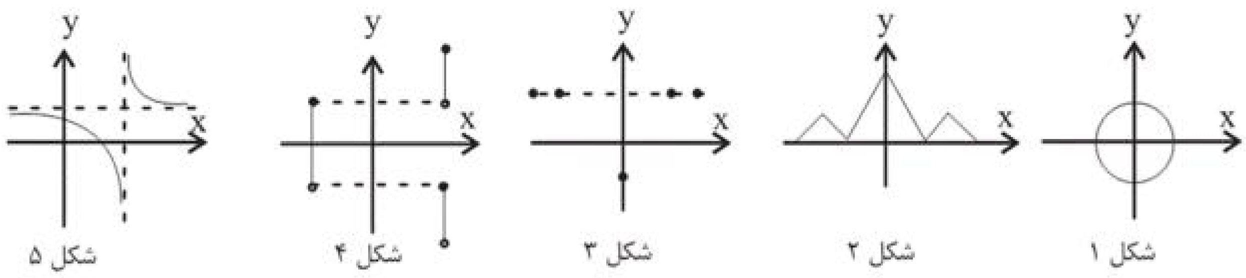
مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ تابع**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

① چه تعداد از نمودارهای زیر نشان دهنده یک تابع هستند؟



۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به مفهوم تابع، در شکل ۱ و ۴ نقاطی وجود دارد که به ازای یک x چند y دارند، پس تابع نیستند (در این نمودارها، خطی موازی محور yها می‌توان رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.) و سه شکل دیگر تابع هستند.

② کدام‌یک از رابطه‌های زیر، یک تابع را توصیف نمی‌کند؟

۱) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه‌های دوم آن را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی، مربع آن را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی، مکعب آن را نسبت می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۱

گزینه (۱): تابع نیست، زیرا برای هر عدد مثبت، دو ریشه دوم وجود دارد.

گزینه (۲): تابع است، زیرا برای هر عدد حقیقی، یک ریشه سوم وجود دارد.

گزینه (۳): تابع است، زیرا مربع هر عدد حقیقی، عددی یکتاست.

گزینه (۴): تابع است، زیرا مکعب هر عدد حقیقی، عددی یکتاست.

③ اگر $A=\{-۱,۰,۱\}$ و $B=\{-۲,۰,۲\}$ باشند، آن‌گاه کدام رابطه‌ی زیر تابع است؟

۱) $R=\{(x,y)|x\in A, y\in B, |x|<|y|\}$

۲) $S=\{(x,y)|x,y\in A, xy<x+y\}$

۳) $T=\{(x,y)|x,y\in B, x^۲<y^۲\}$

۴) $U=\{(x,y)|x\in A, y\in B, x^۲>y+۱\}$

پاسخ: گزینه ۴

$R=\{(-۱,-۲),(-۱,۲),(۰,-۲),(۰,۲),(۱,-۲),(۱,۲)\}$ تابع نیست

$S=\{(-۱,۱),(۰,۱),(۱,۱),(۱,-۱),(۱,۰)\}$ تابع نیست

$T=\{(۰,۲),(۰,-۲)\}$ تابع نیست

$U=\{(-۱,-۲),(۰,-۲),(۱,-۲)\}$ تابع است

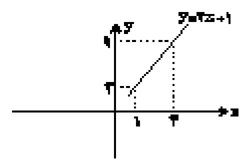
④ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{۲} - ۳$ برابر $[-۴,۸]$ باشد و برد تابع $g(x) = ۲x + ۱$ برابر $[۳,۹]$ باشد، آنگاه $R_f \cup D_g$ (اجتماع برد f و دامنه‌g) کدام است؟

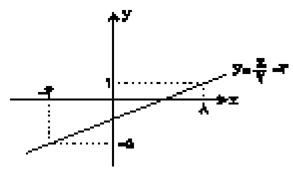
۱) $[-۴,۹]$ ۲) $[-۵,۴]$ ۳) $[-۴,۴] - \{۱\}$ ۴) $\{۱\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

