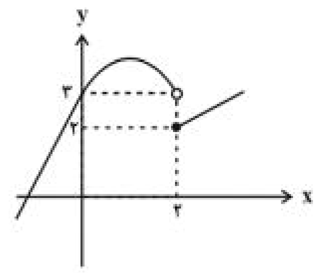
مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ حدوپیوستگی**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

① نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است و تابع $g(x)=\frac{x^{۲}+mf(x)}{m[x]+f(x)}$ در $x=۲$ حد دارد. مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) صفر
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با توجه به نمودار تابع f واضح است که:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳ , \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲$$

حال تابع g در $x=۲$ هنگامی حد دارد که حدهای چپ و راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x^{۲}+mf(x)}{m[x]+f(x)}=\dfrac{۴+۳m}{m+۳}\\ \lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^{۲}+mf(x)}{m[x]+f(x)}=\dfrac{۴+۲m}{۲m+۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری حدود چپ و راست}} \frac{۳m+۴}{m+۳}=\frac{m+۲}{m+۱}$$

$$\Rightarrow ۳m^{۲}+۷m+۴=m^{۲}+۵m+۶$$

$$\Rightarrow ۲m^{۲}+۲m-۲=۰ \Rightarrow m^{۲}+m-۱=۰$$

معادله فوق ۲ جواب دارد که مجموع آن ها ۱- است.

۲) اگر تابع $f(x) = [۴x] + ۲a[-x]$ در $x=۲$ حد داشته باشد، آن‌گاه مقدار این حد کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۵ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

باید حد چپ و راست در $x=۲$ برابر باشند:

$$\lim_{x\to ۲^+} ([۴x] + ۲a[-x]) = [۸^+] + ۲a[\underbrace{(-۲)^-}_{-۳}] = ۸ - ۶a$$

$$\lim_{x\to ۲^-} ([۴x] + ۲a[-x]) = [۸^-] + ۲a[\underbrace{(-۲)^+}_{-۲}] = ۷ - ۴a$$

$$\Rightarrow ۸ - ۶a = ۷ - ۴a \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} ([۴x] + [-x]) = ۵ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} ([۴x] + [-x]) = ۵ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲} ([۴x] + [-x]) = ۵$$

نکته: قرینه ۲^+، $(-۲)^-$ است و قرینه ۲^-، $(-۲)^+$ است.

۳) اگر تابع $f(x) = a[\frac{۲}{x}] - [-۳x] - ۱$ در $x = ۲$ دارای حد باشد، مقدار a چقدر است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$x \to ۲^+ \Rightarrow ۰ < \frac{۲}{x} < ۱ \Rightarrow \frac{۲}{x} \to ۱^-$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x) = a[۱^-] - [(-۶)^-] - ۱ = ۰ - (-۷) - ۱ = ۶$$

$$x \to ۲^- \Rightarrow ۱ < \frac{۲}{x} < ۲ \Rightarrow \frac{۲}{x} \to ۱^+$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f(x) = a[۱^+] - [(-۶)^+] - ۱ = a + ۶ - ۱ = a + ۵$$

شرط حد داشتن در $x = ۲$ برابری حد چپ و راست است. بنابراین:

$$a + ۵ = ۶ \Rightarrow a = ۱$$

۴) حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - \sqrt{\cos ۲x}}{۱-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - \sqrt{\cos ۲x}}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - \sqrt{\cos ۲x}}{۱-\cos x} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos ۲x}}{\cos x + \sqrt{\cos ۲x}}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos^۲ x - \cos ۲x}{۲(۱-\cos x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cos^۲ x - (۲\cos^۲ x - ۱)}{۲(۱-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos^۲ x}{۲(۱-\cos x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۲(۱-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۱+\cos x}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۵) اگر $f(x) = a|x^۲ - ۱|\,[۲x] + b$ و $\lim_{x\to ۱^-} \frac{f(x)-۴}{x-۱} = ۶$ حاصل ab چقدر است؟([ ]: جزء صحیح)

۱) -۱۸
۲) ۱۸
۳) -۱۲
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

از رابطهٔ $\lim_{x\to ۱^-} \frac{f(x)-۴}{x-۱} = ۶$ نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۴$ و $f'_-(۱) = ۶$.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۴ \Rightarrow b = ۴$$

$$f'_-(۱) = (a(۱ - x^۲)[۲^-] + b)'$$

$$= -۲a(۱) = -۲a = ۶ \Rightarrow a = -۳$$

درنتیجه: $ab = (-۳)\times(۴) = -۱۲$

۶) اگر $\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{ax+۱}-۳}{۴-x^۲} = b$ باشد، مقدار $a - ۱۸b$ کدام است؟ $(b \in R)$

