مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ معادلات و توابع درجه ۲**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

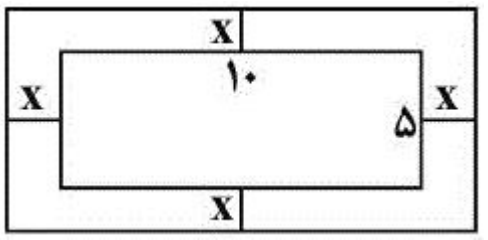
(۱) یک عکس به اندازه ۵ در ۱۰ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۱۵۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشند، اندازه این فاصله کدام است؟

۱) ۱/۵ **۲)** ۲ **۳)** ۲/۵ **۴)** ۳

پاسخ: **گزینه ۳**

گزینه «۳»

ابتدا با توجه به اطلاعات سؤال شکل را رسم می‌کنیم:



$$S = (۱۰ + ۲x)(۵ + ۲x)$$

$$۱۵۰ = ۵۰ + ۳۰x + ۴x^۲$$

$$۴x^۲ + ۳۰x - ۱۰۰ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۳۰)^۲ - ۴(۴)(-۱۰۰) = ۲۵۰۰$$

$$x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۳۰+۵۰}{۸} = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

غ.ق.ق $x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۳۰-۵۰}{۸} = \frac{-۸۰}{۸} = -۱۰$

(۲) اگر خط $y = mx + b$ گذرنده از رأس سهمی به معادله $y = x^۲ - ۴x + ۱$ و در این نقطه بر سهمی مماس باشد، حاصل $m + b$ کدام است؟

۱) ۳ **۲)** -۳
۳) ۲ **۴)** -۲

پاسخ: **گزینه ۲**

گزینهٔ «۲»

مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow y_S = ۴ - ۸ + ۱ = -۳$$

رأس سهمی = $(۲ , -۳)$

اگر خطی بخواهد بر رأس سهمی داده شده مماس باشد، باید افقی باشد، پس $m = ۰$ و معادله خط به‌صورت زیر است:

$$y = -۳$$

$$\begin{cases} m = ۰ \\ b = -۳ \end{cases} \Rightarrow m + b = -۳$$

(۳) اگر جواب معادله ی $mx^۲ - mx + ۱ = ۰$ با هم برابر باشند، آن گاه ریشه ی بزرگ تر معادله ی $(m-۲)x^۲ - (m+۱)x + ۳ = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) -۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$mx^۲ - mx = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{معادله جواب مضاعف دارد}} \Delta = m^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow m(m-۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۰ & \text{غ.ق.ق} \quad (a = m \neq ۰) \\ m = ۴ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m=۴} (m-۲)x^۲ - (m+۱)x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

---

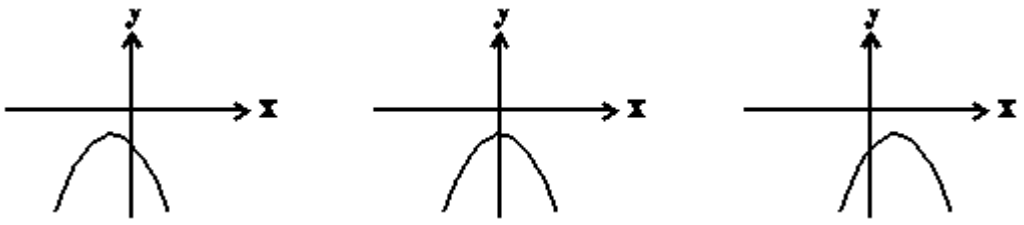
(۴) اگر نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ فقط از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور کند، کدام گزینه حتماً نادرست است؟

۱) $ac > ۰$ ۲) $ac < ۰$ ۳) $bc > ۰$ ۴) $bc < ۰$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار به حالت‌های زیر می‌تواند باشد:



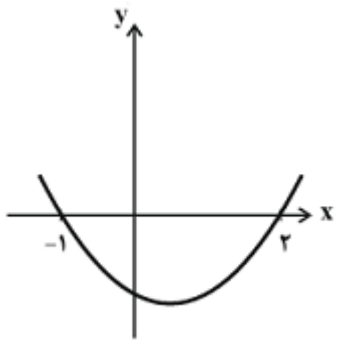
$a < ۰$ $a < ۰$ $a < ۰$

$b < ۰$ $b = ۰$ $b > ۰$

$c < ۰$ $c < ۰$ $c < ۰$

پس همواره $a < ۰$، $c < ۰$ و $b \in R$ است. پس هیچگاه $ac < ۰$ نمی‌شود.