به دو شکل زیر دقت کنید:





$R_g = [۳,۹] \Rightarrow D_f = [۱,۴]$ $D_f = [-۴,۸] \Rightarrow R_f = [-۵,۱]$

$\Rightarrow R_f \cup D_g = [-۵,۴]$

⑤ دامنه یک تابع $۲۹ - ۵n$ عضو و برد آن $۳n + ۷$ عضو دارد. چند عدد طبیعی برای n وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

باید تعداد اعضای دامنه، بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای برد باشد، پس:

$$۲۹ - ۵n \geq ۳n + ۷ \Rightarrow ۸n \leq ۲۲ \Rightarrow n \leq \frac{۲۲}{۸}$$

$$\xrightarrow{n \in N} n = ۱ \text{ یا } n = ۲$$

⑥ اگر $x f(۳) + ۳f(x) = x + ۶$ باشد، $f(۶)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید $f(۳)$ را بیابیم، پس مقدار x را در رابطه برابر با۳قرار می‌دهیم:

$$۳f(۳) + ۳f(۳) = ۳ + ۶ = ۹ \Rightarrow ۶f(۳) = ۹$$

$$\Rightarrow f(۳) = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

حال مقدار $f(۳)$ را در رابطه‌ی اصلی قرار می‌دهیم تا $f(x)$ به‌دست آید:

$$x \times (\frac{۳}{۲}) + ۳f(x) = x + ۶$$

$$\Rightarrow ۳f(x) = -\frac{۳}{۲}x + x + ۶ = -\frac{۱}{۲}x + ۶ \Rightarrow f(x) = -\frac{۱}{۶}x + ۲$$

$$\Rightarrow f(۶) = -\frac{۱}{۶}(۶) + ۲ = ۱$$

۷) اگر $f(x)=\frac{x^۲+ax}{۵x^۲+۳x}$ تابعی ثابت و $g(x)=\frac{x^۳-۲x}{bx^۲-۲}$ تابعی همانی باشد، حاصل $۵a-b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ثابت بودن این تابع یعنی نسبت ضرایب $x^۲$ و x باید برابر باشند:

$$\frac{۱}{۵}=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=\frac{۳}{۵}$$

که در این‌صورت:

$$f(x)=\frac{x^۲+\frac{۳}{۵}x}{۵x^۲+۳x}=\frac{x^۲+\frac{۳}{۵}x}{۵(x^۲+\frac{۳}{۵}x)}=\frac{۱}{۵}$$

تابع همانی نیز یعنی $g(x)=x$ است پس:

$$\frac{x^۳-۲x}{bx^۲-۲}=x\Rightarrow x^۳-۲x=bx^۳-۲x\Rightarrow b=۱$$

$$۵a-b=۵\times\frac{۳}{۵}-۱=۳-۱=۲$$

۸) اگر $f(\frac{x-۱}{x})+f(۳)=۵x+۴$ باشد، مقدار $f(۹)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$
۲) $\frac{۱۳}{۸}$
۳) $\frac{۲۱}{۸}$
۴) $\frac{۱۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مقدار $f(۳)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار کافی است $\frac{x-۱}{x}$ را برابر ۳ قرار دهیم و x را پیدا کنیم و در معادله داده شده قرار دهیم:

$$\frac{x-۱}{x}=۳\Rightarrow x-۱=۳x\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(۳)+f(۳)=۵\times(-\frac{۱}{۲})+۴\Rightarrow ۲f(۳)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۳)=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(\frac{x-۱}{x})+\frac{۳}{۴}=۵x+۴\Rightarrow f(\frac{x-۱}{x})=۵x+\frac{۱۳}{۴}$$

