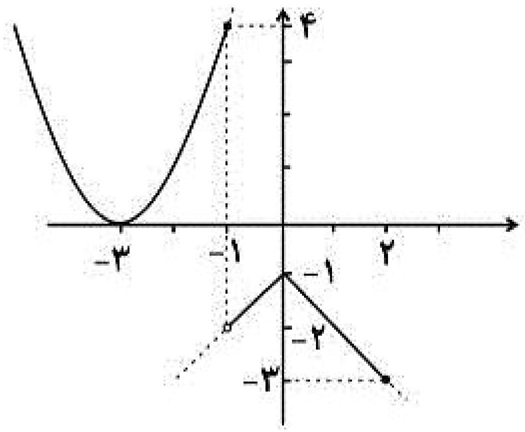
۱) اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۳)^۲ & x\le -۱\\ -|x|-۱ & -۱<x\le ۲\end{cases}$ به صورت $[a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، $a+b+c$ کدام است؟

۱) -۵ **۲)** -۴ **۳)** -۳ **۴)** -۶

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}(x+۳)^۲ & x\le -۱\\ -|x|-۱ & -۱<x\le ۲\end{cases}$$

ابتدا تابع $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم: برای رسم تابع $y=(x+۳)^۲$ نمودار $y=x^۲$ را به اندازه ۳ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم تابع $y=-|x|-۱$ تابع $y=|x|$ را نسبت به محورxها قرینه می‌کنیم تا $y=-|x|$ به دست آید.



سپس آن‌را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|x|-۱$ حاصل شود. حال با توجه به شکل$f(x)$، برد آن به صورت زیر می‌باشد:

$$R_f=[-۳,-۱]\cup[۰,+\infty)=[a,b]\cup[c,+\infty)$$

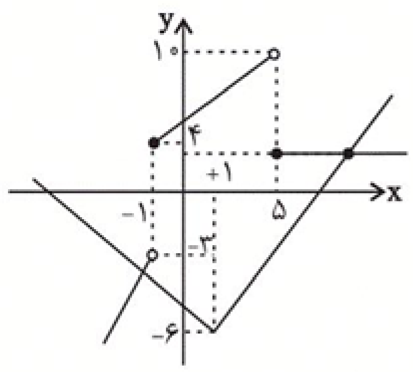
$$\Rightarrow a=-۳, b=-۱, c=۰ \Rightarrow a+b+c=-۴$$

② نمودار دو تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < -۱ \\ ۵ + x & -۱ \le x < ۵ \\ ۳ & x \ge ۵ \end{cases}$ و $g(x) = |x - ۱| - ۶$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم برای رسم نمودار تابع g نمودار تابع $y = |x|$ را یک واحد به راست و ۶ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



مطابق شکل، توابع f و g در ۲ نقطه متقاطع هستند. توجه کنید که دو تابع f و g در نقطه‌ای که طول آن کم‌تر از ۱- است، برخورد دارند، زیرا:

$$\xrightarrow{x<-۱} \begin{cases} f(x) = ۲x - ۱ \\ g(x) = -(x - ۱) - ۶ \end{cases} \Rightarrow ۲x - ۱ = -(x - ۱) - ۶$$

$$\Rightarrow ۳x = -۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$$

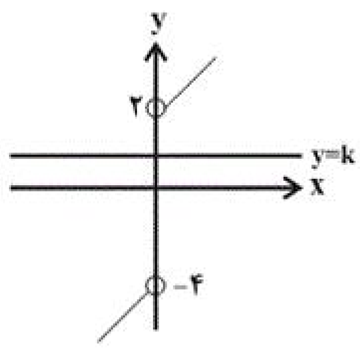
③ به ازای هر k در بازه $[a,b]$، خط $y=k$ نمودار تابع $y = x - ۱ + \frac{|۳x|}{x}$ را قطع نمی‌کند. حداکثر مقدار b-a کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$y = \begin{cases} x - ۴ \ ; x < ۰ \\ x + ۲ \ ; x > ۰ \end{cases}$$



ملاحظه می‌شود که خط $y=k$ با شرط $k \in [-۴,۲]$ ، نمودار تابع را قطع نمی‌کند، پس بیشترین مقدار b-a برابر است با: $۶ = (-۴) - ۲$.

