مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۱ معادلات و توابع درجه ۲**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

۱) نمودار سهمی به معادله $y = (۲x - ۱)^۲ + (x - ۲)^۲$ از کدام نواحی مختصات عبور می‌کند؟

۱) سوم و چهارم　　**۲)** اول، دوم و چهارم

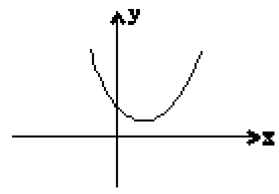
۳) اول و دوم　　**۴)** هر چهار ناحیه

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

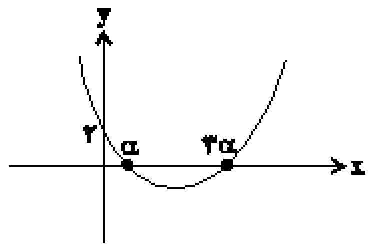
$$y = ۴x^۲ - ۴x + ۱ + x^۲ - ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow y = ۵x^۲ - ۸x + ۵ \Rightarrow \Delta = (-۸)^۲ - ۴(۵)(۵) = ۶۴ - ۱۰۰ = -۳۶$$



ضریب $x^۲$ مثبت و Δ منفی است، پس در این سهمی همواره $y > ۰$ و نمودار آن شبیه شکل بالا است، یعنی از ناحیه‌های اول و دوم مختصات عبور می‌کند.

۲) مینیمم تابع درجه دوم شکل مقابل، کدام است؟



۱) -۱　　**۲)** $\frac{-۱}{۳}$

۳) $\frac{-۱}{۲}$　　**۴)** $\frac{-۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

α و ۳α ریشه‌های تابع هستند، پس $f(x) = a(x - \alpha)(x - ۳\alpha)$ است.

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow ۲ = a(۰ - \alpha)(۰ - ۳\alpha) = a(۳\alpha^۲) \Rightarrow a = \frac{۲}{۳\alpha^۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲}{۳\alpha^۲}(x - \alpha)(x - ۳\alpha)$$

طول رأس سهمی برابر $۲\alpha = \frac{\alpha + ۳\alpha}{۲}$ است، حال عرض رأس سهمی را می‌یابیم:

$$f(۲\alpha) = \frac{۲}{۳\alpha^۲}(۲\alpha - \alpha)(۲\alpha - ۳\alpha) = \frac{۲}{۳\alpha^۲}(-\alpha^۲) = \frac{-۲}{۳}$$

۳ هرگاه سهمی $y = mx^{۲} + (۳ - m)x - ۳$ نسبت به خط $x = -۱$ متقارن باشد، آن‌گاه طول پاره‌خطی که این سهمی بر روی محور xها جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۴ **۲)** ۳ **۳)** ۵ **۴)** ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به این‌که $x = -۱$ محور تقارن سهمی می‌باشد، بنابراین:

$$-\frac{b}{۲a} = -۱ \Rightarrow -\frac{(۳-m)}{۲m} = -۱ \Rightarrow ۲m = ۳ - m \Rightarrow ۳m = ۳ \Rightarrow m = ۱$$

معادله سهمی را تشکیل می‌دهیم:

$$y = x^{۲} + ۲x - ۳$$

برای پیدا کردن طول پاره خطی که سهمی بر روی محور xها جدا کرده، بایستی ریشه‌های معادله را پیدا کنیم.

$$x^{۲} + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{طول پاره‌خط} = |-۳ - ۱| = ۴$$

۴) یک سهمی از دو نقطه $A(-۲,۳)$ و $B(۴,۳)$ عبور می‌کند و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع می‌کند. اندازه پاره خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند، چقدر است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** $\sqrt{۳}$ **۴)** $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

میانگین طول دو نقطه هم‌عرض روی سهمی برابر با طول نقطه راس سهمی است.

$$A(-۲,۳)\ ,\ B(۴,۳) \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = \frac{-۲+۴}{۲} = ۱ \xrightarrow{\text{مختصات راس}} S(۱,\beta)$$