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۷

پاسخ: گزینه ۴

چون حد مخرج کسر وقتی $x \to ۲$ برابر صفر است، حد صورت کسر هم باید صفر باشد (تا حاصل حد متناهی باشد):

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲}(\sqrt{ax+۱} - ۳) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲a+۱} - ۳ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

$$\Rightarrow b = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{۴x+۱}-۳}{۴-x^۲} \times \frac{\sqrt{۴x+۱}+۳}{\underbrace{\sqrt{۴x+۱}+۳}_{۶}}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۴x+۱-۹}{-۶(x^۲-۴)} = \lim_{x\to ۲} \frac{۴(x-۲)}{-۶(x-۲)(x+۲)} = -\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow a - ۱۸b = ۴ - ۱۸\left(-\frac{۱}{۶}\right) = ۴ + ۳ = ۷$$

۷) اگر $f(x) = \begin{cases} -x^۲ + ۳x \ , & |x| < ۱ \\ x \ , & |x| \geq ۱ \end{cases}$، آنگاه حاصل $\lim_{x\to (-۱)^-} f(x) + \lim_{x\to ۱^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$f(X) = \begin{cases} -X^۲ + ۳X & |X| < ۱ \\ X & |X| \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} -X^۲ + ۳X & -۱ < X < ۱ \\ X & X \leq -۱ \text{ یا } X \geq ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-۱)^- < -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = -۱ \\ -۱ < ۱^- < ۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -(۱)^۲ + ۳(۱) = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) + \lim_{x\to ۱^-} f(x) = -۱ + ۲ = ۱$$

۸ تابع $f(x)=\begin{cases} a|x|+۲ & , \quad x<۱ \\ ۳ & , \quad x=۱ \\ b[-x]-a+۱ & , \quad x>۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است. حاصل $f(a)+f(b)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۷}{۲}$

۴) $\frac{۱۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

شرط پیوستگی تابع f در $x=۱$ آن است که در این نقطه حد داشته باشد و مقدار این حد با مقدار $f(۱)$ برابر باشد.

$$\left.\begin{array}{l} f(۱)=۳ \\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-} a|x|+۲=a+۲ \\ \lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+} -۲b-a+۱ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a+۲=۳ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow -۲b-۱+۱=۳ \Rightarrow b=-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow f(a)+f(b)\xrightarrow[b=-\frac{۳}{۲}]{a=۱} f(۱)+f(-\frac{۳}{۲})$$

$$=۳+\frac{۷}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$$

۹ اگر $f(x)=|x|$، $g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x^۲+۱} & x\in Z \\ \frac{x}{f(x)} & x\notin Z \end{cases}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to ۰} g(x)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۱-

۴) حد وجود ندارد.

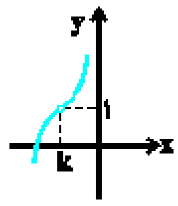
پاسخ: گزینه ۴

در تابع g، دامنه تابع به‌صورت اعداد صحیح و غیرصحیح تفکیک شده است. برای محاسبه‌ی حد تابع g در تمام نقاط باید از ضابطه‌ی پائین $(x\notin Z)$ استفاده کنیم. زیرا مثلاً برای نقطه‌ی $x=۱$ زمانی‌که عبارت $x\to۱$ مطرح می‌شود به معنای نزدیک شدن به نقطه ۱ است و هیچ‌گاه در عمل به نقطه‌ی ۱ نخواهیم رسید، بنابراین $x\to۱$ به معنای اعداد غیرصحیح است. در نقطه‌ی $x=۰$ هم وضع به همین صورت است، پس:

$$\lim_{x\to۰} g(x)=\lim_{x\to۰}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to۰}\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x}{x}=۱ \\ \lim\limits_{x\to۰^-}\frac{x}{-x}=-۱\end{cases}$$

حد تابع در نقطه‌ی $x=۰$ به ۲ عدد نابرابر رسید که به معنای عدم وجود حد تابع در این نقطه است.