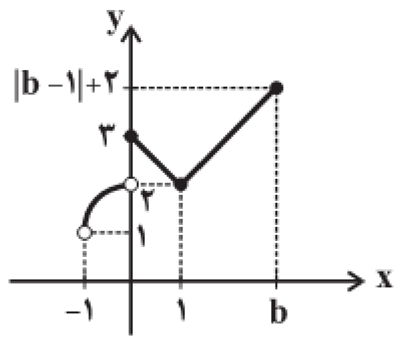
۴) اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۲ & ; -۱ < x < ۰ \\ |x - ۱| + ۲ & ; ۰ \le x \le b \end{cases}$ بازه $(a,۴]$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱-
۳) ۲-
۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی شکل، برد آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۲ & ; -۱ < x < ۰ \\ |x - ۱| + ۲ & ; ۰ \le x \le b \end{cases}$$



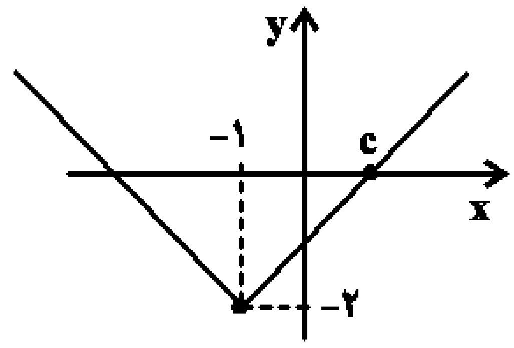
با توجه به نمودار داریم:

$$R_f = (۱, |b - ۱| + ۲] = (a, ۴] \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ |b - ۱| + ۲ = ۴ \Rightarrow |b - ۱| = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - ۱ = ۲ \Rightarrow b = ۳ \\ b - ۱ = -۲ \Rightarrow b = -۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - b = ۱ - ۳ = -۲$$

⑤ نمودار تابع $f(x) = |x+a|+b$ به صورت زیر است. با توجه به شکل حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) -۲
۲) ۲
۳) -۱
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

تابع رسم شده از انتقال تابع $y = |x|$ به دست آمده است. با توجه به شکل، این تابع ۱ واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال داده شده است. پس $a = ۱$ و $b = -۲$ است:

$$f(x) = |x+۱| - ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۲ \end{cases}$$

از طرفی c طول نقطه‌ای است که تابع محورxها را در قسمت مثبت آن قطع می‌کند.

$$|x+۱| - ۲ = ۰ \Rightarrow |x+۱| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \geq -۱} x+۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \\ \xrightarrow{x < -۱} x+۱ = -۲ \Rightarrow x = -۳ \end{cases}$$

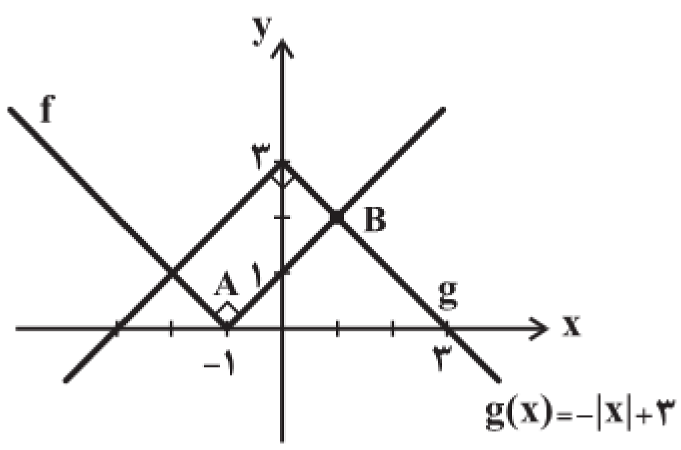
پس $c = ۱$ است و در نتیجه $a+b+c = ۱-۲+۱ = ۰$ است.

۶) اندازه ضلع بزرگ مستطیل محصور بین نمودارهای دو تابع $f(x)=|x+1|$ و $g(x)=-|x|+3$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دو تابع را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:



واضح است که ضلع AB، ضلع بزرگ مستطیل است. مختصات نقطه A به‌صورت $(-1,0)$ است و برای به‌دست آوردن مختصات نقطه B معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow |x+1|=-|x|+3$$

$$\xrightarrow{x_B>0} x_B+1=-x_B+3\Rightarrow 2x_B=2\Rightarrow x_B=1$$

$$\Rightarrow y_B=f(x_B)=2\Rightarrow B(1,2)$$

حال فاصله دو نقطه A و B را از همدیگر می‌یابیم:

$$|AB|=\sqrt{(1-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۷) مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{|x|-1}{2}\right|<3$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\left|\frac{|x|-1}{2}\right|<3\Rightarrow -3<\frac{|x|-1}{2}<3\Rightarrow -6<|x|-1<6$$

$$\Rightarrow \underbrace{-5<|x|<7}_{\text{همواره برقرار}}\Rightarrow |x|<7\Rightarrow -7<x<7$$

اعداد صحیح متعلق به مجموعه جواب = $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$

