱})^{۲}$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۴ + ۴\sqrt{۵}$ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

$$x^{۲} - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - x = ۱ \Rightarrow x(x - ۱) = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{x - ۱}$$

با جای گذاری α و β در تساوی آخر داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{\alpha - ۱} = \alpha \\ \frac{۱}{\beta - ۱} = \beta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} S = ۱ \\ P = -۱ \end{cases}$$

$(۲\alpha)^{۲} + (۲\beta)^{۲} = ۴(\alpha^{۲} + \beta^{۲})$ = عبارت صورت سؤال

$$= ۴(S^{۲} - ۲P) = ۴(۱ + ۲) = ۱۲$$

۲۴) اگر ریشه‌های معادله $kx^{۲} + mx + ۱ = ۰$ مربع ریشه‌های معادله $۲x^{۲} - ۶x + ۱ = ۰$ باشند، مقدار $k + m$ کدام است؟

۱) ۳۶- ۲) ۳۲- ۳) ۲۸- ۴) ۲۴-

پاسخ: گزینه ۳

ریشه‌های معادله $۲x^{۲} - ۶x + ۱ = ۰$ را α و β می‌گیریم، پس:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۳ \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^{۲}$ و $\beta^{۲}$ باشد. مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله جدید را حساب می‌کنیم:

$$S' = \alpha^{۲} + \beta^{۲} = (\alpha + \beta)^{۲} - ۲\alpha\beta = ۳^{۲} - ۲(\tfrac{۱}{۲}) = ۸$$

$$P' = \alpha^{۲}\beta^{۲} = (\alpha\beta)^{۲} = (\tfrac{۱}{۲})^{۲} = \tfrac{۱}{۴}$$

پس معادله جدید به صورت زیر است:

$$x^{۲} - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۸x + \tfrac{۱}{۴} = ۰$$

با ضرب طرفین تساوی در عدد ۴ داریم:

$$\underbrace{۴}_{k} x^{۲} \underbrace{- ۳۲}_{m} x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow k + m = ۴ + (-۳۲) = -۲۸$$

۲۵) یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a(x-2)^2 = x$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کم‌تر است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه داریم:

$$a(x^2-4x+4) = x \Rightarrow ax^2-(4a+1)x+4a=0$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{4a+1}{a}\\ \alpha\beta=4\end{cases}$$

$$\alpha = 10\beta-3 \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^2 = 10\alpha\beta-3\alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=4} \alpha^2 = 40-3\alpha \Rightarrow \alpha^2+3\alpha-40=0$$

$$\Rightarrow (\alpha+8)(\alpha-5)=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-8\\ \alpha=5\end{cases}$$

ریشه‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند:

$$\begin{cases}\alpha=-8 \Rightarrow a(-8-2)^2=-8 \Rightarrow 100a=-8 \Rightarrow a=-\frac{2}{25}\\ \alpha=5 \Rightarrow a(5-2)^2=5 \Rightarrow 9a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{9}\end{cases}$$

بنابراین مقدار مثبت a برابر $\frac{5}{9}$ است