حال کافی است $\frac{x-۱}{x}$ را برابر ۹ قرار داده، x را پیدا کنیم و در معادله قرار دهیم تا حاصل $f(۹)$ به‌دست آید:

$$\frac{x-۱}{x}=۹\Rightarrow x-۱=۹x\Rightarrow x=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow f(۹)=۵\times(-\frac{۱}{۸})+\frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(۹)=\frac{۲۶-۵}{۸}\Rightarrow f(۹)=\frac{۲۱}{۸}$$

۹ کدام جفت از توابع زیر با هم برابرند؟

۱) $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^۲}$

۲) $f(x) = |x - ۱|$ و $g(x) = (\sqrt{x - ۱})^۲$

۳) $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱}$ و $g(x) = \sqrt{x - ۱} \times \sqrt{x + ۱}$

۴) $f(x) = x^۲ - ۱$ و $g(x) = \frac{x^۴ - ۱}{x^۲ + ۱}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

برای برابری دو تابع، باید دامنه و ضابطه دو تابع با هم برابر باشند.

گزینه «۱»: ضابطه‌ها برابر نیستند:

$f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^۲} = |x|$

گزینه «۲»: ضابطه‌ها و دامنه‌ها برابر نیستند:

$$\begin{cases} f(x) = |x - ۱| \\ D_f = R \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} g(x) = (\sqrt{x - ۱})^۲ = x - ۱ \\ D_g : x \geq ۱ \end{cases}$$

گزینه «۳»: دامنه‌ها برابر نیستند:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱} \\ D_f : (-\infty\ ,\ -۱] \cup [۱\ ,\ +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x - ۱} \times \sqrt{x + ۱} = \sqrt{x^۲ - ۱} \\ D_g : [۱\ ,\ +\infty) \cap [-۱\ ,\ +\infty) = [۱\ ,\ +\infty) \end{cases}$$

گزینه «۴»: ضابطه و دامنه دو تابع با هم برابرند:

$$\begin{cases} f(x) = x^۲ - ۱ \\ D_f = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^۴ - ۱}{x^۲ + ۱} = \dfrac{(x^۲ + ۱)(x^۲ - ۱)}{x^۲ + ۱} = x^۲ - ۱ \\ D_g : R \end{cases}$$

۱۰) اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^۲ + ax + b}$ برابر{۳} باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۱۵
۴) -۱۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

از آنجا که عبارت $-x^۲ + ax + b$، در همه نقاط به جز ۳ = x منفی است پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$-x^۲+ax+b$	$-$	۰	$-$

بنابراین عبارت زیر رادیکال حتماً $-(x - ۳)^۲$ است.

$$-x^۲ + ax + b = -(x - ۳)^۲ = -x^۲ + ۶x - ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ b = -۹ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۳$$

۱۱) اگر $\frac{۱۳}{۲} > [x] > \frac{۱۷}{۳}$ باشد، حاصل $[-۲x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{۱۷}{۳} < [x] < \frac{۱۳}{۲} \xrightarrow{[x]\in Z} ۶ \le [x] \le ۶$$

$$\Rightarrow [x] = ۶ \Rightarrow ۶ \le x < ۷ \Rightarrow -۱۴ < -۲x \le -۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۱۴ < -۲x < -۱۳ \Rightarrow [-۲x] = -۱۴ \\ -۱۳ \le -۲x < -۱۲ \Rightarrow [-۲x] = -۱۳ \\ -۲x = -۱۲ \Rightarrow [-۲x] = -۱۲ \end{cases}$$

۱۲) اگر $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} + \sqrt{x + ۳}$ ، $g(x) = \sqrt{۴ - x} - \sqrt{۴ - x^۲}$ و دامنه تابع $f + g$ بازه $[a\ ,\ b]$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) -۴
۲) -۶
۳) -۱۲
۴) -۱۶