$\Rightarrow$ ۱۳ عدد صحیح

۸) چند عدد صحیح نامنفی در نامعادله‌ی $\left|\frac{x+۶}{۳x+۱}\right| \le x$ صدق نمی‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۲

چون حاصل قدرمطلق مقدار نامنفی است پس: $x \ge ۰$؛ بنابراین:

$$\begin{cases} x+۶>۰ \\ ۳x+۱>۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+۶}{۳x+۱}\right| = \frac{x+۶}{۳x+۱} \Rightarrow \frac{x+۶}{۳x+۱} \le x$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + x \ge x + ۶ \Rightarrow ۳x^۲ \ge ۶$$

$$\Rightarrow x^۲ \ge ۲ \Rightarrow \begin{cases} x \ge +\sqrt{۲} \\ x \le -\sqrt{۲} \end{cases} \xrightarrow{x\ge ۰} x \ge \sqrt{۲}$$

اعداد ۱ و صفر در این نامعادله صدق نمی‌کنند.

۹) مجموعه جواب نامعادله $-۲ \le \left|\frac{x-۱}{۲} - ۱\right| < ۳$ به صورت بازه (a, b) است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

باید هر دو طرف نامعادله داده شده را حل کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$\left|\frac{x-۱}{۲} - ۱\right| \ge -۲ \Rightarrow$ همواره درست است. $\Rightarrow x \in R$

$$\left|\frac{x-۱}{۲} - ۱\right| < ۳ \Rightarrow \left|\frac{x-۳}{۲}\right| < ۳ \xrightarrow{\times ۲} |x-۳| < ۶ \Rightarrow -۶ < x - ۳ < ۶$$

$$\xrightarrow{+۳} -۳ < x < ۹ \Rightarrow (a, b) = (-۳, ۹)$$

$$\Rightarrow \max(b-a) = ۹ - (-۳) = ۱۲$$

۱۰) اگر مجموعه جواب نامعادله $|x-a| \ge ۲b$ به‌صورت $(-\infty, ۳] \cup [۶, +\infty)$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۵/۲۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۵/۷۵

پاسخ: گزینه ۱

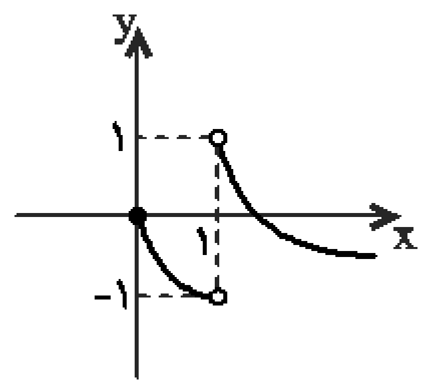
$$x \le ۳ \text{ یا } x \ge ۶ \xrightarrow[\text{کم می‌کنیم } ۴/۵=\frac{۳+۶}{۲}]{\text{از طرفین}} x - ۴/۵ \le ۳ - ۴/۵$$

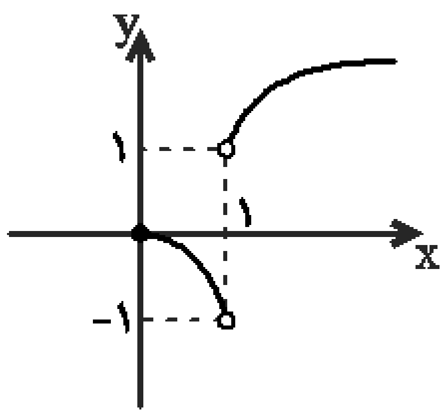
$$\text{یا } x - ۴/۵ \ge ۶ - ۴/۵ \Rightarrow x - ۴/۵ \le -۱/۵ \quad \text{یا } x - ۴/۵ \ge ۱/۵$$

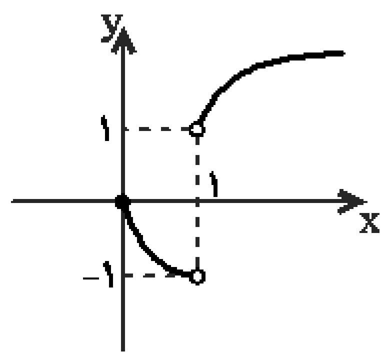
$$\Rightarrow |x - ۴/۵| \ge ۱/۵ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴/۵ \\ ۲b = ۱/۵ \Rightarrow b = ۰/۷۵ \end{cases}$$

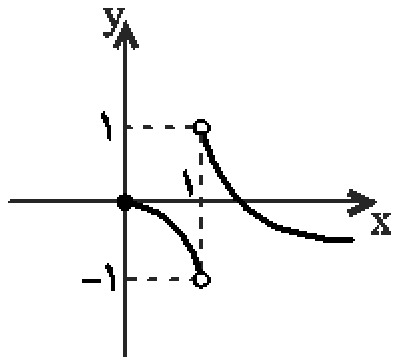
$$\Rightarrow a + b = ۴/۵ + ۰/۷۵ = ۵/۲۵$$

