مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۱ تابع**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

۱) در تابع $f=\{(۱,۳),(۴,a^۲),(a,۴),(۰,۴)\}$ اگر $f(f(a))=a$ باشد، آنگاه برای a چند مقدار مختلف وجود دارد؟

۱) صفر　**۲)** ۱　**۳)** ۲　**۴)** بی شمار

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

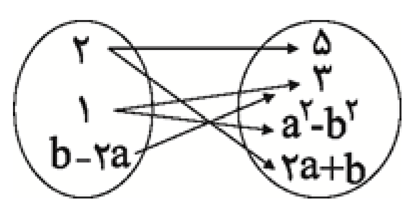
$$f(a)=۴\quad f(۴)=a^۲, f(f(a))=a$$

$$\Rightarrow a^۲=a \Rightarrow a^۲-a=۰ \Rightarrow a(a-۱)=۰ \Rightarrow a=۰ \text{ یا } a=۱$$

به ازای $a=۱$ دو زوج مرتب $(۱,۳)$ و $(۱,۴)$ ایجاد می‌شوند و f تابع نیست. اما به ازای $a=۰$ داریم:

$$f=\{(۱,۳),(۴,۰),(۰,۴)\}$$

۲) اگر نمودار ون زیر نمایش یک تابع باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{۵}{۲}$　**۲)** $\frac{۱}{۳}$

۳) ۲　**۴)** $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

اگر نمودار ون را به‌صورت زوج مرتبی بنویسیم باید شرط‌های زیر برقرار باشد تا نمودار مربوط به یک تابع باشد:

$$\begin{cases}(۲,۵)=(۲,۲a+b)\Rightarrow ۲a+b=۵\Rightarrow b=۵-۲a & (۱)\\(۱,۳)=(۱,a^۲-b^۲)\Rightarrow a^۲-b^۲=۳\end{cases}$$

$$a^۲-b^۲=۳\xrightarrow{(۱)}a^۲-(۵-۲a)^۲=۳$$

$$\Rightarrow a^۲-(۲۵+۴a^۲-۲۰a)=۳$$

$$\Rightarrow -۳a^۲+۲۰a-۲۸=۰\Rightarrow(-۳a+۱۴)(a-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۲\xrightarrow{(۱)}b=۱\\a=\frac{۱۴}{۳}\xrightarrow{(۱)}b=-\frac{۱۳}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۳\\a+b=\frac{۱۴}{۳}-\frac{۱۳}{۳}=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

که فقط $a+b=\frac{۱}{۳}$ در گزینه‌ها می‌باشد.

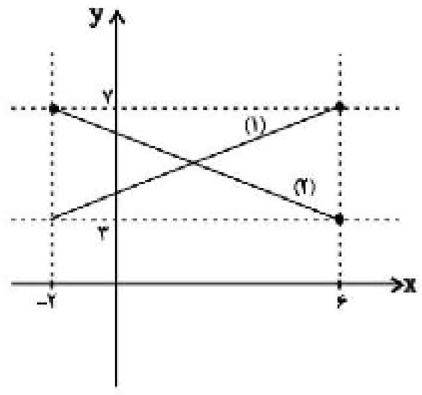
③ اگر دامنه و برد تابع خطی $f(x)$ به‌ترتیب به‌صورت $[-۲,۶]$ و $[۳,۷]$ باشد، آنگاه حاصل $f(۰)+f(۴)$ کدام است؟

۱) ۴ **۲)** ۶ **۳)** ۸ **۴)** ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به دامنه و برد این تابع خطی، نمودار آن به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:



اگر نمودار مطابق حالت (۱) باشد، تابع خطی f شامل ۲ نقطه $(-۲,۳)$ و $(۶,۷)$ است.

$$\Rightarrow m = \frac{۷-۳}{۶-(-۲)} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow y - ۷ = \frac{۱}{۲}(x-۶) \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۴$$
$$\Rightarrow f(۰) + f(۴) = ۴ + ۶ = ۱۰$$

اما اگر نمودار مطابق حالت (۲) باشد، تابع خطی f، شامل ۲ نقطه $(-۲,۷)$ و $(۶,۳)$ است:

$$\Rightarrow m = \frac{۳-۷}{۶-(-۲)} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۶$$
$$\Rightarrow f(۰) + f(۴) = ۶ + ۴ = ۱۰$$

پس در هر دو حالت $f(۰)+f(۴) = ۱۰$ است.