نکته: معادله سهمی که رأس آن $S(\alpha,\beta)$ باشد، در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$$

$y = a(x-۱)^۲ + \beta$: پس داریم

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = a + \beta = -۱ : \text{محل برخورد با } y \text{ ها} \\ a(-۲-۱)^۲ + \beta = ۳ \Rightarrow ۹a + \beta = ۳ : \text{نقطه } A(-۲,۳) \text{ بر روی سهمی است} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۲}, \beta = -\frac{۳}{۲}$$

$$y = \frac{۱}{۲}(x-۱)^۲ - \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow y = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(x-۱)^۲ - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۳$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \sqrt{۳} + ۱ \\ x_۲ = -\sqrt{۳} + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} ۲\sqrt{۳}$$

⑤ به ازای چه مجموعه مقادیری ازm، تعداد جواب‌های حقیقی و متمایز معادله $(x^۲+۲mx+۴)(x^۲-۴)=۰$ برابر ۲ می‌شود؟

۱) $(-\infty,-۲)$ **۲)** $(-۲,۲)$ **۳)** $[-۲,۲]$ **۴)** $[۲,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

اگر پرانتز دوم را برابر صفر قرار دهیم، داریم:
$$\begin{cases} x=-۲ \\ x=۲ \end{cases}$$

حال وضعیت‌های زیر در مورد پرانتز اول باید رخ دهد:

الف) $x^۲+۲mx+۴=۰$ فاقد ریشه باشد، پس:

$$\Delta<۰ \Rightarrow ۴m^۲-۱۶<۰ \Rightarrow -۲<m<۲ \quad (۱)$$

ب) $x^۲+۲mx+۴=۰$ ریشه مضاعف $x=۲$ یا $x=-۲$ را داشته باشد:

$$x^۲+۲mx+۴=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴ \Rightarrow m=-۲ \quad (۲)$$
$$x^۲+۲mx+۴=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴ \Rightarrow m=۲ \quad (۳)$$

ج) جواب‌های $x=\pm۲$ در $x^۲+۲mx+۴=۰$ به دست آید که امکان‌پذیر نیست، زیرا:

$x^۲+۲mx+۴=(x-۲)(x+۲)=x^۲-۴$ µPoÃü

پس جواب کل: $\xrightarrow{(۱)\ \cup\ (۲)\ \cup\ (۳)} -۲\le m\le ۲$

⑥ اگر جواب‌های معادله $x^۲-mx+m=۰$ برابر باشند، مجموع جواب‌های حقیقی معادله $(m-۲)x^۲-(m+۱)x+۳=۰$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ **۲)** $\frac{۳}{۲}$ **۳)** $-\frac{۳}{۲}$ **۴)** $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه«۱»

جواب‌های معادله $x^۲-mx+m=۰$ برابرند، یعنی معادله جواب مضاعف دارد، پس Δی آن برابر صفر است.

$\Delta=m^۲-۴m=۰ \Rightarrow m=۰$ یا ۴

$$\begin{cases} m=۰ \xrightarrow{\text{معادله جدید}} -۲x^۲-x+۳=۰ \\ \Rightarrow \text{مجموع جواب}: s=-\frac{۱}{۲} \\ m=۴ \xrightarrow{\text{معادله جدید}} ۲x^۲-۵x+۳=۰ \\ \Rightarrow \text{مجموع جواب ها}: s=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۷ نقطه $(1,-2)$ رأس یک سهمی است. معادله خطی که از این نقطه و یکی از ریشه‌ها می‌گذرد، $y = 4x - 6$ است. عرض این سهمی در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ **۲)** ۴ **۳)** ۳ **۴)** ۲/۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$y = 4\alpha - 6 \Rightarrow 4\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

پس یکی از ریشه‌ها $\frac{3}{2}$ است. $x = 1$ محور تقارن سهمی است، بنابراین:

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

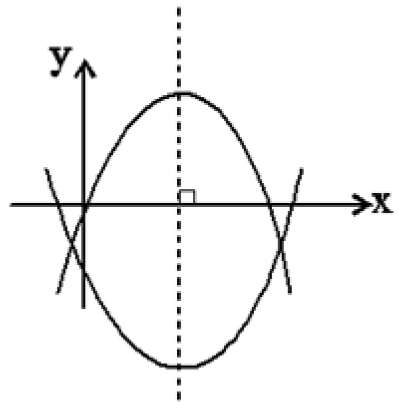
$\Rightarrow y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

با قرار دادن مختصات رأس سهمی در معادله آن، $a = 8$ بدست می‌آید. بنابراین:

$\Rightarrow y = 8x^2 - 16x + 6$

$\Rightarrow y(\frac{1}{4}) = 2/5$

۸) نمودار سهمی‌های $y = -۲x^۲ + bx + c$ و $y = x^۲ - ۴x - b$ در شکل زیر رسم شده است. رأس‌های دو سهمی از هم چند واحد فاصله دارند؟



۱) ۴
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

طبق نمودار، سهمی رو به پایین از مبدأ می‌گذرد، پس در $y = -۲x^۲ + bx + c$ داریم:

$$y(۰) = ۰ \Rightarrow c = ۰$$

همچنین، طول رأس دو سهمی یکی است، پس:

$$\left.\begin{array}{l} y = -۲x^۲ + bx \Rightarrow x_{S_۱} = \frac{-b}{۲(-۲)} = \frac{b}{۴} \\ y = x^۲ - ۴x - b \Rightarrow x_{S_۲} = -\frac{-۴}{۲(۱)} = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مساوی اند}} \frac{b}{۴} = ۲ \Rightarrow b = ۸$$

پس معادله سهمی‌ها $y = -۲x^۲ + ۸x$ و $y = x^۲ - ۴x - ۸$ است و مقدار آن‌ها در $x = ۲$ برابر است با:

$$y_{S_۱} = -۲(۲)^۲ + ۸(۲) = ۸ y_{S_۲} = ۲^۲ - ۴(۲) - ۸ = -۱۲$$

و اختلاف عرض رأس‌ها برابر می‌شود با:

$$۸ - (-۱۲) = ۲۰$$

۹) به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y = mx^۲ - mx + ۱$ بر محور xها مماس و رو به بالا است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

چون نمودار بر محورxها مماس است:

$$\Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow (-m)^۲ - ۴m(۱) = ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow m(m - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m = ۴ \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $m = ۰$ ضریب $x^۲$ برابر صفر و تابع ثابت $y = ۱$ به‌دست می‌آید پس $m = ۴$ قابل‌قبول است.

۱۰) یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲-(۴a+۱)x+۴a=۰$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کم‌تر است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر α و β را ریشه‌های معادله بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{۴a+۱}{a} \\ \alpha\beta=۴ \end{cases}$$

$$\alpha=۱۰\beta-۳ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۲=۱۰\alpha\beta-۳\alpha \xrightarrow{\alpha\beta=۴} \alpha^۲=۴۰-۳\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+۳\alpha-۴۰=۰ \Rightarrow (\alpha+۸)(\alpha-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-۸ \\ \alpha=۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=-۸ \Rightarrow \beta=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow S=\frac{۴a+۱}{a}=\frac{-۱۷}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۲}{۲۵} \\ \alpha=۵ \Rightarrow \beta=\frac{۴}{۵} \Rightarrow S=\frac{۴a+۱}{a}=\frac{۲۹}{۵} \Rightarrow a=\frac{۵}{۹} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار مثبت a}} a=\frac{۵}{۹}$$

توجه: دلتای معادله $\Delta=۸a+۱$ است که به ازای دو مقدار بدست آمده، مثبت است..