۱۱) نمودار تابع $f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x}}{x-1}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

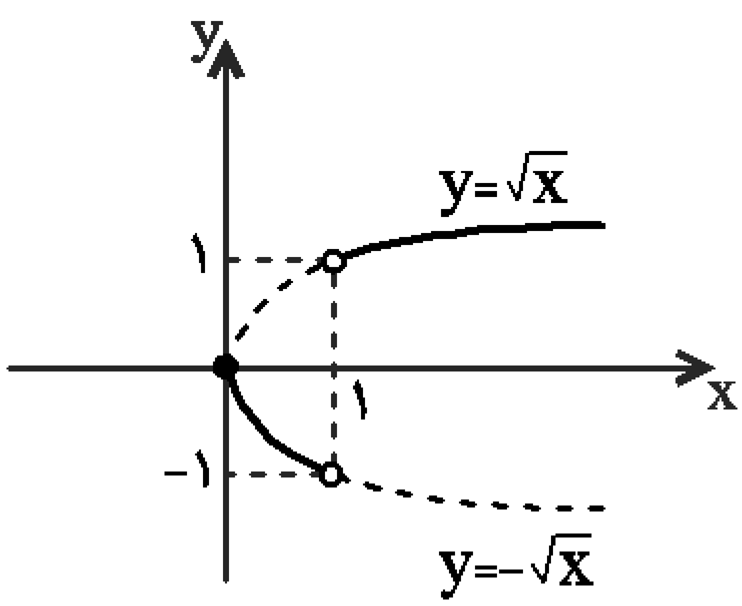
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

معادلهٔ تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ; x > 1 \\ \frac{-(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ; 0 \le x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 1 \\ -\sqrt{x} & ; 0 \le x < 1 \end{cases}$$

دقت کنید که ۱ = x ریشهٔ مخرج است و در دامنهٔ معادله قرار ندارد. بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۲) اگر $[\frac{x}{۳}]=۱$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x^۲-۶x+۹}-۲\sqrt{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) $-x+۲$
۳) $-x-۲$
۴) $۲x$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که اگر $[\frac{x}{۳}]=۱$ باشد، آن‌گاه $۱\le \frac{x}{۳}<۲$ و در نتیجه $۳\le x<۶$ است، پس:

$$\sqrt{x^۲-۶x+۹}-۲\sqrt{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{(x-۳)^۲}-۲\sqrt{(x-\frac{۱}{۲})^۲}$$

$$=|x-۳|-۲|x-\frac{۱}{۲}|$$

چون $۳\le x<۶$ است، پس $|x-۳|=x-۳$ و $|x-\frac{۱}{۲}|=x-\frac{۱}{۲}$ است.

$$\Rightarrow \text{عبارت}=x-۳-۲(x-\frac{۱}{۲})=x-۳-۲x+۱=-x-۲$$

۱۳) کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^۲-۲x$
۲) $f(x)=|\sqrt{x}-۱|$
۳) $f(x)=x+\sqrt{x}$
۴) $f(x)=x+|x-۳|$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}=(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$$

دقت کنید دامنه $x\ge ۰$ است. $f(x_۱)$ را برابر با $f(x_۲)$ قرار می‌دهیم $(x_۱\ ,\ x_۲\in D_f)$. اگر نتیجه بگیریم که $x_۱=x_۲$ است، آن‌گاه تابع یک‌به‌یک است.

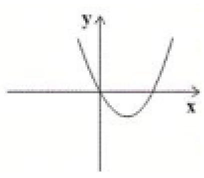
$$(\sqrt{x_۱}+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}=(\sqrt{x_۲}+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}\Rightarrow(\sqrt{x_۱}+\frac{۱}{۲})^۲=(\sqrt{x_۲}+\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow\sqrt{x_۱}+\frac{۱}{۲}=\sqrt{x_۲}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sqrt{x_۱}=\sqrt{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

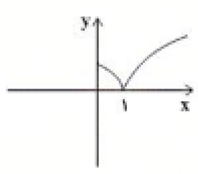
پس تابع یک‌به‌یک است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

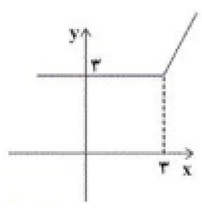
گزینه «۱»: $f(x)=x^۲-۲x+۱-۱=(x-۱)^۲-۱$



گزینه «۲»: $f(x)=|\sqrt{x}-۱|$



گزینه «۴»: $f(x)=x+|x-۳|$



۱۴) وارون تابع $f(x) = ۳x + |x - ۳|$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = \{$