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} + \sqrt{x + ۳} \xrightarrow{\text{دامنه}} \left\{\begin{matrix} ۴ - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \\ x + ۳ \ge ۰ \Rightarrow x \ge -۳ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} [-۲\ ,\ ۲]$$

$$g(x) = \sqrt{۴ - x} - \sqrt{۴ - x^۲} \xrightarrow{\text{دامنه}} \left\{\begin{matrix} ۴ - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \\ ۴ - x \ge ۰ \Rightarrow x \le ۴ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} [-۲\ ,\ ۲]$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۲\ ,\ ۲] \cap [-۲\ ,\ ۲] = [-۲\ ,\ ۲] \Rightarrow a = -۲\ ,\ b = ۲$$

$$\Rightarrow a\ .\ b = -۴$$

۱۳) اگر $f=\{(۲,۶),(۱,-۲),(a^۲+a,۶),(a,۲)\}$ تابعی وارون‌پذیر باشد، برد تابع $f+f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{۱,۴\}$ ۲) $\{۳,۸\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۰,-۱\}$

پاسخ: گزینه ۳

تابع f باید یک‌به‌یک باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۶)\in f\\(a^۲+a,۶)\in f\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^۲+a=۲\Rightarrow a^۲+a-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\ \text{(تابع یک به یک نمی شود)}\\a=-۲\ \text{ق ق}\end{cases}$$

با جای‌گذاری $a=-۲$، f به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f=\{(۲,۶),(۱,-۲),(-۲,۲)\}$$

پس:

$$f^{-۱}=\{(۶,۲),(-۲,۱),(۲,-۲)\}$$

حالا $f+f^{-۱}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{f+f^{-۱}}=D_f\cap D_{f^{-۱}}=\{-۲,۲\}$$

$$f+f^{-۱}=\{(-۲,۲+۱),(۲,۶+(-۲))\}=\{(-۲,۳),(۲,۴)\}$$

$$\Rightarrow \text{برد}=\{۳,۴\}$$

۱۴) اگر $f(x)=\frac{۲x}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x^۲}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$ باشد، برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $R-\{\pm۲\}$ ۲) $R-\{\pm۱\}$ ۳) $R-\{\pm۲\}$ ۴) $R-\{\pm۱,\pm۲\}$

پاسخ: گزینه ۳

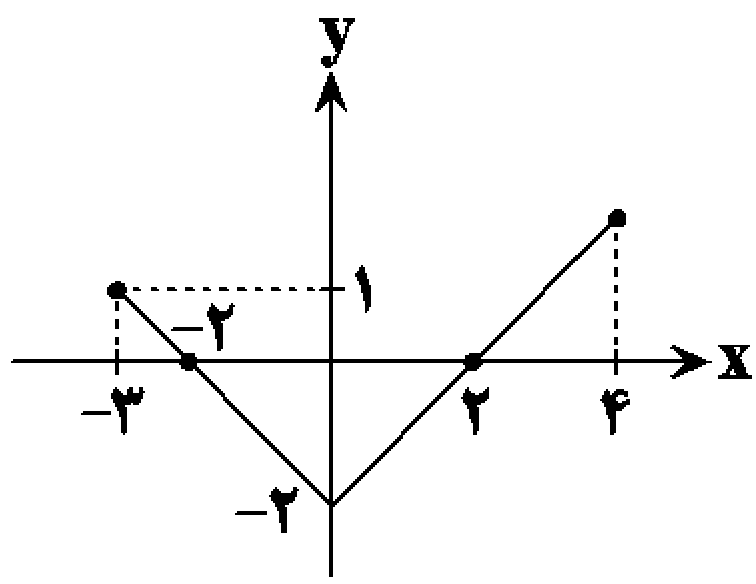
$$D_f=D_g=R-\{\pm۱\}\Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=R-\{\pm۱\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۲x}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}+\frac{۲x^۲}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$$

$$=\frac{۲x^۲+۲x}{x+۱}=\frac{۲x(x+۱)}{x+۱}=۲x$$

بنابراین باید برد تابع خطی $y=۲x$ را با دامنهٔ $R-\{\pm۱\}$ تعیین کنیم که برابر $R-\{\pm۲\}$ است.