۱۱) به‌ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات ریشه‌های معادله $۲x^۲-mx+m=۰$ برابر ۳ است؟

۱) هیچ مقدار m ۲) فقط۶ ۳) فقط ۲- ۴) ۶ و ۲-

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$۲x^۲-mx+m=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{m}{۲} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{m}{۲} \end{cases}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=\frac{m^۲}{۴}-m=۳ \Rightarrow m^۲-۴m-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow m=۶ \text{ یا } m=-۲$$

دقت کنید که به‌ازای $m=۶$ معادله ریشه حقیقی ندارد پس فقط $m=-۲$ قابل قبول است.

۱۲) مجموع ریشه‌های معادله $۲(x^۲+x)^۲ - ۳(x^۲+x+۲)+۷=۰$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) -۱　　۳) -۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

به روش تغییر متغیر معادله را حل می‌کنیم، با تغییر متغیر $x^۲+x=t$ داریم:

$$۲t^۲-۳(t+۲)+۷=۰ \Rightarrow ۲t^۲-۳t-۶+۷=۰$$

$$\Rightarrow ۲t^۲-۳t+۱=۰ \Rightarrow (t-۱)(۲t-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^۲+x=۱ \Rightarrow x^۲+x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \\ \text{مجموع ریشه ها} \ : \ x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=-۱ \\ t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲+x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x^۲+۲x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \\ \text{مجموع ریشه ها} \ : \ x'_۱+x'_۲=\frac{-b}{a}=-۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله، برابر است با:

$$x_۱+x_۲+x'_۱+x'_۲=-۲$$

۱۳) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ باشند، آن‌گاه ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر برابر $۲\alpha^۳$ و $۲\beta^۳$ هستند؟

۱) $x^۲-\frac{۲۵}{۴}x-۳۲=۰$　　۲) $x^۲+\frac{۲۵}{۸}x-۳۲=۰$

۳) $x^۲-\frac{۲۵}{۴}x-۱۶=۰$　　۴) $۲x^۲-۲۵x+۱۶=۰$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

راه‌حل اول: در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-x-۴=۰$ داریم:

$$S_۱=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad P_۱=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۲$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را می‌یابیم:

$$S_۲=۲\alpha^۳+۲\beta^۳=۲(\alpha^۳+\beta^۳)=۲(S_۱^۳-۳S_۱P_۱)=۲(\frac{۱}{۸}+۳)=\frac{۲۵}{۴}$$

$$P_۲=(۲\alpha^۳)(۲\beta^۳)=۴P_۱^۳=۴(-۸)=-۳۲$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مورد نظر}} x^۲-S_۲x+P_۲=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۲۵}{۴}x-۳۲=۰$$

راه‌حل دوم: با جایگذاری ریشه‌های α و β در معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ داریم:

$$\begin{cases} ۲\alpha^۲=\alpha+۴ \xrightarrow{\times\alpha} ۲\alpha^۳=\alpha^۲+۴\alpha=(\frac{\alpha}{۲}+۲)+۴\alpha=\frac{۹}{۲}\alpha+۲ \\ ۲\beta^۲=\beta+۴ \xrightarrow{\times\beta} ۲\beta^۳=\beta^۲+۴\beta=(\frac{\beta}{۲}+۲)+۴\beta=\frac{۹}{۲}\beta+۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S'=\frac{۹}{۲}(\alpha+\beta)+۴=\frac{۹}{۲}\times(\frac{۱}{۲})+۴=\frac{۲۵}{۴} \\ P'=\frac{۸۱}{۴}(\alpha\beta)+۹\times(\alpha+\beta)+۴=-\frac{۸۱}{۲}+\frac{۹}{۲}+۴=-۳۲ \end{cases}$$

معادلهٔ جدید : $x^۲-\frac{۲۵}{۴}x-۳۲=۰$

۱۴) معادله $\sqrt{۸+۲x-x^۲} - \sqrt{۱-x^۲} = ۲$ دارای دو ریشه حقیقی است، مجموع مربعات این دو ریشه کدام است؟