۲) $f^{-۱}(x) = \{$

۳) $f^{-۱}(x) = \{$

۴) $f^{-۱}(x) = \{$

پاسخ: گزینه ۱

برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون یک تابع می‌توانیم از روش عددگذاری استفاده کنیم. به این صورت که یکx دلخواه به تابع بدهیم وy را به دست آوریم. جایx وy را عوض می‌کنیم و در گزینه‌ها تست می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۳(۱) + |۱ - ۳| = ۵ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ \\ ۵ \end{vmatrix} \in f \Rightarrow \begin{vmatrix} ۵ \\ ۱ \end{vmatrix} \in f^{-۱}$$

نقطهٔ(۱ , ۵) تنها در گزینهٔ «۱» صدق می‌کند.

۱۵) معادله $x^۳ = \sqrt[۳]{\frac{x}{|x|} - x}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱

۲) ۲

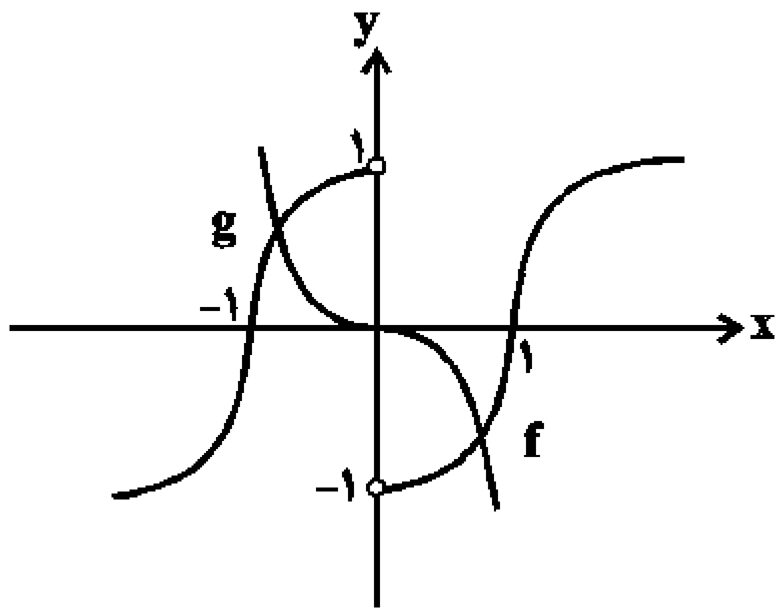
۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

معادله را به‌صورت $\sqrt[۳]{x - \frac{x}{|x|}} = -x^۳$ می‌نویسیم. نمودار تابع $f(x) = -x^۳$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x - \frac{x}{|x|}}$ را رسم می‌کنیم و تعداد نقاط برخورد آنها را به‌دست می‌آوریم: $g(x) = \sqrt[۳]{x - \frac{x}{|x|}} = \begin{cases} \sqrt[۳]{x - ۱} ; x > ۰ \\ \sqrt[۳]{x + ۱} ; x < ۰ \end{cases}$



بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

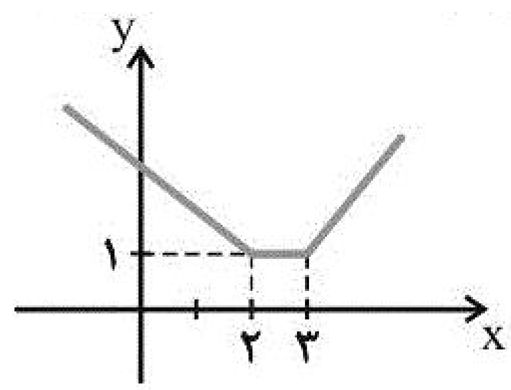
۱۶) در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - ۲| + |x - ۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = ۲x^۲ - x - ۱۰$ ، در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱　　**۲)** ۲　　**۳)** ۳　　**۴)** فاقد نقطه مشترک

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با رسم تابع ، بازه‌ای را که تابع اکیداً نزولی است، به‌دست می‌آوریم:



$$f(x) = |x - ۲| + |x - ۳| = \begin{cases} -۲x + ۵ & x \le ۲ \\ ۱ & ۲ < x < ۳ \\ ۲x - ۵ & x \ge ۳ \end{cases}$$

تابع مورد نظر به‌ازای $x \le ۲$ اکیداً نزولی است. برای به‌دست آوردن نقاط مشترک توابع $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$x \le ۲ \ : \ f(x) = g(x)$$

$$-۲x + ۵ = ۲x^۲ - x - ۱۰ \to ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰$$

$$\to \begin{cases} x = -۳ & \text{ق ق} \\ x = \frac{۵}{۲} & \text{(غ ق ق. بزرگ تر از ۲ است)} \end{cases}$$

⑰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2|x|$ در بازه‌ی $(-\infty \, , \, a]$ نزولی است، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) صفر　　۲) -1　　۳) ۱　　۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

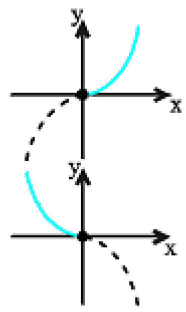
گزینه «۱»

نمودار تابع را با ضابطه‌بندی رسم می‌کنیم.