⑤ شکل مقابل مربوط به سهمی $y = 2x^2 + bx + c$ می‌باشد. عرض رأس سهمی $y = cx^2 - x + b$ کدام است؟



۱) $-\frac{31}{16}$
۲) $\frac{31}{16}$
۳) -2
۴) 2

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

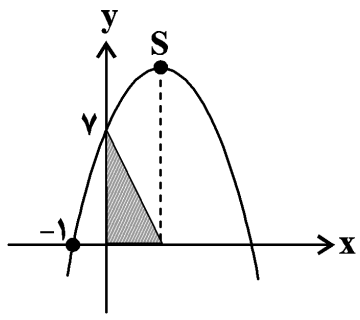
با توجه به شکل داده شده، $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های سهمی هستند، پس ضابطه آن به‌صورت $y = a(x+1)(x-2)$ می‌باشد.

$$y = a(x+1)(x-2) = a(x^2 - x - 2) = ax^2 - ax - 2a$$

$$= 2x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow y = cx^2 - x + b = -4x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-1)^2 - 4(-4)(-2))}{4(-4)} = -\frac{31}{16}$$

(۶) اگر نمودار سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ به صورت زیر و مساحت مثلث هاشورخورده برابر با ۱۰/۵ باشد، حاصل $\frac{c-a}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

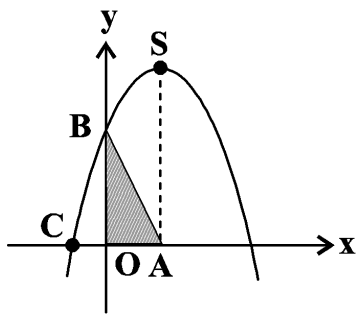
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نقطه $B\begin{vmatrix} ۰ \\ ۷ \end{vmatrix}$ را در سهمی جایگذاری می‌کنیم:



$۷ = a(۰)^{۲} + b(۰) + c \Rightarrow c = ۷$

حال نقطه $C\begin{vmatrix} -۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$ را در سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$۰ = a(-۱)^{۲} + b(-۱) + ۷ \Rightarrow a - b + ۷ = ۰ \quad (*)$

مختصات نقطه A به صورت $A\begin{vmatrix} -\frac{b}{۲a} \\ ۰ \end{vmatrix}$ است. زیرا طول نقطه A با طول رأس سهمی برابر است.

مساحت مثلث ABO برابر ۱۰/۵ است:

$S_{\overset{\Delta}{AB}O} = ۱۰/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۷)(-\frac{b}{۲a}) = ۱۰/۵ \Rightarrow ۷(-\frac{b}{۲a}) = ۲۱$

$\Rightarrow \frac{-b}{۲a} = ۳ \Rightarrow b = -۶a$

$(*) \Rightarrow a - b + ۷ = ۰ \xrightarrow{b=-۶a} a - (-۶a) + ۷ = ۰$

$\Rightarrow a = -۱ \Rightarrow b = ۶$

$\Rightarrow \frac{c-a}{b} = \frac{۷-(-۱)}{۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$

(۷) نمودار $y = -x^{۲} + ۲x$ را چهار واحد به راست و k واحد به بالا منتقل کرده‌ایم. رأس سهمی جدید به صورت $(\alpha, ۱۰)$ است. $\alpha \times k$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا ضابطه تابع اولیه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = -x^{۲} + ۲x = -(x^{۲} - ۲x + ۱ - ۱) = -(x - ۱)^{۲} + ۱$$

$$\xrightarrow[\text{k واحد به بالا}]{\text{۴ واحد به راست}} y = -(x - ۴ - ۱)^{۲} + ۱ + k$$

$$\Rightarrow y = -(x - ۵)^{۲} + k + ۱$$

$$\xrightarrow{\text{رأس سهمی}} (۵ , k + ۱) = (\alpha , ۱۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۵ \\ k + ۱ = ۱۰ \Rightarrow k = ۹ \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha k = ۹ \times ۵ = ۴۵$$