۱) ۱/۰۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۰۶ ۴) ۱/۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{۸+۲x-x^۲} = ۲ + \sqrt{۱-x^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۸+۲x-x^۲ = ۴+۱-x^۲+۴\sqrt{۱-x^۲}$$

$$۲x+۳ = ۴\sqrt{۱-x^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴x^۲+۹+۱۲x = ۱۶-۱۶x^۲$$

$$\Rightarrow ۲۰x^۲+۱۲x-۷ = ۰ \qquad (*)$$

اگر α و β ریشه‌های معادله آخر باشند $\alpha^۲+\beta^۲$ حاصل خواسته شده است.

$$\begin{cases} S = \frac{-b}{a} = -\frac{۱۲}{۲۰} = -\frac{۳}{۵} \\ P = \frac{c}{a} = -\frac{۷}{۲۰} \end{cases}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲ = S^۲-۲P = \frac{۹}{۲۵}+\frac{۱۴}{۲۰} = \frac{۳۶+۷۰}{۱۰۰} = \frac{۱۰۶}{۱۰۰} = ۱/۰۶$$

توجه کنید که در هنگام جایگذاری ریشه‌های معادله (*) در معادله اصلی، زیر هیچ یک از رادیکال‌ها منفی نمی‌شود و ریشه‌ها قابل قبول هستند.

۱۵) اگر $x = ۲$، یک ریشهٔ معادلهٔ $x^۳+۲x^۲-۳x-۱۰ = ۰$ باشد، آنگاه این معادله دارای:

۱) دو ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی است.
۲) دو ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت است.
۳) تنها یک ریشهٔ مثبت است.
۴) سه ریشهٔ مثبت است.

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$(x-۲)$ یک عامل چندجمله‌ای است. با تقسیم چندجمله‌ای بر $x-۲$، عامل‌های دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۲x^۲-۳x-۱۰ & x-۲ \\ \hline -(x^۳-۲x^۲) & x^۲+۴x+۵ \\ \quad ۴x^۲-۳x-۱۰ & \\ \quad -(۴x^۲-۸x) & \\ \quad ۵x-۱۰ & \\ \quad -(۵x-۱۰) & \\ \quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳+۲x^۲-۳x-۱۰ = (x^۲+۴x+۵)(x-۲)$$

ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x+۵ = ۰$ را می‌یابیم.

ریشهٔ حقیقی ندارد. $\Rightarrow \Delta = ۴^۲-۴(۵) = -۴ < ۰$

بنابراین معادله فقط دارای یک ریشهٔ مثبت $x = ۲$ است.

۱۶) ریشه‌های کدام معادله درجه دوم $\sqrt{۲}+۱$ و $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$ هستند؟

۱) $x^۲-۲(\sqrt{۲}-۱)x+۲\sqrt{۲}=۰$
۲) $x^۲-۲(\sqrt{۲}-۱)x+۳+۲\sqrt{۲}=۰$
۳) $x^۲+(۲\sqrt{۲}+۲)x+۳+۲\sqrt{۲}=۰$
۴) $(x-۱-\sqrt{۲})^۲=۰$

پاسخ: گزینه ۴

راه‌حل اول: با به دست آوردن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، معادله درجه دوم را به کمک رابطه $x^۲-Sx+P=۰$ می‌نویسیم:

$$S=۱+\sqrt{۲}+\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲-۱+۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=۲(\sqrt{۲}+۱)$$

$$P=(۱+\sqrt{۲})\times\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲}+۱)^۲=۳+۲\sqrt{۲}$$

$$x^۲-(۲\sqrt{۲}+۲)x+۳+۲\sqrt{۲}=۰\Rightarrow(x-(۱+\sqrt{۲}))^۲=۰$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{۲}+۱$، پس کافی است معادله $(x-\alpha)^۲$ را تشکیل دهیم که α همان $۱+\sqrt{۲}$ است.