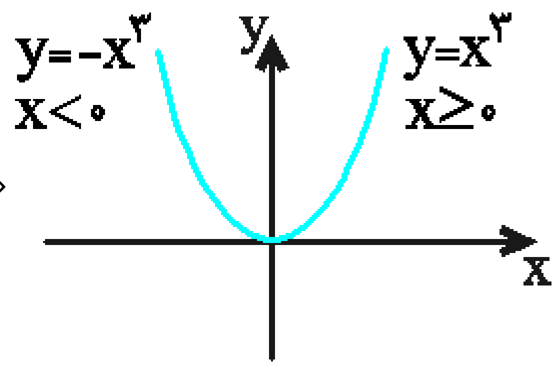
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \geq 0 \\ -x^3 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

(نمودار : سمت راست نمودار $y = x^3$)

(نمودار : ابتدا $y = -x^3$ را رسم کرده و سپس سمت چپ آن را در نظر می‌گیریم.)



$\Rightarrow$



با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع در بازه‌ی $(-\infty \, , \, 0]$ نزولی است، پس بیشترین مقدار a، صفر است.

⑱ کدام تابع زیر نزولی است؟

۱) $y = x + |x|$ ۲) $y = ۲x + |x|$ ۳) $y = |x| - x$ ۴) $y = x - ۲|x|$

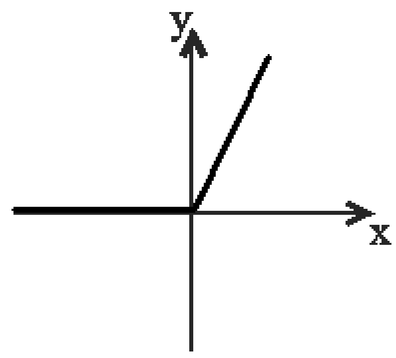
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا هر یک از توابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آنها را رسم کرده و با توجه به نمودار صعودی یا نزولی بودن آنها را مشخص می‌کنیم:

گزینه (۱):

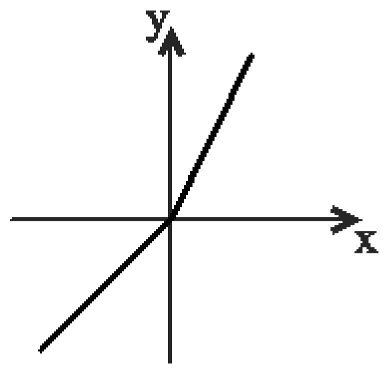
$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & , \quad x \geq ۰ \\ ۰ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

گزینه (۲):

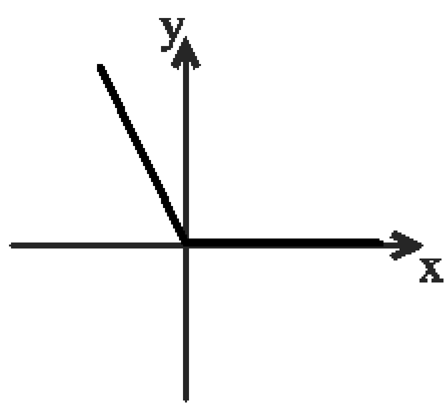
$$y = ۲x + |x| = \begin{cases} ۳x & , \quad x \geq ۰ \\ x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

گزینه (۳):

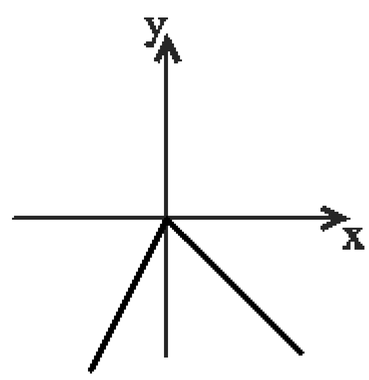
$$y = |x| - x = \begin{cases} ۰ & , \quad x \geq ۰ \\ -۲x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع نزولی است.

گزینه (۴):

$$y = x - ۲|x| = \begin{cases} -x & , \quad x \geq ۰ \\ ۳x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع نه صعودی است نه نزولی (غیریکنواست).