۱۵) اگر شکل زیر نمودار تابع $y = f(x - ۲)$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y = \sqrt{|۳f(x) - ۱|}$ کدام است؟



۱) $[۰ , \sqrt{۵}]$
۲) $[-۲ , ۳]$
۳) $[۰ , \sqrt{۸}]$
۴) $[۰ , \sqrt{۷}]$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار داریم: $(۰, -۲) , (۲, ۰) : y = x - ۲ \xrightarrow{x=۴} y = ۲$

برد تابع $f(x - ۲)$ با تابع $f(x)$ برابر است. بنابراین:

$$R_{f(x)} = [-۲, ۲]$$

$$\Rightarrow R_{۳f(x)} = [-۶, ۶]$$

$$\Rightarrow R_{۳f(x)-۱} = [-۷, ۵]$$

$$\Rightarrow ۰ \le |۳f(x) - ۱| \le ۷ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{|۳f(x) - ۱|} \le \sqrt{۷}$$

۱۶) اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$، $g(x)=\sqrt{a-x}+۲b$، $D_{f-g}=[-۳,۱۰]$ و $(f+g)(۶)=۶$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲}$ ۲) ۱۰ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دامنه هریک از توابع را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+۳}\Rightarrow x+۳\geq ۰\Rightarrow x\geq -۳\Rightarrow D_f=[-۳,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{a-x}+۲b\Rightarrow a-x\geq ۰\Rightarrow x\leq a$$
$$\Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

بنابراین: $D_{f-g}=D_f\cap D_g\Rightarrow D_{f-g}=[-۳,a]$

لذا با توجه به فرض مسأله نتیجه می‌شود که: $a=۱۰$

از طرفی داریم:
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+۳}+\sqrt{۱۰-x}+۲b$$
$$\Rightarrow (f+g)(۶)=\sqrt{۶+۳}+\sqrt{۱۰-۶}+۲b=۶\Rightarrow ۳+۲+۲b=۶$$

بنابراین: $\Rightarrow ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow a+b=۱۰+\frac{۱}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

۱۷) اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y=\sqrt{f(|x-۲|)-f(|۲x-۱|)}$ کدام است؟

۱) $R-[-۱,۱]$ ۲) $R-(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $[-۱,۱]$

پاسخ: گزینه ۲

y یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f(|x-۲|)-f(|۲x-۱|)\geq ۰\Rightarrow f(|x-۲|)\geq f(|۲x-۱|)$$

$$\xrightarrow{\text{تابع نزولی اکید است}}|x-۲|\leq|۲x-۱|$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}}x^۲-۴x+۴\leq ۴x^۲-۴x+۱\Rightarrow x^۲\geq ۱\Rightarrow x\leq -۱ \quad \text{یا} \quad x\geq ۱$$

$$\Rightarrow x\in R-(-۱,۱)$$

۱۸) تابع پیوسته و اکیداً نزولی $y=f(x)$ بر روی R تعریف شده و نمودار آن محور x را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع می‌کند. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x-۱)}{f(۲-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

تابع g در محدوده‌ای تعریف شده است که $\frac{f(x-۱)}{f(۲-x)} \geq ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$f(x-۱)=۰ \xrightarrow{f(۴)=۰} x-۱=۴ \Rightarrow x=۵$$

$$f(۲-x)=۰ \xrightarrow{f(۴)=۰} ۲-x=۴ \Rightarrow x=-۲$$

از طرفی تابع $y=f(x-۱)$ اکیداً نزولی است، بنابراین برای $x>۵$ منفی و برای $x<۵$ مثبت است. همچنین تابع $y=f(۲-x)$ اکیداً صعودی است و برای $x>-۲$ مثبت و برای $x<-۲$ منفی می‌باشد.

x	$-\infty$		-۲		۵		$+\infty$
f(x-۱)		+		+	۰	−	
f(۲-x)		−	۰	+		+	
P		−		+	۰	−	

جواب

$\Rightarrow D_g=(-۲,۵]$

دامنه تابع شامل ۷ عدد صحیح است.