۴) در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} -x+۳ & ۲<x<۴ \\ x^{۲} & -۱\le x\le ۱ \\ x+۳ & -۵\le x<-۴ \end{cases}$، اشتراک دامنه و برد شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

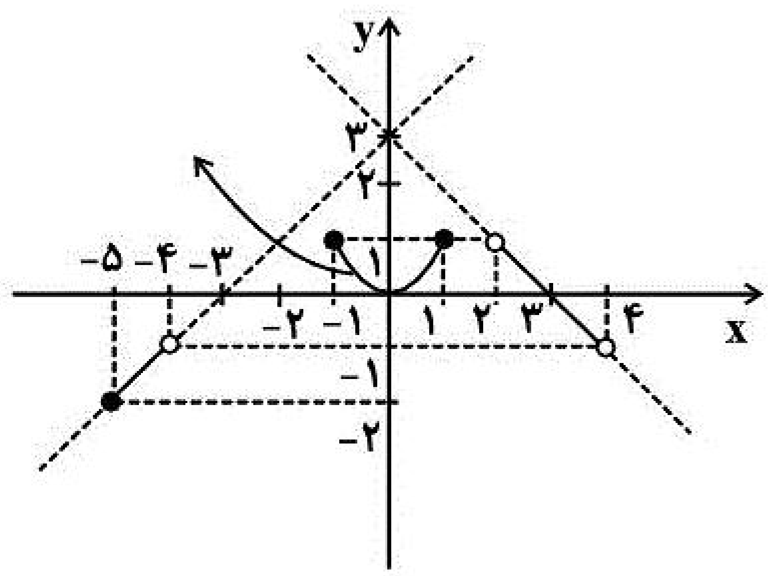
گزینهٔ «۳»

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم و از روی نمودار دامنه و برد آن را مشخص می‌کنیم.

$y=x+۳ \quad (-۵\le x<-۴)$

$(۲<x<۴) \quad y=-x+۳$

$(-۱\le x\le ۱) \quad y=x^{۲}$



$$\begin{cases} D_f=[-۵\,,\,-۴)\cup[-۱\,,\,۱]\cup(۲\,,\,۴) \\ R_f=[-۲\,,\,۱]-\{-۱\} \end{cases} \Rightarrow D_f\cap R_f=(-۱\,,\,۱]$$

اشتراک دامنه و برد شامل اعداد صحیح ۰ و ۱ است.

۵) در یک تابع خطی داریم: $f(x)+f(-x)=-۱۲$ و $f(۴)=-۲f(۱)$، در این صورت $f(۱۰)$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۰
۳) ۱۸
۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x)=ax+b \Rightarrow f(x)+f(-x)=ax+b-ax+b$$
$$=۲b=-۱۲ \Rightarrow b=-۶$$

$$f(۴)=-۲f(۱) \Rightarrow ۴a+b=-۲(a+b) \Rightarrow ۴a+b=-۲a-۲b$$

$$\Rightarrow ۶a=-۳b=۱۸ \Rightarrow a=۳$$

$$f(x)=۳x-۶ \Rightarrow f(۱۰)=۳۰-۶=۲۴$$

۶) اگر تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۳x^۳-۳}{x^۲+x+۱}+mx+n$ یک تابع همانی باشد، $n-m$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

باید ضابطه داده شده را ساده کنیم، تا به شکل تابع همانی $f(x)=x$ در آید:

$$f(x)=\frac{۳(x^۳-۱)}{x^۲+x+۱}+mx+n=\frac{۳(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x^۲+x+۱)}+mx+n$$

$$=۳x-۳+mx+n$$

$$f(x)=(۳+m)x+(n-۳) \Rightarrow \begin{cases} ۳+m=۱ \Rightarrow m=-۲ \\ n-۳=۰ \Rightarrow n=۳ \end{cases}$$

