۱) کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sqrt{|x|(x^۲ - ۱)}$ در نقطهٔ $x = ۰$ درست است؟

۱) حد راست دارد- حد چپ ندارد.
۲) حد راست ندارد- حد چپ دارد.
۳) حد راست دارد- حد چپ دارد.
۴) حد راست ندارد- حد چپ ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با توجه به جدول تعیین علامت، x نه از سمت راست و نه از سمت چپ نمی‌تواند به صفر نزدیک شود، چون در هر دو صورت زیر رادیکال، منفی می‌شود.

x		−1		۰		1	
$\|x\|$	+		+	۰	+		+
x^2-1	+	۰	−		−	۰	+
$\|x\|(x^2-1)$	+	۰	−	۰	−	۰	+

۲) حاصل $\lim_{x\to ۳^+} [\frac{۶x+۲}{۲x-۱}]$ کدام است؟ ([ ]: نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$\frac{۶x+۲}{۲x-۱} = \frac{۳(۲x-۱)+۵}{۲x-۱} = ۳ + \frac{۵}{۲x-۱}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} [\frac{۶x+۲}{۲x-۱}] = \lim_{x\to ۳^+} [۳ + \frac{۵}{۲x-۱}] = [۳ + ۱^-]$$
$$= [۴^-] = ۳$$

۳) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x|x-1|}{2x^2-5x+3} & ,x<1\\ 3x+a & ,x=1\\ \frac{\sqrt{x^2+3}+2a}{[x]} & ,x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوستگی چپ داشته باشد، آنگاه حد راست در $x=1$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۲-   ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

برای پیوستگی چپ تابع در $x=1$، باید حد چپ و مقدار تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x|x-1|}{2x^2-5x+3}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x(x-1)}{(2x-3)(x-1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$f(1)=3(1)+a=3+a$$

$$\Rightarrow 3+a=1\to a=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}+2(-2)}{[x]}=\frac{-2}{1}=-2$$

۴) اگر $f(x)=[x]+x$، $g(x)=\begin{cases}x^2-x & x\ge 2\\ ax+1 & x<2\end{cases}$ و تابع $f+g$ در $x=2$ حد داشته باشد، a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2^+}(f+g)(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)+\lim_{x\to 2^+}g(x)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}([x]+x)+\lim_{x\to 2^+}(x^2-x)=(2+2)+(4-2)=6$$

$$\lim_{x\to 2^-}(f+g)(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)+\lim_{x\to 2^-}g(x)$$

$$=\lim_{x\to 2^-}([x]+x)+\lim_{x\to 2^-}(ax+1)=(1+2)+2a+1=2a+4$$

$$\lim_{x\to 2^+}(f+g)(x)=\lim_{x\to 2^-}(f+g)(x)\Rightarrow 6=2a+4\Rightarrow a=1$$

۵) حاصل $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x}{x^2-[\sin\frac{\pi x}{2}]}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

سینوس هر زاویه همواره کوچکتر مساوی ۱ است، در نتیجه:

$$x\to 1^+\Rightarrow \sin\frac{\pi x}{2}\to 1^-\Rightarrow [\sin(\frac{\pi}{2})^+]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x}{x^2-[\sin\frac{\pi x}{2}]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x+1)}{x^2-0}=\frac{1\times 2}{1}=2$$

۶) حاصل $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{[2x+3|x|]}{[-\frac{1}{x}]}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$x \to (-1)^+ \Rightarrow [2x+3|x|]$$
$$= [2x-3x] = [-x]$$

حال با توجه به $x \to (-1)^+$، می‌بینیم که عبارات داخل جزء صحیح به چه عددی نزدیک می‌شوند:

$$x \to (-1)^+ : \begin{cases} x > -1 \xrightarrow{\times(-1)} -x < +1 \Rightarrow [-x] = 0 \\ x > -1 \to \frac{1}{x} < -1 \xrightarrow{\times(-1)} -\frac{1}{x} > 1 = [-\frac{1}{x}] = 1 \end{cases}$$