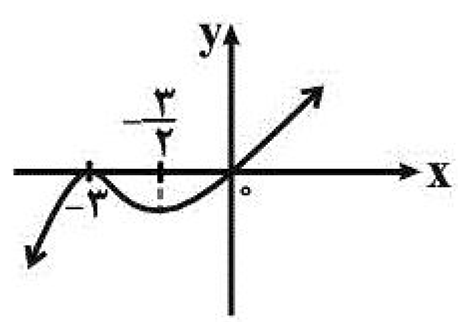
۱۹) تابع $f(x)=x|x+۳|$ روی بازه $[a,b]$ نزولی است. بیش‌ترین مقدار $f(b-a)$ کدام است؟

۱) ۶/۲۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۶/۷۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(x)=x|x+۳| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲+۳x & x\geq -۳ \\ -x^۲-۳x & x<-۳ \end{cases}$$



همانطور که می‌بینید تابع در بازه $[-۳,-\frac{۳}{۲}]$ نزولی است، بنابراین:

$$b-a=-\frac{۳}{۲}-(-۳)=\frac{۳}{۲}$$
$$f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\left|\frac{۳}{۲}+۳\right|=\frac{۲۷}{۴}=۶/۷۵$$

۲۰) اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۹-x^۲}{x-۱}}$ و $g(x)=[x]+[-x]$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[۳\,,+\infty)$ ۲) $[-۳\,,۳]$ ۳) $\varnothing$ ۴) R

پاسخ: گزینه ۳

$D_f : \frac{۹-x^۲}{x-۱} \geq ۰$

x		−۳		۱		۳	
$۹-x^۲$	−	۰	+		+	۰	−
$x-۱$	−		−	۰	+		+
$\frac{۹-x^۲}{x-۱}$	+	۰	−	ت.ن	+	۰	−

$\Rightarrow D_f=(-\infty\,,\,-۳]\cup(۱\,,\,۳]$

$$g(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ; \ x\in Z \\ -۱ & ; \ x\notin Z \end{cases} \Rightarrow D_g=R$$

$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in R | [x]+[-x]\in(-\infty\,,\,-۳)\cup(۱\,,\,۳]\}=\varnothing$

۲۱) اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x-۸}$ و $g(x)=\sqrt{x+۲}+۱$ باشند، با کدام‌یک از انتقال‌های زیر نمودار fog بر نمودار g منطبق می‌شود؟

۱) ۹ واحد به چپ، ۱ واحد به بالا
۲) ۹ واحد به چپ، ۱ واحد به پایین
۳) ۹ واحد به راست، ۱ واحد به بالا
۴) ۹ واحد به راست، ۱ واحد به پایین

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$f(x)=\sqrt{(x-۱)^۲-۹} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+۲}+۱$

$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in[-۲,+\infty) | \sqrt{x+۲}+۱\in(-\infty,-۲]\cup[۴,+\infty)\}$

$\Rightarrow \sqrt{x+۲}+۱\geq ۴ \Rightarrow x+۲\geq ۹ \Rightarrow x\geq ۷ \Rightarrow D_{fog}=[۷,+\infty)$

$(fog)(x)=\sqrt{x-۷} \Rightarrow (fog)(x+۹)+۱=g(x)$

پس نمودار تابع fog باید ۹ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال یابد تا بر نمودار تابع g منطبق شود.