۱۰) اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x\to k^-} \frac{x}{۱-f(x)}$ کدام است؟



۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) صفر
۴) $-k$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به نمودار، $k < ۰$ است، از طرفی وقتی $x \to k^-$، $f(x) \to ۱^-$، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to k^-} \frac{x}{۱-f(x)} = \frac{k}{۰^+} = \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty$$

۱۱) تابع $f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - a$ بر $x + a$ بخش‌پذیر است. اگر $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^۲} = +\infty$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $a = ۰$
۲) $a = ۱$
۳) $a = -۱$
۴) $a \in \emptyset$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اولاً $f(x)$ بر $x + a$ بخش‌پذیر است. پس:

$$x + a = ۰ \Rightarrow x = -a \Rightarrow f(-a) = ۰ \Rightarrow -a^۳ + ۲a^۲ - a = ۰$$

$$\Rightarrow -a(a^۲ - ۲a + ۱) = ۰ \Rightarrow -a(a-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ a = ۱ \end{cases}$$

$$a = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{(x-۰)^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{x^۳+۲x^۲-۰}{x^۲} : \frac{۰}{۰}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{x^۲(x+۲)}{x^۲} = ۲ \quad \text{غقق}$$

$$a = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)}{(x-۱)^۲} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۳+۲x^۲-۱}{(x-۱)^۲} = \frac{۲}{۰^+} = +\infty \quad \text{قق}$$

۱۲) اگر $\lim_{x\to ۲} \frac{-x}{۳x^۲-ax+b} = -\infty$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{ax-۱۲}{x^۲+۱۱-b}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\lim_{x\to ۲} \frac{-x}{۳x^۲-ax+b} = -\infty \Rightarrow \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$$

با توجه به علامت صورت کسر و حاصل حد، مخرج در همسایگی ۲ باید به‌صورت ۰^+ باشد، پس مخرج به شکل $۳(x-۲)^۲$ است.

$$۳x^۲ - ax + b = ۳(x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ax + b = ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۲ \\ b = ۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{ax-۱۲}{x^۲+۱۱-b} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱۲x-۱۲}{x^۲+۱۱-۱۲} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱۲x-۱۲}{x^۲-۱}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱۲}{x+۱} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

۱۳) در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

۱) $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -\infty$ ۳) $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = -\infty$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

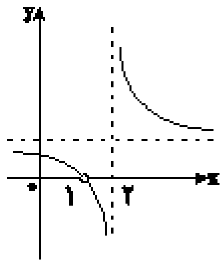
با توجه به ریشهٔ قدرمطلق $(x = ۰)$ ضابطهٔ تابع f را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۱}{۲x} & x > ۰ \\ \frac{x^۲-۱}{x-x} & x < ۰ \end{cases}$$

برای $x < ۰$ مخرج کسر صفر می شود. پس $x < ۰$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، پس $\lim_{x\to ۰^-} f(x)$ بی‌معنی است.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲-۱}{۲x} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

۱۴) اگر نمودار $y = \frac{x^{۲}+ax+۱}{x^{۲}+bx+c}$ به صورت مقابل باشد، مقدار $a+۲b+۳c$ کدام است؟



۱) صفر
۲) -۱
۳) -۲
۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

تابع در $x=۲$ مجانب قائم دارد، پس مخرج به ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود:

$$x^{۲}+bx+c=۰ \xrightarrow{x=۲} ۴+۲b+c=۰ \quad (*)$$

$x=۱$ در دامنه تابع قرار ندارد و در $x=۱$ حد تابع برابر صفر است لذا در $x=۱$ هم صورت و هم مخرج هر دو صفر بوده‌اند:

$$\begin{cases} ۱+a+۱=۰ \Rightarrow a=-۲ \\ ۱+b+c=۰ \Rightarrow b+c=-۱ (**) \end{cases}$$

با حل دستگاه شامل معادلات (*) و (**) مقادیرb وc بدست می‌آیند:

$$b=-۳\ ,\ \ c=۲ \Rightarrow a+۲b+۳c=-۲$$

۱۵) حاصل $\lim_{x\to ۱^-} \frac{x^{۲}-[x+۱]}{۲x-\sqrt{x}-۱}$برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{x^{۲}-[x+۱]}{۲x-\sqrt{x}-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^{۲}-[۲^-]}{۲x-\sqrt{x}-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^{۲}-۱}{۲x-\sqrt{x}-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}+۱)} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}+۱)}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{(۲\sqrt{x}+۱)} = \frac{۲\times ۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

۱۶) حد عبارت $\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$ وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) ۲　　۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۲

صورت و مخرج عبارت داده شده به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ صفر می‌شود، پس باید کسر رفع ابهام شود، یعنی صفرکننده‌های صورت و مخرج را با هم ساده کنیم. برای این کار باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج رادیکالی صورت ضرب کنیم:

$$\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} \times \frac{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}$$

$$= \frac{\tan x-\frac{1}{\tan x}}{\cos 2x(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos 2x(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})}$$

$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos 2x(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

با جای‌گذاری رابطه $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$، کسر بالا به صورت زیر ساده می‌شود: $\frac{-1}{(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$