بنابراین : $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{[-x]}{[-\frac{1}{x}]} = \frac{0}{1} = 0$

۷) اگر $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4x} = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

وقتی مخرج به ازای $x = 4$ صفر می‌شود حتماً صورت کسر نیز به‌ازای $x = 4$ برابر صفر بوده که بعد از رفع ابهام، جواب حد یک عدد شده است. (حتماً صورت کسر عامل $(x-4)$ را داشته)

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+m)}{x^2-4x}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+m)}{x(x-4)} = \frac{4+m}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow m = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-4)(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 5x + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

۸) حاصل $\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2+2x-15}$، کدام است؟

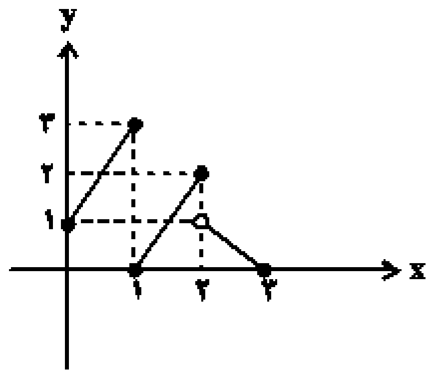
۱) $-\frac{1}{13}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{13}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2+2x-15} = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2+2x-15}$$
$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{(x-3)(x+5)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+5)} = \frac{-1}{8}$$

۹) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to 0}[f(2-x^2)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) صفر
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

در همسایگی $x = 0$، مقدار تابع $y = 2 - x^2$ کمتر از ۲ است و داریم:

$$\lim_{x\to 0}[f(2-x^2)] = \lim_{x\to 2^-}[f(x)]$$

حال از روی نمودار واضح است که مقدار تابع f در همسایگی چپ $x = 2$، کمتر از مقدار ۲ است و در نتیجه $[f(x)] = 1$ است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}[f(2-x^2)] = 1$$

۱۰) حد تابع $f(x) = \frac{[|x|]}{x}$ وقتی $x \to 0$ برابر است با:

۱) ۱
۲) -۱
۳) صفر
۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

دقت کنید که: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{[0^+]}{x} = \frac{0}{0^+} = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{[0^+]}{x} = \frac{0}{0^-} = 0$$

پس این حد وجود دارد و برابر صفر است.

۱۱) اگر $\lim_{x\to ۱} \frac{۱-x^۲}{x^۳+ax^۲+bx+c} = -\infty$ باشد، حاصل abc کدام است؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) -۶
۴) -۹

پاسخ: گزینه ۲

توجه کنید که صورت کسر داده شده، یعنی $-(x-۱)(x+۱)$، یک عامل $x-۱$ دارد. بنابراین مخرج کسر حداقل باید دو عامل $x-۱$ داشته باشد تا کسر در $x=۱$ دارای حد نامتناهی باشد. اما چون حد چپ و حد راست کسر در $x=۱$ هر دو $-\infty$ هستند، مخرج کسر باید سه عامل $x-۱$ داشته باشد. یعنی باید به‌صورت زیر باشد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱-x^۲}{x^۳+ax^۲+bx+c} = \lim_{x\to ۱} \frac{-(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)^۳}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{-(x+۱)}{(x-۱)^۲} = -\infty$$

بنابراین چندجمله‌ای مخرج کسر باید به‌صورت $x^۳-۳x^۲+۳x-۱$ باشد، که نتیجه می‌شود:

$$a=-۳\,,\ b=۳\,,\ c=-۱ \Rightarrow abc=۹$$

۱۲) حاصل حد راست تابع $f(x)=\frac{[۲-x]}{\sqrt{x+۶}-x}$ در نقطه $x=۳$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) -۱
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{[۲-x]}{\sqrt{x+۶}-x} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲}{\sqrt{x+۶}-x} \times \frac{\sqrt{x+۶}+x}{\sqrt{x+۶}+x}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲(\sqrt{x+۶}+x)}{x+۶-x^۲} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲(۶)}{-(x^۲-x-۶)}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱۲}{(x-۳)(x+۲)} = \frac{۱۲}{(۰^+)(۵)} = \frac{۱۲}{۰^+} = +\infty$$