۲۲) اگر $g(x) = x^۳ - x$ و $(fog)(x) = x^۶ - ۲x^۴ + x^۲ + ۱$ باشند، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۱۷
۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

در تابع fog داریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^۳ - x) = x^۶ - ۲x^۴ + x^۲ + ۱$$

$$\xrightarrow[x^۶-۲x^۴+x^۲=t^۲]{x^۳-x=t} f(t) = t^۲ + ۱$$

برای به دست آوردن $f(۳)$ داریم: $f(۳) = ۳^۲ + ۱ = ۱۰$

۲۳) اگر $f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱} of) - f$، کدام است؟

۱) $\{-۱,۴\}$
۲) $\{۲,۳\}$
۳) $\{۳,۴\}$
۴) $\{۲,-۱\}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه۴

ابتدا $g^{-۱}$ را حساب می‌کنیم:

$$g^{-۱} = \{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$

حال با توجه به تعریف دامنهٔ ترکیب دو تابع، زوج مرتب‌هایی از تابع f را انتخاب می‌کنیم که مؤلفهٔ دوم آن‌ها، مؤلفهٔ اول (دامنهٔ) تابع $g^{-۱}$ باشد. بنابراین داریم: $D_{g^{-۱} of} = \{۱,۴\} \Rightarrow g^{-۱} of = \{(۱,۴),(۴,۵)\}$

حال داریم:

$$D_{(g^{-۱} of)-f} = D_{g^{-۱} of} \cap D_f \Rightarrow D_{g^{-۱} of-f} = \{۱,۴\}$$

$$\Rightarrow D_{g^{-۱} of-f} = \{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-۱} of) - f$ مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است.

۲۴) اگر $f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$ و $g(x) = x^۳ + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} of^{-1})(۸)$، کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه۴

$$f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴ \qquad g(x) = x^۳ + x$$

$$(g^{-1} of^{-1})(۸) = a \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۸)) = a$$

ابتدا $f^{-1}(۸)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(۸) = m \Rightarrow f(m) = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}m - ۴ = ۸ \Rightarrow m = ۳۰$$

$$g^{-1}(f^{-1}(۸)) = g^{-1}(۳۰) = a \Rightarrow g(a) = ۳۰$$

$$\Rightarrow a^۳ + a = ۳۰ \xrightarrow{\text{امتحان گزینه‌ها}} a = ۳$$

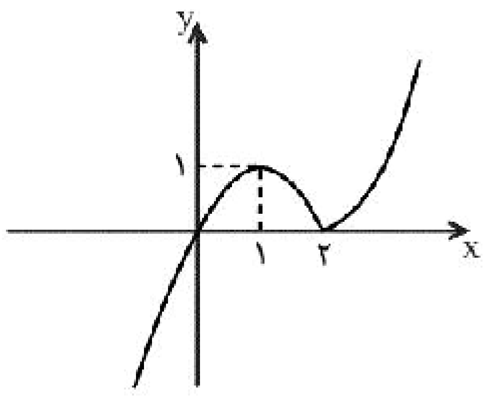
۲۵) تابع با ضابطه $y = x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۱+x}\ ;\ x<۰$
۲) $۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ x<۱$
۳) $۱+\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$
۴) $۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$

پاسخ: گزینه ۳

اگر نمودار تابع را رسم کنیم با ضابطه‌بندی خواهیم داشت:

$$y = x|x-۲| = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & x < ۲ \end{cases}$$



این تابع وقتی $۱ < x < ۲$ نزولی است که برد آن در این فاصله، $۰ < y < ۱$ خواهد بود. پس دامنه تابع معکوس آن در این فاصله، $۰ < x < ۱$ است که مربوط به ضابطه $y = -x^۲ + ۲x$ می‌باشد.

$$y = -x^۲ + ۲x \Rightarrow -y = x^۲ - ۲x$$

$$\Rightarrow ۱ - y = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱ - y$$

$$\xrightarrow{۱<x<۲} x - ۱ = \sqrt{۱-y} \Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۱-y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x} \quad (۰ < x < ۱)$$