باید $m=-۲$ و $n=۳$ باشد تا به تابع $f(x)=x$ برسیم، پس:

$$n-m=۵$$

۷) اگر f یک تابع همانی، g یک تابع ثابت مثبت باشد و $f(۴)(g(۴))^۲=f(۱)-f(۳)g(۳)$، آنگاه حاصل $f(-۴)g(-۴)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

فرض کنیم $g(x)=k$، داریم:

$$۴k^۲=۱-۳k \Rightarrow ۴k^۲+۳k-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=-۱ & \text{غ.ق.ق} \\ k=\frac{۱}{۴} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

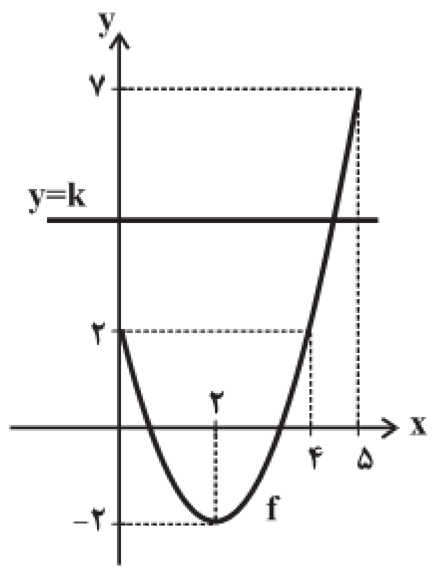
$$f(-۴)g(-۴)=-۴\left(\frac{۱}{۴}\right)=-۱$$

⑧ خط $y = k$ و نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + ۲$ با دامنه $[۰,۵]$، در یک نقطه مشترک هستند. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



اگر خط $y = k$ و نمودار تابع f در یک نقطه مشترک باشند، k می‌تواند مقادیر ۲-، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را داشته باشد.

⑨ به ازای چند عدد صحیح m دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{mx+۲}{(m-۱)x^۲+(۲m-۱)x-۱}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

چون $D_f = R$ است، مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد. بنابراین:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow (۲m-۱)^۲ - ۴(m-۱)(-۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۴m + ۱ + ۴m - ۴ < ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۳ < ۰ \Rightarrow m^۲ < \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow |m| < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} < m < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

تنها عدد صحیح $m = ۰$ در بازهٔ فوق قرار دارد.

۱۰) کدام تابع زیر با تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$ برابر است؟

۱) $g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x-4}$

۲) $h(x)=\sqrt[4]{(x^2-4x)^2}$

۳) $k(x)=\sqrt{\frac{x^3-5x^2+4x}{x-1}}$

۴) $m(x)=\sqrt{\frac{x^3-3x^2-4x}{x+2}}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

برای تساوی دو تابع، دو شرط زیر باید برقرار باشد:

الف) دامنهٔ دو تابع برابر باشند.

ب) به ازای هرx از دامنه، مقدار دو تابع برابر باشند:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x}\xrightarrow{\text{شرط دامنه}}x^2-4x\geq 0\Rightarrow x(x-4)\geq 0$$
$$\Rightarrow(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$$

گزینهٔ «۱»: $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-4}\xrightarrow{\text{شرط دامنه}}\begin{cases}x\geq 0\\x\geq 4\end{cases}$

دامنه‌ها نابرابر است. $\xrightarrow{\text{اشتراک}}x\geq 4$

گزینهٔ «۲»: $h(x)=\sqrt[4]{(x^2-4x)^2}\xrightarrow{\text{شرط دامنه}}(x^2-4x)^2\geq 0$

دامنه‌ها نابرابر است. $\Rightarrow D_h=R$

گزینهٔ «۳»: $k(x)=\sqrt{\frac{x^3-5x^2+4x}{x-1}}\xrightarrow{\text{شرط دامنه}}$

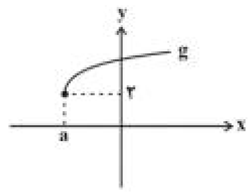
$$\frac{x\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}}\geq 0\xrightarrow[x\neq 1]{}D_k=D_f$$

$x\in D_k=D_f$ از طرفی به ازای $\Rightarrow k(x)=\sqrt{x^2-4x}$

گزینهٔ «۴» : $m(x)=\sqrt{\frac{x^3-3x^2-4x}{x+2}}\xrightarrow{x\neq -2}$

دامنه‌ها نابرابرند. $-2\in D_f\Rightarrow$

(۱۱) اگر $f(x) = ۱ - \sqrt{x+۱}$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x) = b - f(x)$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

$g(x) = b - f(x) = b - (۱ - \sqrt{x+۱}) = \sqrt{x+۱} + b - ۱$

با توجه به نمودار واضح است که $a = -۱$ و $b - ۱ = ۲$ و در نتیجه $b = ۳$است.