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه ۳، تابع $y=[۲-x]$ برخط $y=-۲$ منطبق است:

$$۳<x<۴ \Rightarrow -۴<-x<-۳ \Rightarrow -۲<۲-x<-۱ \Rightarrow [۲-x]=-۲$$

(۱۳) حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} \frac{\tan^۲ x-۱}{\sqrt{۱-\sin^۲ ۲x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\tan^۲ x - ۱ = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - ۱ = \frac{\sin^۲ x-\cos^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}{\cos^۲ x}$$

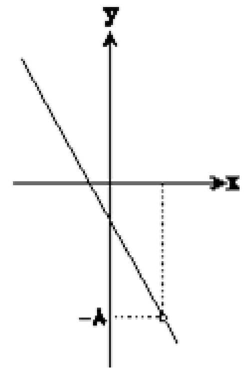
$$= \frac{-\cos ۲x}{\cos^۲ x}$$

$$\sqrt{۱-\sin^۲ ۲x} = \sqrt{\cos^۲ ۲x} = |\cos ۲x|$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} \frac{\tan^۲ x-۱}{\sqrt{۱-\sin^۲ ۲x}} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} \frac{-\frac{\cos ۲x}{\cos^۲ x}}{|\cos ۲x|} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} \frac{-\frac{\cos ۲x}{\cos^۲ x}}{-\cos ۲x}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = ۲$$

۱۴) اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{-۳x^۲+ax+b}{x-۲}$ مطابق شکل مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

طول نقطه توخالی تابع برابر ۲ است (ریشه مخرج) و تابع در نقطه $x = ۲$ دارای حد است. پس:

$$-۳x^۲ + ax + b = (x-۲)(Ax+B) = Ax^۲ + (B-۲A)x - ۲B$$

$$\Rightarrow A = -۳ \, (*)$$

از طرفی:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{-۳x^۲+ax+b}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(Ax+B)}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to ۲} Ax+B = ۲A+B = -۸ \xrightarrow{(*)} B = -۲$$

پس:

$$-۳x^۲ + ax + b = (x-۲)(-۳x-۲) = -۳x^۲ + ۴x + ۴ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b = ۸$$

۱۵) اگر $\lim_{x\to k^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = +\infty$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) فقط ۳ **۲)** فقط ۴- **۳)** ۳ یا ۴- **۴)** وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

چون حاصل حد نامتناهی شده است، پس k می‌تواند یکی از ریشه‌های مخرج باشد. پس: $x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۳, -۴$

در هر دو حالت حد را حساب می‌کنیم:

$$۱)\ k = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱-x}{(x-۳)(x+۴)} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$$

$$۲)\ k = -۴ \Rightarrow \lim_{x\to (-۴)^+} \frac{۱-x}{x^۲+x-۱۲} = \lim_{x\to (-۴)^+} \frac{۱-x}{(x-۳)(x+۴)}$$

$$= \frac{۵}{۰^-} = -\infty$$ پس برای k مقداری وجود ندارد.