حال حد خواسته شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}}+\sqrt{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}})(\cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4})} = \frac{-1}{(1+1)(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$= \frac{-1}{2\times\frac{1}{2}} = -1$$

۱۷) حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{x}{\sin x+1}$ وقتی $x \to -\frac{\pi}{2}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $+\infty, -\infty$　　۲) $-\infty, +\infty$

۳) $+\infty, +\infty$　　۴) $-\infty, -\infty$

پاسخ: گزینه ۴

در $x = -\frac{\pi}{2}$ مخرج صفر می‌شود و صورت یک عبارت منفی است. پس حاصل حد بینهایت است. توجه کنید که چون $-1 \le \sin x \le 1$ است، پس $0 \le \sin x + 1 \le 2$ می‌باشد، پس مخرج نمی‌تواند منفی باشد.

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{0^+} = -\infty$$

حاصل حد چپ و راست هر دو برابر $-\infty$ است.

۱۸) حاصل $\lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+|x|-2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\infty$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۴

توجه کنید که مخرج هریک از کسرها به‌ازای $x = -1$، صفر می‌شود و حاصل عبارت مورد نظر، ابهام دارد که باید آن را رفع ابهام کنیم.

وقتی $x \to (-1)^+$ داریم: $|x| = -x$

بنابراین حد به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x-2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x-2)^2+2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-4x+4+2x-2}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{5}{0^+} = +\infty$$

۱۹) حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+1}-3^{1-2n}}{2\times3^n+9^{n-1}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

در $+\infty$ حاصل 3^{1-2n} برابر $3^{-\infty} = 0$ است.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+1}-3^{1-2n}}{2\times3^n+9^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+1}-0}{2\times3^n+\frac{9^n}{9}}$$

در مخرج کسر از 9^n فاکتور می‌گیریم:

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3\times3^{2n}}{9^n\left(\frac{2}{3^n}+\frac{1}{9}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3\times9^n}{9^n\left(\frac{2}{3^n}+\frac{1}{9}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\frac{2}{3^n}+\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{3}{0+\frac{1}{9}} = 27$$

۲۰) اگر $f(x) = \frac{ax^۲+\sqrt{x^۴+۵x}}{-x^n-ax-۱}$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۱$ ، آن‌گاه حد راست و چپ تابع f در $x = ۱$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$
۲) $-\infty$ و $-\infty$
۳) $+\infty$ و $-\infty$
۴) $-\infty$ و $+\infty$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

باید درجه عبارت صورت و مخرج یکسان باشد تا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۱$ شود. بنابراین $n = ۲$ است. حال داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^۲+\sqrt{x^۴+۵x}}{-x^۲-ax-۱} = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^۲+x^۲}{-x^۲} = ۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(a+۱)/}{/} = ۱$$

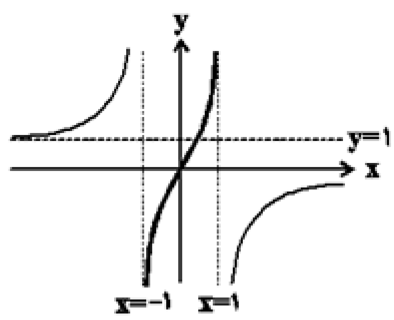
$$= a+۱ = -۱ \Rightarrow a = -۲$$

$$\lim_{x\to۱^+} \frac{-۲x^۲+\sqrt{x^۴+۵x}}{-(x-۱)^۲} = \frac{-۲+\sqrt{۶}}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to۱^-} \frac{-۲x^۲+\sqrt{x^۴+۵x}}{-(x-۱)^۲} = \frac{-۲+\sqrt{۶}}{۰^-} = -\infty$$

بنابراین حد راست و چپ تابع در $x = ۱$ برابر $-\infty$ است.

۲۱) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to۱^-} [(fof)(x)] \Leftarrow$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) -۲
۲) صفر
۳) ۱
۴) -۱

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار مشخص است که $\lim_{x\to۱^-} f(x) = +\infty$ است.