$\Rightarrow a + b = -۱ + ۳ = ۲$

(۱۲) دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x^۲+۳+\frac{۱}{x}}{x^۲+۶x+k}$ به صورت $D_f = R - \{a , b\}$ است. مقدار $|k + a + b|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

دامنه تابع $f(x) = \frac{x^۲+۳+\frac{۱}{x}}{x^۲+۶x+k}$، عدد صفر را شامل نمی‌شود، پس یکی از اعداد a و b برابر با صفر است. (مثلاً $a = ۰$) با توجه به این‌که فقط یک عدد دیگر (b) در دامنه تابع f وجود ندارد، دو حالت به وجود می‌آید:

۱) مخرج ریشه مضاعف دارد:

$$\Delta_{\text{مخرج}} = ۰ \Rightarrow ۳۶ - ۴k = ۰ \Rightarrow k = ۹$$

حال مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا b به‌دست آید:

$$x^۲ + ۶x + ۹ = ۰ \Rightarrow (x+۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow b = -۳$$

$$\Rightarrow |k + a + b| = |۹ + ۰ + (-۳)| = ۶$$

۲) مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها صفر است:

$$x = ۰ \Rightarrow ۰^۲ + ۶(۰) + k = ۰ \Rightarrow k = ۰ \text{ ریشه مخرج است}$$

حال با جای‌گذاری $k = ۰$، ریشه دیگر مخرج را حساب می‌کنیم:

$$x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow x(x+۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۶ \Rightarrow b = -۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |k + a + b| = |۰ + ۰ + (-۶)| = ۶$$

۱۳) اگر مجموعه جواب معادله $[۲-|x+۱|]=۱$ را به صورت $[a,b]-\{c\}$ نشان دهیم، حاصل $b-ac$ کدام است؟([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۴

$$[۲-|x+۱|]=۱ \Rightarrow ۱ \le ۲-|x+۱| < ۲$$
$$\xrightarrow{-۲} -۱ \le -|x+۱| < ۰ \xrightarrow{\times(-۱)}$$
$$۰ < |x+۱| \le ۱ \Rightarrow \begin{cases} |x+۱| > ۰ \Rightarrow x \in R-\{-۱\} & (۱) \\ |x+۱| \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x+۱ \le ۱ \Rightarrow -۲ \le x \le ۰ & (۲) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x \in [-۲,۰]-\{-۱\} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=۰ \\ c=-۱ \end{cases}$$
$$\Rightarrow b-ac = ۰-(-۲)(-۱) = -۲$$

۱۴) اگر $f+۲g=\{(۵,۶),(-۱,۲),(۰,۴)\}$ و $f-g=\{(۰,۵),(-۱,۴),(۵,۶)\}$، آن‌گاه حاصل $f(۰)-f(۵)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) $-\frac{۴}{۳}$
۳) ۱-
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تابع $f-g$، تابع $۲f-۲g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۲(f-g) = ۲f-۲g = \{(۰,۱۰),(-۱,۸),(۵,۱۲)\}$$

حال با جمع کردن دو تابع $f+۲g$ و $۲f-۲g$ داریم:

$$(f+۲g)+(۲f-۲g) = ۳f = \{(۰,۱۴),(-۱,۱۰),(۵,۱۸)\}$$
$$\Rightarrow f = \{(۰,\frac{۱۴}{۳}),(-۱,\frac{۱۰}{۳}),(۵,۶)\}$$
$$\Rightarrow f(۰)-f(۵) = \frac{۱۴}{۳}-۶ = -\frac{۴}{۳}$$

۱۵) اگر $f(x)=\sqrt{n-3x}$، $g(x)=\sqrt{x-3m}$ و تابع $f+g$ به‌صورت $\{(1,a)\}$ باشد، آنگاه مقدار $am+n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۳