۱۶) حدّ عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x \to ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۱}{۶}$
۴) $-\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه۴

با جای‌گذاری $x = ۲$ در عبارت داده شده، به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶} \times \frac{۲^۲+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}{۲^۲+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x^۲-۱۸x+۱۶)(۴+۴+۴)} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۳(x-۲)}{(x-۲)(۵x-۸)(۱۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-۳}{(۵x-۸)(۱۲)} = \frac{-۳}{(۲)(۱۲)} = -\frac{۱}{۸}$$

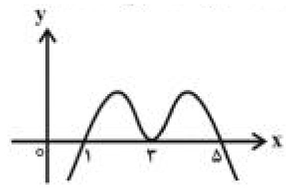
روش دوم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶} \xrightarrow{hop} \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{-۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}$$

$$= \frac{\frac{-۱}{\sqrt[۳]{۶۴}}}{۲۰-۱۸} = \frac{-\frac{۱}{۴}}{۲} = -\frac{۱}{۸}$$

یادآوری: در محاسبهٔ حد عبارات کسری که به صورت $\frac{۰}{۰}$ در می‌آیند، طبق قضیهٔ هوپیتال (hop) می‌توانیم از صورت و مخرج جداگانه مشتق گرفته و دوباره حاصل حد را حساب کنیم.

۱۷) نمودار تابع f به صورت شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x\to ۵} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)}$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)



۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) ۱
۴) -۱

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x = ۵$ به‌دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۵^+} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۵^-} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)} = \frac{+۱}{۰^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۵} \frac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)} = +\infty$$

۱۸) حاصل $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-[x+1]}{2x-\sqrt{x}-1}$ برابر کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-[x+1]}{2x-\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-[2^-]}{2x-\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{2x-\sqrt{x}-1} : \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2\times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

۱۹) اگر $f(x) = \frac{3x^2-\sqrt{16x^4+x^2+1}}{ax^2+bx-3}$ باشد و داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $-\frac{28}{3}$
۳) $\frac{28}{3}$
۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

چون $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ پس $x = 2$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$\begin{cases} (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \xrightarrow{\times(-3)} -3x^2 + 12x - 12 \\ ax^2 + bx - 3 \xrightarrow{\times 4} 4ax^2 + 4bx - 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{4}, b = 3$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-\sqrt{16x^4+x^2+1}}{-\frac{3}{4}x^2+3x-3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-4x^2}{-\frac{3}{4}x^2}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2}{-\frac{3}{4}x^2} = \frac{4}{3}$$

۲۰) حاصل حد تابع $f(x) = \frac{1}{3^{\tan x}-1}$ هنگامی‌که $x \to (\frac{\pi}{2})^-$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $+\infty$
۳) -۱
۴) صفر

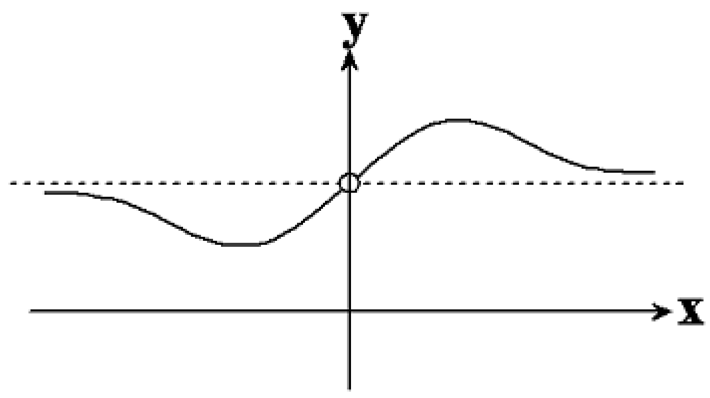
پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan x = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{3^{\tan x}-1} = \frac{1}{3^{+\infty}-1} = \frac{1}{+\infty-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

۲۱) اگر نمودار زیر متعلق به تابع $f(x)=\frac{۲x^۳+x^۲+ax+b}{x^۳+x}$ باشد، a-b کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

تابع در x=۰ دارای حد است:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۳+x^۲+ax+b}{x^۳+x}=\frac{b}{۰}\Rightarrow b=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲x^۳+x^۲+ax}{x^۳+x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۳+x^۲+ax}{x^۳+x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۳}{x^۳}=۲$$

با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۳+x^۲+ax}{x^۳+x}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۲x^۲+x+a)}{x(x^۲+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲+x+a}{x^۲+۱}$$

$$=\frac{a}{۱}\Rightarrow a=۲\Rightarrow a-b=۲-۰=۲$$

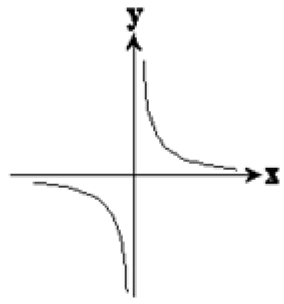
۲۲) اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3[\frac{1}{x}]+6x^2-1}{4x^2-(1+n)x^m+5} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل کدام است؟ (، نماد جزء صحیح است.)