۱۹) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+1| - |x-2|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty , 2)$ ۲) $(-1 , +\infty)$ ۳) $(-1 , 2)$ ۴) $(2 , +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |x+1| - |x-2| = \begin{cases} x+1-(x-2) = 3 & , \quad x > 2 \\ x+1+(x-2) = 2x-1 & , \quad -1 \le x \le 2 \\ -(x+1)+(x-2) = -3 & , \quad x < -1 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید در بازه‌ی $(-1 , 2)$، تابع f یک تابع خطی با شیب مثبت است که می‌دانیم توابع خطی با شیب مثبت اکیداً صعودی هستند.

۲۰) تابع $y = x|x-4|$ در بازه‌ی $[a , b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

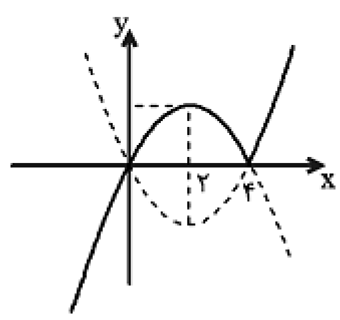
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y = x|x-4| = \begin{cases} x(x-4) & , \quad x \ge 4 \\ -x(x-4) & , \quad x < 4 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $[2 , 4]$ نزولی است، بنابراین:

$$b - a = 4 - 2 = 2$$

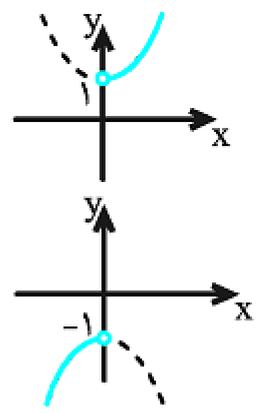
۲۱) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x|\,(x+\frac{۱}{x})$ در دامنه‌ی خود چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیر یک به یک ۴) غیریکنوا

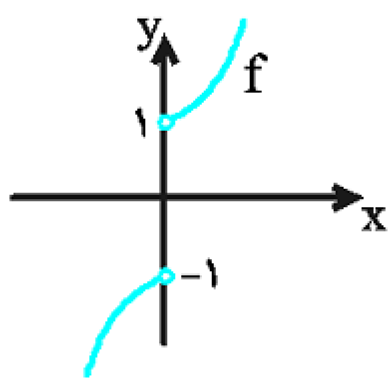
پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با تبدیل تابع به یک تابع چندضابطه‌ای و رسم آن داریم:



$$f(x) = \begin{cases} x(x+\frac{۱}{x}) = x^{۲}+۱ \quad , & x > ۰ \\ -x(x+\frac{۱}{x}) = -x^{۲}-۱, & x < ۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 

با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع در دامنه‌ی خود صعودی است.

۲۲) اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ در آن اکیداً نزولی است، به‌صورت $[-۳,۵]$ باشد، دوتایی مرتب(a,b) کدام است؟

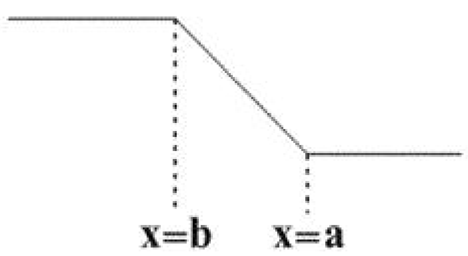
۱) $(۳,-۵)$ ۲) $(۵,-۳)$ ۳) $(-۵,۳)$ ۴) $(-۳,۵)$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون تابع به‌صورت آبشاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و ۳- همان ریشه‌ها هستند:

$$\left.\begin{matrix} a = ۵ \\ b = -۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a,b) = (۵,-۳)$$