۳) صفر

۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

ابتدا باید دامنهٔ $f+g$ را محاسبه کرده و برابر عدد یک قرار دهیم.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\sqrt{n-3x}\Rightarrow n-3x\geqslant 0\Rightarrow x\le \frac{n}{3} \\ g(x)=\sqrt{x-3m}\Rightarrow x-3m\ge 0\Rightarrow x\ge 3m \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{1\}$$

پس : $\frac{n}{3}=3m=1\Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases}$

حال تابع $f+g$ را مشخص می‌نماییم:

$$f(x)+g(x)=\sqrt{3-3x}+\sqrt{x-3(\frac{1}{3})}=\sqrt{3-3x}+\sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{x=1} f(1)+g(1)=0+0=0\Rightarrow a=0$$

پس: $am+n=0\times\frac{1}{3}+3=3$

۱۶) اگر $f=\{(-1,5),(2,0),(3,4),(4,3)\}$ و $g=\{(-1,4),(4,-1),(0,3)\}$، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع $\frac{2f}{g^{-1}}$ کدام است؟

۱) ۷-

۲) ۱۵-

۳) صفر

۴) ۳۰-

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

ابتدا با دو برابر کردن مقادیر f تابع 2f را می‌نویسیم:

$$2f=\{(-1,10),(2,0),(3,8),(4,6)\}$$

با جابه‌جا کردن مؤلفهٔ اول و دوم تابع g، تابع g^{-1} را می‌نویسیم:

$$g^{-1}=\{(4,-1),(-1,4),(3,0)\}$$

$$\Rightarrow \frac{2f}{g^{-1}}=\left\{(-1,\frac{10}{4}),(4,\frac{6}{-1})\right\}=\{(-1,\frac{5}{2}),(4,-6)\}$$

دقت کنید که عدد ۳ عضو دامنهٔ تابع $\frac{2f}{g^{-1}}$ نیست، زیرا $g^{-1}(3)=0$ است.

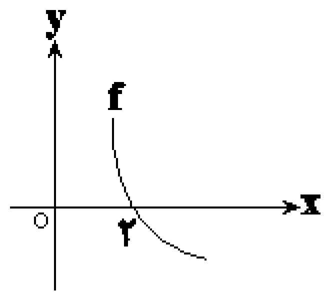
$$-15=(-6)\times\frac{5}{2}=\text{حاصل‌ضرب اعضای برد}$$

۱۷) تابع f در اعداد حقیقی اکیداً نزولی و $f(۲) = ۰$ است. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^۲}{(x-۱)f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»



می‌دانیم $f(۲) = ۰$ بوده و تابع f اکیداً نزولی است.

$\frac{x^۲}{(x-۱)f(x)} \geq ۰$

x		0		1		2	
x^2	+	0	+		+		+
$x-1$	−		−	0	+		+
$f(x)$	+		+		+	0	−
عبارت	−	0	−	ت.ن	+	ت.ن	−

دامنهٔ تعریف تابع $D_g = (۱,۲) \cup \{۰\}$ است و شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

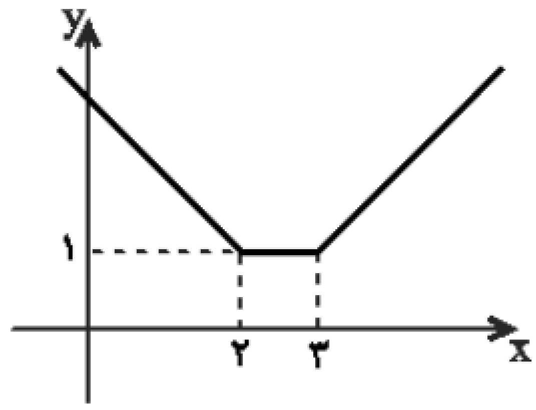
۱۸) در بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً صعودی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه مشترک

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

نمودار تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ به صورت زیر است.



ملاحظه می‌شود که این تابع به ازای $x > 3$ اکیداً صعودی است که در این صورت عبارت‌های داخل هر دو قدر مطلق مثبت هستند.