حال داریم: $\lim_{x\to۱^-} (fof)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

خط $y = ۰$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ است و مقادیر تابع f در $+\infty$ در بازه $(-۱,۰)$ قرار دارند. پس در $+\infty$ ، $[f(x)]$ با -۱ برابر است و داریم:

$$\lim_{x\to۱^-} [(fof)(x)] = \lim_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim_{x\to+\infty} -۱ = -۱$$

۲۲) اگر $f(x) = \frac{-1}{x}$ باشد، حاصل $[\lim_{x\to+\infty} f(x)] - \lim_{x\to+\infty} [f(x)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

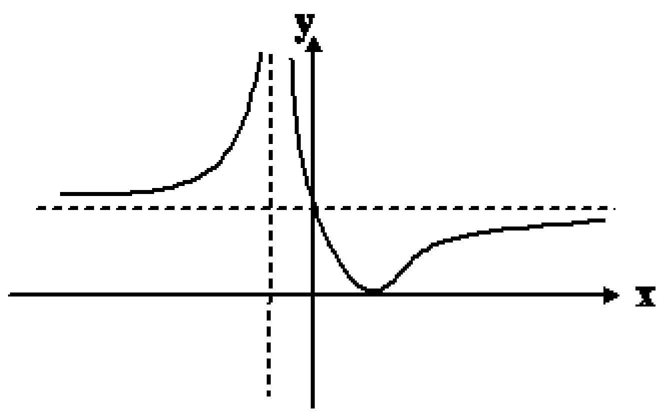
ابتدا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow [\lim_{x\to+\infty} f(x)] = [0] = 0$$

از طرف دیگر اگر $x > 1$ باشد، آن‌گاه:

$$0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow [f(x)] = \left[-\frac{1}{x}\right] = -1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x)] = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$
$$\Rightarrow \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] - \lim_{x\to+\infty} [f(x)] = 0 - (-1) = 1$$

۲۳) شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2-2x+a}{x^2+bx+1}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار تابع در همسایگی مجانب قائم آن، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Rightarrow \Delta_{\text{مخرج}} = b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرفی این مجانب قائم در سمت چپ محور yها قرار دارد، بنابراین $b = 2$ قابل قبول است. خط $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ مجانب افقی است و نمودار تابع مجانب افقی خود را در $x = 0$ قطع کرده است. بنابراین داریم:

$$f(0) = a = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

۲۴) اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^{۳}[\frac{۱}{x}]+۶x^{۲}-۱}{۴x^{۲}-(۱+n)x^{m}+۵} = \frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل mn کدام است؟

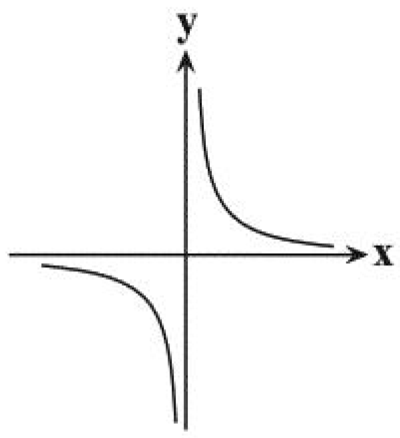
۱) ۱- **۲)** ۱ **۳)** $\frac{۱}{۲}$ **۴)** هر مقداری می‌تواند باشد.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم: $\lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} = ۰$

با توجه به نمودار مشخص است که:



$x \to -\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^{-} \Rightarrow [\frac{۱}{x}] = -۱$

حال حد عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^{۳}[\frac{۱}{x}]+۶x^{۲}-۱}{۴x^{۲}-(۱+n)x^{m}+۵} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x^{۳}+۶x^{۲}-۱}{۴x^{۲}-(۱+n)x^{m}+۵} = \frac{۳}{۲}$$

از طرفی با توجه به این‌که حاصل حد فوق برابر یک عدد حقیقی شده است، می‌توان نتیجه گرفت که درجه بزرگ‌ترین جمله عبارت صورت و مخرج با هم برابرند.

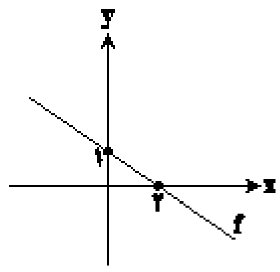
لذا $m = ۳$ بوده و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x^{۳}+۶x^{۲}-۱}{-(۱+n)x^{۳}+۴x^{۲}+۵} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x^{۳}}{-(۱+n)x^{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{(۱+n)} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow n = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین: $mn = ۱$

۲۵) نمودار تابع خطی f به شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲f(x)+۱}{f(۳x)-x}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا ضابطه f را می‌نویسیم. شیب خط f برابر $\frac{-۱}{۲} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ است. پس:

$$f(x) = \frac{-۱}{۲}x + ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲f(x)+۱}{f(۳x)-x} = \frac{۲(-\frac{۱}{۲}x+۱)+۱}{-\frac{۱}{۲}(۳x)+۱-x} = \frac{-x+۳}{-\frac{۵}{۲}x+۱}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x+۳}{\frac{-۵}{۲}x+۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{-\frac{۵}{۲}x} = \frac{۲}{۵}$$