(۸) اگر رأس یک سهمی روی نیم‌ساز ناحیه اول باشد و محور xها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور yها در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۳}{۴}$ ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

رأس سهمی روی نیم ساز ربع اول است، پس مختصات آن را به صورت $S(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم و چون سهمی محور xها را در نقاط ۱- و ۳ قطع کرده‌اند، پس معادله آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y = a(x + ۱)(x - ۳)$$

محل رأس سهمی روی محور تقارن سهمی است، پس میانگین طول نقاط برخورد با محور طول‌ها، طول رأس سهمی را نتیجه می‌دهد:

$$x_S = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱$$

پس نقطه $\begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$ در سهمی صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{(۱ \; ۱)} ۱ = a(۱ + ۱)(۱ - ۳) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

$$y = -\frac{۱}{۴}(x + ۱)(x - ۳) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{۳}{۴}$$

(۹) به ازای چند مقدار طبیعی m معادله $(m+۶)x^۲ - ۲mx + m - ۳ = ۰$ داری دو ریشه حقیقی مثبت است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۵　　۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲

شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی باشد این است که $\Delta > ۰$ باشد، همچنین شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد این است که $P > ۰$ و $S > ۰$ و باید بین نتایج حاصل از این سه شرط اشتراک بگیریم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow \Delta = ۴m^۲ - ۴(m+۶)(m-۳)$$
$$= ۴m^۲ - ۴m^۲ - ۱۲m + ۷۲ = -۱۲m + ۷۲ > ۰$$
$$\Rightarrow m < ۶$$

$$P > ۰ \Rightarrow P = \frac{m-۳}{m+۶} > ۰ \Rightarrow (m < -۶) \cup (۳ < m)$$

$$S > ۰ \Rightarrow S = \frac{۲m}{m+۶} > ۰ \Rightarrow (m < -۶) \cup (۰ < m)$$

$$\xrightarrow{m \in N} ۳ < m < ۶ \Rightarrow m = ۴,۵$$

(۱۰) اگر $x = -۴$، صفر تابع $g(x) = f(x+۳)$ باشد مجموع مربعات صفرهای تابع $f(x) = x^۳ + x^۲ - ax - ۴$ کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۹　　۳) ۱۱　　۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

چون $x = -۴$ صفر تابع $g(x) = f(x+۳)$ می‌باشد پس $x = -۱$ صفر تابع $f(x)$است.

$$\Rightarrow f(-۱) = ۰ \Rightarrow a - ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۳ + x^۲ - ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲(x+۱) - ۴(x+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x^۲ - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع مربعات}} (-۱)^۲ + (۲)^۲ + (-۲)^۲ = ۹$$

(۱۱) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲ - x - ۳ = ۰$ باشند، ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های زیر به صورت $\alpha^۳ - ۳\alpha$ و $\beta^۳ - ۳\beta$ می‌باشند؟

۱) $x^۲ + ۷x + ۹ = ۰$
۲) $x^۲ - ۷x + ۹ = ۰$
۳) $x^۲ - ۷x - ۹ = ۰$
۴) $x^۲ + ۷x - ۹ = ۰$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$x^۲ - x - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = ۰ \\ \alpha\beta = -۳ \end{cases}$$

اگر α و β را در معادله اولیه جای‌گذاری کنیم آن‌گاه خواهیم داشت:

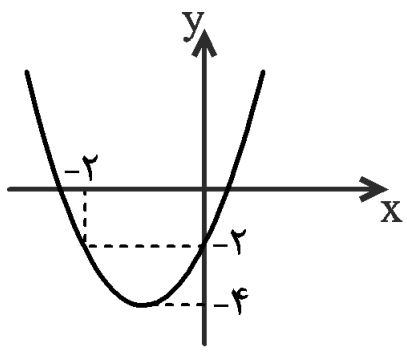
$$\begin{cases} \alpha^۲ - \alpha - ۳ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ - ۳ = \alpha \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۳ - ۳\alpha = \alpha^۲ \\ \beta^۲ - \beta - ۳ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ - ۳ = \beta \xrightarrow{\times\beta} \beta^۳ - ۳\beta = \beta^۲ \end{cases}$$