بنابراین:

$$x > 3 \ : \ f(x) = (x-2) + (x-3) = 2x - 5$$

حال باید بررسی کنیم معادله‌ی $\underbrace{2x-5}_{f(x)} = \underbrace{2x^2 - x - 10}_{g(x)}$ چند جواب در $x > 3$ دارد.

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = (2x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 < 3 \\ x = \frac{5}{2} < 3 \end{cases}$$

پس دو نمودار نقطه مشترکی ندارد.

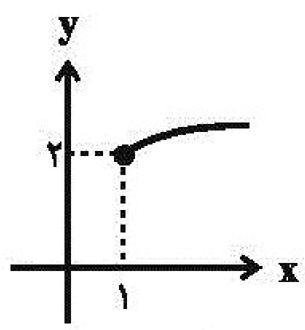
۱۹) به ازای چند مقدار صحیح ، تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 ; x \geq 1 \\ ax - 2 ; x < 1 \end{cases}$ اکیداً یکنوا است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

نمودار تابع f برای $x \geq 1$ در شکل زیر رسم شده است:

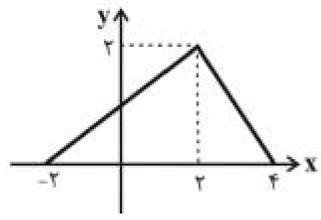


برای اینکه تابع f روی R اکیداً یکنوا باشد، لازم است خط $y = ax - 2$ اکیداً صعودی باشد، با این شرط که در $x = 1$، مقدار آن بیشتر از ۲ نباشد:

$$y = ax - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{صعودی} : a > 0 \\ x = 1 : y = a - 2 \leq 2 \Rightarrow a \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq 4$$

اعداد صحیح این بازه، ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند.

۲۰ اگر نمودار تابع f به صورت زیر و $g(x) = f(2x)$ باشد، تابع fog روی بازه $[a,b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

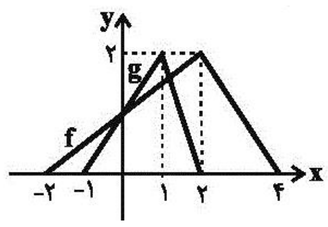


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

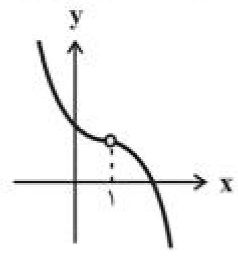
نمودار تابع g از تقسیم xهای نمودار تابع f بر ۲ بدست می‌آید.



تابع fog هنگامی اکیداً نزولی است که یکی از توابع f یا g نزولی و دیگری صعودی باشد.

تابع g در فاصله $[1,2]$ نزولی اکید و تابع f در همین فاصله صعودی اکید است، پس fog در این بازه نزولی اکید است و بیشترین مقدار $b - a$ برابر ۱ خواهد بود.

(۲۱) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. مجموعه جواب نامعادله $f(x+1) \le f(2x-3)$ چند عدد طبیعی را شامل می‌شود؟



۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تابع f روی $D_f = R - \{1\}$ اکیداً نزولی است.

$$f(x+1) \le f(2x-3) \Rightarrow x+1 \ge 2x-3 \Rightarrow x \le 4 \quad (1)$$

همچنین مقدار و ورودی تابع f نباید برابر ۱ باشد پس داریم:

$$(x+1) \in R - \{1\} \Rightarrow x \ne 0 \quad (2)$$

$$(2x-3) \in R - \{1\} \Rightarrow x \ne 2 \quad (3)$$

$\xrightarrow{(1),(2),(3)}$ مجموعه جواب نامعادله $= (-\infty, 4] - \{0, 2\}$

این بازه سه عدد طبیعی ۱، ۳ و ۴ را شامل می‌شود.