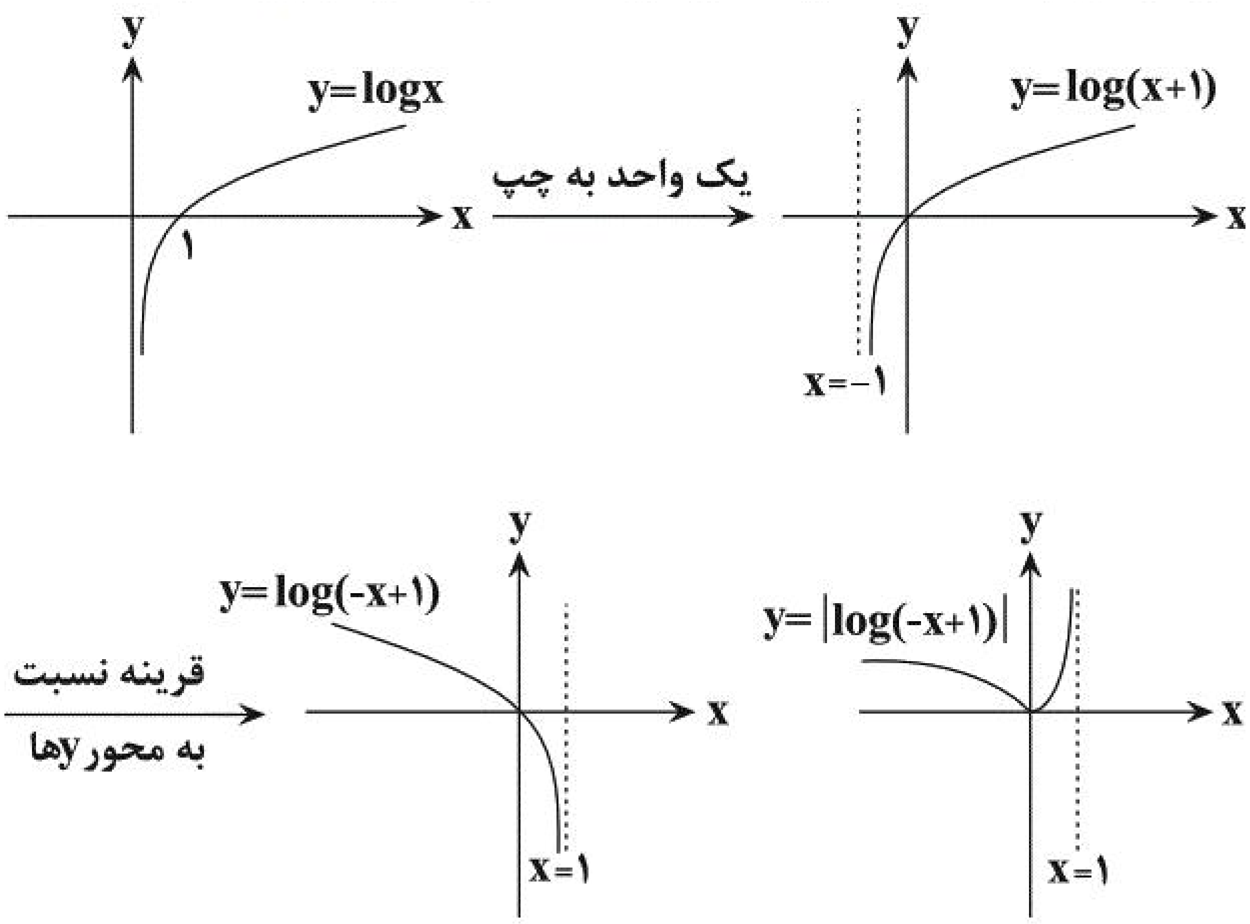
۲۳) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $y=|\log(-x+1)|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0]$ ۳) $[0,1)$ ۴) $(-\infty,1]$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار تابع $y=|\log(-x+1)|$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل نمودار تابع در فاصلهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است.

۲۴) تابع $f(x) = x + ۲|x - ۲a|$ روی بازه $(-۲,۴)$ غیریکنواست. حدود a کدام است؟

۱) $-۲ < a < ۴$
۲) $-۱ < a < ۲$
۳) $a \le -۱$
۴) $a \ge ۴$

پاسخ: گزینه ۲

تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x + ۲(x - ۲x) ;x \ge ۲a \\ x - ۲(x - ۲a) ;x \le ۲a \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۳x - ۴a ;x \ge ۲a \\ -x + ۴a ;x \le ۲a \end{cases}$$

واضح است که تابع f روی بازه $(-\infty, ۲a]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[۲a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین برای اینکه در بازه $(-۲,۴)$ غیریکنوا باشد، لازم است ریشه عبارت داخل قدرمطلق (نقطه گوشه‌ای نمودار تابع) یعنی $x = ۲a$ در این بازه قرار بگیرد. پس داریم:

$$-۲ < ۲a < ۴ \Rightarrow -۱ < a < ۲$$

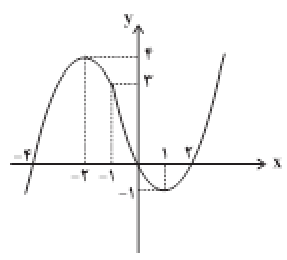
۲۵) تابع $f(x) = x|x + ۱| - ۳x$ روی بازه $[a,b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

تابع f را دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x|x + ۱| - ۳x = \begin{cases} x^۲ - ۲x; x \ge -۱ \\ -x^۲ - ۴x; x < -۱ \end{cases}$$



تابع f روی بازه $[-۲,۱]$ نزولی است. پس داریم:

$$\max(b - a) = ۱ - (-۲) = ۳$$