حال معادله جدید را می نویسیم:

$$\begin{cases} S' = (\alpha^۳ - ۳\alpha) + (\beta^۳ - ۳\beta) = \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۱ + ۶ = ۷ \\ P' = (\alpha^۳ - ۳\alpha)(\beta^۳ - ۳\beta) = \alpha^۲\beta^۲ = (\alpha\beta)^۲ = ۹ \end{cases}$$

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۹ = ۰$$

(۱۲) با توجه به شکل زیر که مربوط به تابع درجهٔ دوم f است، حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ کدام است؟



۱) -۲
۲) -۱
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

طول رأس سهمی، میانگین طول نقاط هم‌عرض سهمی است. با توجه به نمودار، نقاط $x = ۰$ و $x = -۲$ هم‌عرض هستند، پس $x_S = \frac{-۲+۰}{۲} = -۱$، بنابراین رأس سهمی $S(-۱ , -۴)$ است و معادلهٔ آن به صورت $f(x) = a(x + ۱)^۲ - ۴$ است. از طرفی نقطهٔ $(-۲ , ۰)$ روی سهمی قرار دارد، بنابراین:

$$f(۰) = -۲ \Rightarrow a(۰ + ۱)^۲ - ۴ = -۲ \Rightarrow a = ۲$$

بنابراین: $f(x) = ۲(x + ۱)^۲ - ۴$ و خواهیم داشت:

$$f(x) = ۰ \Rightarrow ۲(x + ۱)^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$$

$\Rightarrow$ حاصلضرب ریشه‌ها : $\frac{c}{a} = \frac{-۲}{۲} = -۱$

(۱۳) اگر $x = \frac{۱-a}{a}$ ریشهٔ غیرصفر معادلهٔ $ax^۲ + (۳a+۱)x + a - ۱ = ۰$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) -۱

پاسخ: **گزینه ۱**

$x = \frac{۱-a}{a} = -\frac{c}{a}$ ریشهٔ غیرصفر معادله است، پس ریشهٔ دیگر $x = -۱$ است.

$$ax^۲ + (۳a+۱)x + a - ۱ = ۰ \xrightarrow{x=-۱} a - ۳a - ۱ + a - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow a = -۲$$

(۱۴) معادله درجه دومی که جواب‌های آن مربع جواب‌های معادله $x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = ۰$ باشند، به‌صورت $x^۲ + ax + b = ۰$ است. حاصل $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) -۹
۳) ۹
۴) -۱

پاسخ: **گزینه ۴**

ابتدا معادله $x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$(x^۳ - x) + (-۲x^۲ + ۲) = x(x^۲ - ۱) - ۲(x^۲ - ۱)$$

$$= (x^۲ - ۱)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = -۱, x = ۲$$

حالت‌های زیر برای معادله درجه دوم داده شده امکان‌پذیر است:

الف) معادله دو جواب متمایز ۱ و ۴ را داشته باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -S = -۵ \\ b = P = ۴ \end{cases} \quad \Rightarrow a + b = -۱$$

ب) معادله جواب مضاعف $x = ۱$ را داشته باشد.

$$\Rightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ - ۲x + ۱$$
$$\Rightarrow a + b = -۱$$

پ) معادله جواب مضاعف $x = ۴$ را داشته باشد.

$$\Rightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ - ۸x + ۱۶$$

$$\Rightarrow a + b = ۸$$

(۱۵) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۴ + \beta^۴$ کدام است؟

۱) ۱۴۱
۲) ۱۵۱
۳) ۱۶۱
۴) ۱۷۱

پاسخ: **گزینه ۳**

$$P = \alpha\beta = -۲ \quad , \quad S = \alpha + \beta = ۳$$

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = ۳^۲ - ۲(-۲) = ۱۳$$

$$\Rightarrow \alpha^۴ + \beta^۴ = (\alpha^۲ + \beta^۲)^۲ - ۲(\alpha\beta)^۲ = ۱۳^۲ - ۲(-۲)^۲ = ۱۶۱$$