(۲۲) اگر دامنهٔ تابع $y = f(2x)$ به صورت $(-2, 2]$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \frac{-1}{2} f(\frac{-x}{3} + 4)$ کدام گزینه است؟

۱) $(0, 24]$
۲) $[\frac{-11}{3}, \frac{13}{3})$
۳) $[0, 24)$
۴) $(\frac{-11}{3}, \frac{13}{3}]$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

ابتدا باید دامنه $f(x)$ را بیابیم. دامنهٔ تابع $y = f(2x)$، بازهٔ $(-2, 2]$ است، پس داریم:

$$-2 < x \le 2 \Rightarrow -4 < 2x \le 4 \Rightarrow D_f : (-4, 4]$$

حال برای یافتن دامنهٔ $y = \frac{-1}{2} f(\frac{-x}{3} + 4)$ باید عبارت $\frac{-x}{3} + 4$ را در بازهٔ $(-4, 4]$ قرار دهیم:

$$-4 < \frac{-x}{3} + 4 \le 4 \Rightarrow -8 < -\frac{x}{3} \le 0 \Rightarrow 0 \le x < 24$$

(۲۳) اگر $f(x) = ۵x - ۱۰$ و $D_f = [-۱,۲]$ باشد، دامنه تابع fof کدام است؟

۱) $[-۱,۲]$ ۲) $[۱,۲]$ ۳) $\left[-۱,\frac{۹}{۵}\right]$ ۴) $\left[\frac{۹}{۵},۲\right]$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$D_{fof} = \{x|x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$= \{x| -۱ \le x \le ۲, -۱ \le ۵x - ۱۰ \le ۲\} = \{x| -۱ \le x \le ۲, \frac{۹}{۵} \le x \le \frac{۱۲}{۵}\}$$

$$\Rightarrow D_{fof} = [-۱,۲] \cap \left[\frac{۹}{۵},\frac{۱۲}{۵}\right] = \left[\frac{۹}{۵},۲\right]$$

(۲۴) تابع $f(x)$ کدام باشد تا $(fof^{-۱})(x) = (f^{-۱}of)(x)$ باشد؟

۱) $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ ۲) $f(x) = ۱ + \sqrt{۱ + x}$

۳) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}$ ۴) $f(x) = x + \sqrt{x}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

باید دامنه‌های دو تابع $f^{-۱}of$ و $fof^{-۱}$ برابر باشد چون ضابطه‌ها که همان x می‌شود:

$D_f = D_{f^{-۱}}$ یا $D_f = R_f$

پس دامنه و برد هر تابع را باید پیدا کنیم:

گزینهٔ «۱» $\Rightarrow D_f : ۴ - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲$

$R_f : ۴ - x^۲ \le ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۴ - x^۲} \le ۲$

گزینهٔ «۲» $\Rightarrow D_f : ۱ + x \ge ۰ \Rightarrow x \ge -۱$

$R_f : \sqrt{۱ + x} \ge ۰ \Rightarrow ۱ + \sqrt{۱ + x} \ge ۱$

گزینهٔ «۳» $\Rightarrow D_f : x > ۰ \quad R_f : \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} \ge ۲$

گزینهٔ «۴» $\Rightarrow D_f : x \ge ۰ \quad R_f : f(x) = x + \sqrt{x}$

با توجه به این‌که f جمع دو تابع x و $\sqrt{x}$ که هر کدام صعودی اکید هستند می‌باشد پس حداقل تابع در ابتدای دامنه اتفاق می‌افتد:

$x = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow R_f : x + \sqrt{x} \ge ۰$

۲۵ اگر $g(x) = \frac{۵x-۱}{۲x-۶}$، $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $f^{-۱}(g(a)) = ۴$ باشد، مقدار $g^{-۱}(a)$ کدام است؟

۱) ۵/۸
۲) ۶/۲
۳) ۴/۶
۴) ۳/۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$f^{-۱}(g(a)) = ۴ \Rightarrow f(۴) = g(a)$

$۴ + \sqrt{۴} = \frac{۵a-۱}{۲a-۶} \Rightarrow ۶ = \frac{۵a-۱}{۲a-۶}$

$\Rightarrow ۱۲a - ۳۶ = ۵a - ۱ \Rightarrow ۷a = ۳۵ \Rightarrow a = ۵$

پس باید $g^{-۱}(۵)$ را حساب کنیم. این مقدار مجهول را k در نظر می‌گیریم. داریم: $g(k) = ۵$.

$\Rightarrow g(k) = \frac{۵k-۱}{۲k-۶} = ۵ \Rightarrow ۵k - ۱ = ۱۰k - ۳۰ \Rightarrow k = \frac{۲۹}{۵} = ۵/۸$