۱۷) به ازای کدام مقدار m، معادله $(m-۲)x^۲+(۲m\sqrt{۵m})x+m^۲-۲m=۰$ دو ریشه حقیقیِ معکوس هم دارد؟

۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

اگر معادله درجه دوم، دو ریشه حقیقی معکوس داشته باشد حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با یک است. بنابراین:

$$\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{m^۲-۲m}{m-۲}=۱\Rightarrow\frac{m(m-۲)}{m-۲}=۱\xrightarrow{m-۲\neq۰}m=۱$$

۱۸) اگر α یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^۲+۶x-۳=۰$ باشد، آن‌گاه حاصل $\alpha-\frac{۳}{۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۳
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین $\beta=-\frac{۳}{۲\alpha}$ است:

$$\alpha-\frac{۳}{۲\alpha}=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{۶}{۲}=-۳$$

۱۹) در معادله $۱۶x^۲ - mx + ۲۷ = ۰$ دو برابر یک ریشه، جذر ریشه دیگر است. m کدام است؟

۱) ۴۸   ۲) ۳۸   ۳) ۲۵   ۴) ۳۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

اگر ریشه‌های معادله α و β باشند:

$$\begin{cases} ۲\alpha = \sqrt{\beta} \\ \alpha\beta = \frac{۲۷}{۱۶} \end{cases} \Rightarrow ۲\alpha\beta = \sqrt{\beta} \times \beta \Rightarrow ۲(\frac{۲۷}{۱۶}) = \sqrt{\beta} \times \beta$$

$$\Rightarrow \frac{۲۷}{۸} = \sqrt{\beta} \times \beta \Rightarrow \beta = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \alpha = \frac{۳}{۴}$$

$$\alpha + \beta = \frac{m}{۱۶} \Rightarrow \frac{۳}{۴} + \frac{۹}{۴} = \frac{m}{۱۶} \Rightarrow m = ۴۸$$

۲۰) اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^۲ - ۵x - ۶ = ۰$ باشند، آن‌گاه به ازای چه مقداری از k ریشه‌های معادله $۳x^۲ + kx + m = ۰$ به صورت $\{\alpha^۳\beta \ , \ \beta^۳\alpha\}$ است؟

۱) $-\frac{۱۴۷}{۴}$ ۲) $\frac{۴۴۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۴۷}{۴}$ ۴) $\frac{-۴۴۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به معادله $۲x^۲ - ۵x - ۶ = ۰$ می‌توان گفت که:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۵}{۲} \quad , \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۳$$

مجموع ریشه‌های معادله $۳x^۲ + kx + m = ۰$ برابر $-\frac{k}{۳} = -\frac{b}{a}$ است. از طرفی اگر ریشه‌های این معادله را $\beta^۳\alpha$ و $\alpha^۳\beta$ فرض کنیم، داریم:

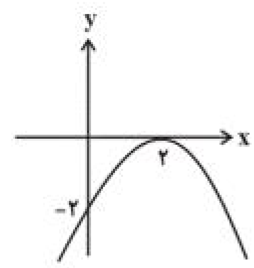
$$\text{مجموع ریشه‌ها} : \alpha^۳\beta + \beta^۳\alpha = \alpha\beta(\alpha^۲ + \beta^۲)$$

$$= \alpha\beta((\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta) = -۳((\frac{۵}{۲})^۲ - ۲(-۳))$$

$$= -۳(\frac{۲۵}{۴} + ۶) = -۳(\frac{۲۵+۲۴}{۴}) = -\frac{۱۴۷}{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{۳} = -\frac{۱۴۷}{۴} \Rightarrow k = \frac{۴۴۱}{۴}$$

۲۱) اگر نمودار تابع $y = ax^{۲} + (c - a)x - b - c$ به صورت زیر باشد، مقدار $b - a - c$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

محل تقاطع سهمی با محورyها برابر با ۲- است. پس:

$$-b - c = -۲ \Rightarrow b + c = ۲ \qquad (۱)$$

$$x_{راس} = ۲ \Rightarrow -\frac{c-a}{۲a} = ۲ \Rightarrow c - a = -۴a \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow c = -۳a \qquad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,،\,(۲)\,،\,(۳)} y = ax^{۲} - ۴ax - ۲$$

$$\xrightarrow{(۲,\,۰)\in \text{سهمی}} ۰ = ۴a - ۸a - ۲ \Rightarrow -۴a = ۲$$

$$\Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۳)} c = \frac{۳}{۲} \\ \xrightarrow{(۱)} b = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a - c = \frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}) - \frac{۳}{۲} = ۱ - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۲۲ ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^۲ + ax + b = ۰$، قرینه و معکوس ریشه‌های معادله $x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ هستند. حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳-
۳) ۱- ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