۱) -1
۲) 1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



با توجه به نمودار مشخص است که:

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow [\frac{1}{x}] = -1$$

حال حد عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3[\frac{1}{x}]+6x^2-1}{4x^2-(1+n)x^m+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+6x^2-1}{4x^2-(1+n)x^m+5} = \frac{3}{2}$$

از طرفی با توجه به این‌که حاصل حد فوق برابر یک عدد حقیقی شده است، می‌توان نتیجه گرفت که درجه بزرگ‌ترین جمله عبارت صورت و مخرج با هم برابرند.

لذا $m = 3$ بوده و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+6x^2-1}{-(1+n)x^3+4x^2+5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{-(1+n)x^3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+n)} = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{3} \Rightarrow mn = 1$$

۲۳) اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^n+3x^2+a}{ax^m-1} = 1$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ $(m,n \in W)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

از آنجا که حاصل حد در بی‌نهایت موجود است، درجه چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج باید برابر باشند. بنابراین در حالت‌های زیر مسئله را بررسی می‌کنیم:

i) $n < 2\,,\ \ m = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n+3x^2+a}{ax^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{ax^2} = \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$$

ii) $n = m = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n+3x^2+a}{ax^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{ax^2} = \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$$

iii) $n = m > 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n+3x^2+a}{ax^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

درنتیجه مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با ۸.

۲۴) اگر $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{a(x-1)^3+6x(x^2+x)}{(2x-1)^2} = b$ باشد، مقدار b کدام است؟ $(b \in R)$

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۸- ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{a(x-1)^3+6x(x^2+x)}{(2x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{ax^3-3ax^2+3ax-a+6x^3+6x^2}{4x^2-4x+1}$$

$$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{(a+6)x^3+(-3a+6)x^2+3ax-a}{4x^2-4x+1} = b$$

برای اینکه حاصل حد مقدار حقیقی b باشد، لازم است عبارت‌های صورت و مخرج هم درجه باشند، پس باید ضریب x^3، صفر باشد:

$$a + 6 = 0 \Rightarrow a = -6$$

با جای‌گذاری $a = -6$، داریم:

$$b = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{24x^2-18x+6}{4x^2-4x+1} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{24x^2}{4x^2} = \frac{24}{4} = 6$$

۲۵ در تابع $f(x) = \frac{[x+2]+k}{x-2}$، اگر $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ باشد، محدوده k کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-4 < k < -3$

۲) $-3 < k < -2$

۳) $k > -3$ یا $k < -4$

۴) $k > -2$ یا $k < -3$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

برای آن‌که $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ باشد، باید حد چپ و راست f، وقتی $x \to 2$ هر دو برابر با $+\infty$ باشند، پس:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{[x+2]+k}{x-2} = \frac{[4^+]+k}{2^+-2}$$

$$= \frac{4+k}{0^+} = +\infty \xrightarrow[\text{مثبت باشد.}]{\text{باید صورت کسر}} k+4>0 \Rightarrow k>-4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{[x+2]+k}{x-2} = \frac{[4^-]+k}{2^--2}$$

$$= \frac{3+k}{0^-} = +\infty \xrightarrow[\text{منفی باشد.}]{\text{باید صورت کسر}} 3+k<0 \Rightarrow k<-3$$

از اشتراک دو شرط بالا، داریم: $-4 < k < -3$.