(۱۶) در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 3 = x$ ، α و β ریشه‌های معادله هستند. اگر $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 12$ باشد، a کدام است؟

۱) -16 ۲) -15 ۳) 15 ۴) 16

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا معادله را به صورت $2x^2 + (a-1)x + 3 = 0$ می‌نویسیم تا بتوانیم از قوانین جمع و ضرب ریشه‌ها کمک بگیریم.

$$S = \alpha + \beta = \frac{-(a-1)}{2}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

ازطرفی: $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}(-\frac{a-1}{2}) = 12$

$$\Rightarrow -(a-1) = 16 \Rightarrow a = -15$$

(۱۷) به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله $(x+3)(mx^2 + 8x + m - 3) = 0$ دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد؟

۱) $m < 3$ ۲) $m > 0$ ۳) $0 < m < 3$ ۴) $0 < m < 4$

پاسخ: گزینه ۳

یکی از ریشه‌ها برابر $x = -3$ است. پس برای این‌که دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت داشته باشیم، باید معادله $mx^2 + 8x + m - 3 = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد یعنی ضرب ریشه‌هایش $(\frac{c}{a})$ منفی باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m} < 0$$

m	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$\frac{m-3}{m}$		$+$	ت‌ن	$-$	0	$+$	

پس m می‌تواند مقادیر بین ۰ تا ۳ را اختیار کند.

توضیح: در صورتی‌که $ac < 0$ آن‌گاه قطعاً $\Delta > 0$ است.

(۱۸) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $-x^2+8x-1=0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۴

پاسخ: **گزینه ۲**

ابتدا عبارت خواسته شده را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس از جواب جذر می‌گیریم:

$$(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}})^2=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2=\frac{S^2-2P}{P}+2$$

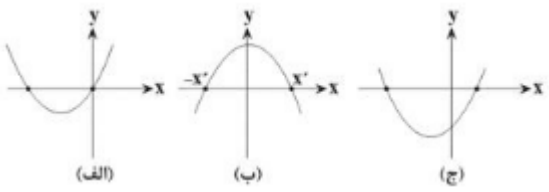
از معادله درجه دوم داده شده S و P را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{-8}{-1}=8\ ,\ P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{S^2-2P}{P}+2=\frac{64-2}{1}+2=64$$

اکنون از جواب به‌دست آمده جذر می‌گیریم. یعنی: $\sqrt{64}=8$

(۱۹) نمودارهای زیر مربوط به توابع درجهٔ دوم به معادلهٔ کلی $y=ax^2+bx+c$ هستند، در چند مورد از آن‌ها حاصل abc منفی است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: **گزینه ۲**

در شکل (الف)، $a>0$ و حاصل‌جمع دو ریشه منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها صفر است، چون یکی از ریشه‌ها صفر می‌باشد، بنابراین:

$$P=\frac{c}{a}=0\Rightarrow c=0\Rightarrow abc=0$$

و در شکل (ب) دو ریشه قرینهٔ هم می‌باشند، بنابراین $S=0$ است.

بنابراین: $S=-\frac{b}{a}=0\Rightarrow b=0\Rightarrow abc=0$

ولی در شکل (ج)، $a>0$ و $S<0$ و $P<0$ است:

$$S=-\frac{b}{a}<0\xrightarrow{a>0} b>0$$

$$P=\frac{c}{a}<0\xrightarrow{a>0} c<0$$

بنابراین $abc<0$ است.