اگر ریشه‌های معادله $x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ را α و β فرض کنیم، ریشه‌های معادله $۲x^۲ + ax + b = ۰$ برابر $-\frac{۱}{\alpha}$ و $-\frac{۱}{\beta}$ می‌باشد؛

$$x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۲ \\ P = \alpha\beta = -۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} S' = -\frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} = -(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}) = -(\frac{۲}{-۲}) = ۱ \\ P' = (-\frac{۱}{\alpha})(-\frac{۱}{\beta}) = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۱}{-۲} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - x - \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow a + b = -۲ - ۱ = -۳$$

۲۳ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + bx + c = ۰$ دو جواب دارد که اختلاف آن‌ها ۳ است. کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = ۲x^۲ + bx + c$ کدام است؟

۱) ۲/۵- ۲) ۳/۵-
۳) ۴/۵- ۴) ۷/۵-

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

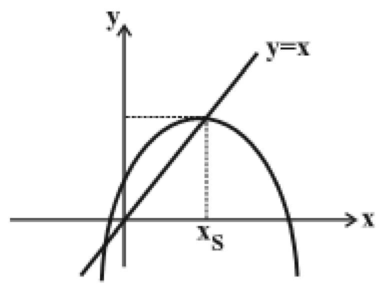
اختلاف دو ریشه $|x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است که در این معادله می‌شود $\frac{\sqrt{\Delta}}{۲}$. پس داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{۲} = ۳ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = ۶ \quad \Rightarrow \quad \Delta = ۳۶$$

حالا عرض نقطهٔ مینیمم تابع برابر است با:

$$y_s = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۳۶}{۴\times۲} = -۴/۵$$

۲۴) سهمی $y = -x^{۲} + ax + \frac{۱}{۴}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار x_S کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

داریم: $x_S = \frac{a}{۲}$. از روی شکل مشخص است که رأس سهمی روی خط $y = x$ قرار دارد؛ یعنی $y_S = x_S$ است.

$$y_S = -\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} + a\left(\frac{a}{۲}\right) + \frac{۱}{۴} = \frac{a^{۲}}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{x_S = \frac{a}{۲}} y_S = x_S^{۲} + \frac{۱}{۴} \xrightarrow{y_S = x_S} x_S^{۲} + \frac{۱}{۴} = x_S$$

$$\Rightarrow ۴x_S^{۲} - ۴x_S + ۱ = ۰ \Rightarrow x_S = \frac{۱}{۲}$$

۲۵) اگر α یک جواب معادله $x^{۲} + ۴x - ۳ = ۰$ باشد، حاصل $P = (\alpha + ۱)(\alpha + ۴)(\alpha - ۳)$ کدام است؟

۱) -۱۸
۲) -۱۵
۳) -۱۶
۴) -۱۲

پاسخ: گزینه ۱

α جواب معادله است، یعنی در معادله صدق می‌کند.

$$\Rightarrow \alpha^{۲} + ۴\alpha - ۳ = ۰ \Rightarrow \alpha(\alpha + ۴) = ۳ \Rightarrow \alpha + ۴ = \frac{۳}{\alpha}$$

حال با جای‌گذاری در عبارت P داریم:

$$P = \frac{۳}{\alpha}(\alpha + ۱)(\alpha - ۳) = \frac{۳}{\alpha}(\alpha^{۲} - ۲\alpha - ۳)$$

از طرفی $\alpha^{۲} - ۳$ نیز برابر -۴α است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P = \frac{۳}{\alpha}(-۴\alpha - ۲\alpha) = \left(\frac{۳}{\alpha}\right)(-۶\alpha) = -۱۸$$