(۲۰) اگر در معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ رابطه $۱۶a - ۴b + c = ۰$ بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{c}{a}$ ۲) $\frac{c}{a}$ ۳) $-\frac{c}{۴a}$ ۴) $\frac{c}{۴a}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به $۱۶a - ۴b + c = ۰$ متوجه می‌شویم که $x_۱ = -۴$ یکی از ریشه‌های معادله است که در خود معادله قرار داده شده است.

$$x_۱ x_۲ = \frac{c}{a}$$

$$-۴ \times x_۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow x_۲ = -\frac{c}{۴a}$$

(۲۱) معادله درجه دومی که ریشه‌های آن از ۳ برابر قرینه ریشه‌های معادله $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ دو واحد بیش‌تر باشند، کدام است؟

۱) $x^۲ + ۴x + ۱ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$
۳) $x^۲ + ۸x - ۱۱ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: اگر α و β را ریشه‌های معادله $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = ۴ \\ P = \alpha\beta = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -۳\alpha + ۲ \\ \beta' = -۳\beta + ۲ \end{cases}$$

$$S' = -۳(\alpha + \beta) + ۴ = -۳(۴) + ۴ = -۸$$

$$P' = (-۳\alpha + ۲)(-۳\beta + ۲) = ۹(\alpha\beta) - ۶(\alpha + \beta) + ۴$$

$$= ۹ - ۲۴ + ۴ = -۱۱$$

حال معادله جدید را می‌نویسیم: $x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۸x - ۱۱ = ۰$

روش دوم : (۱) $x_{\text{قدیم}} = \frac{۲ - X_{\text{جدید}}}{۳} + ۲ \Rightarrow X_{\text{جدید}} = ۳(-x_{\text{قدیم}})$

$$x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \xrightarrow{(۱)} (\frac{۲-X}{۳})^۲ - ۴(\frac{۲-X}{۳}) + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۹} (۲ - X)^۲ - ۱۲(۲ - X) + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow X^۲ - ۴X + ۴ - ۲۴ + ۱۲X + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow X^۲ + ۸X - ۱۱ = ۰$$

(۲۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 5 = 0$ باشند، حاصل $|\alpha + \frac{5}{\alpha}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{69}$ ۲) ۷ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) ۶۹

پاسخ: گزینه ۱

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -5 \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{\beta}$$

$$\Rightarrow |\alpha + \frac{5}{\alpha}| = |\frac{-5}{\beta} + \frac{5}{\alpha}| = |\frac{5(\beta-\alpha)}{\alpha\beta}| = |\frac{5(\beta-\alpha)}{-5}|$$

$$= |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49+20}}{1} = \sqrt{69}$$

(۲۳) به ازای کدام مقدار a، مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x+a}{x+2} - \frac{2}{x} = 1$ دو برابر حاصل‌ضرب آن‌هاست؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) -۸

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{2}{x} = \frac{x+a}{x+2} + 1 \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2x+a+2}{x+2} \Rightarrow 2x^2 + ax + 2x = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + ax - 4 = 0 \text{ ، } S = 2P \Rightarrow \frac{-a}{2} = 2 \times \frac{-4}{2} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -4 \Rightarrow a = 8$$

توجه کنید که به ازای $a = 8$، جواب معادله $x = 0$ یا $x = -2$ نمی‌شود.

(۲۴) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 - 4\alpha + 2)(\beta^2 - 4\beta + 4)$ چقدر است؟

۱) ۸۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

ریشه‌های معادله (α و β) در خود معادله صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \beta^2 - 4\beta = -1 \\ \alpha^2 - 4\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow (-1+4)(-1+2) = 3$$

(۲۵) اگر $m+n$ و $m-n$ ریشه‌های معادله $3x-\frac{1}{x}=2$ باشند، حاصل mn کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{3}$ ۲) ±1 ۳) $\pm\frac{1}{2}$ ۴) $\pm\frac{2}{9}$

پاسخ: **گزینه ۴**

$$3x-\frac{1}{x}=2 \xrightarrow[\text{ضربمیکنیم}]{x\neq0 \text{ طرفین را در}} 3x^2-2x-1=0$$

حال با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم داریم:

$$S=(m+n)+(m-n)=\frac{2}{3}\Rightarrow 2m=\frac{2}{3}\Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

$$P=(m+n)(m-n)=-\frac{1}{3}\Rightarrow m^2-n^2=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow n^2=m^2+\frac{1}{3}\Rightarrow n^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}\Rightarrow n=\pm\frac{2}{3}$$

بنابراین داریم:

$$mn=\begin{cases}\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\\ \frac{1}{3}\times\frac{-2}{3}=-\frac{2}{9}\end{cases}$$