مدت زمان آزمون: -

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون A۱ حدوپیوستگی**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

۱ اگر $f(x) = -x^۲ + ۴x + ۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} [f(x)]$ و $\left[\lim\limits_{x \to ۲} f(x)\right]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴، ۴ **۲)** ۴، ۵ **۳)** ۵، ۴ **۴)** ۵، ۵

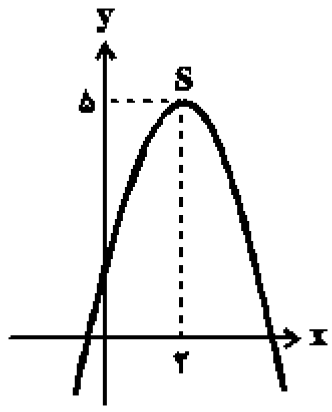
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مختصات رأس سهمی را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_S = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \\ y_S = f(۲) = -۴ + ۸ + ۱ = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow S(۲, ۵)$$

نمودار سهمی به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to ۲} [f(x)] = \lim\limits_{t \to ۵^-} [t] = ۴ \\ \left[\lim\limits_{x \to ۲} f(x)\right] = [۵] = ۵ \end{cases}$$

۲) به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x} & ; x > ۰ \\ a[x] + \sqrt{۲} & ; x < ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ حد دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

حد راست : $\lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x}$

$= \lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x} \times \dfrac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$

$= \lim_{x\to ۰^+} \dfrac{\sqrt{x^۲}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x\to ۰^+} \dfrac{|x|}{\sqrt{۲}x} = \lim_{x\to ۰^+} \dfrac{x}{\sqrt{۲}x} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

حد چپ : $\lim_{x\to ۰^-} a[x] + \sqrt{۲} = -a + \sqrt{۲}$

حد راست = حد چپ $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = -a + \sqrt{۲} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

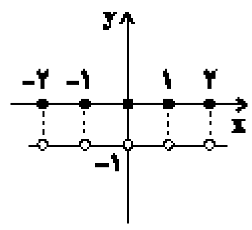
۳) تابع $f(x) = [x] - x$ مفروض است. حاصل $\lim_{x\to ۱} [f(x)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۳

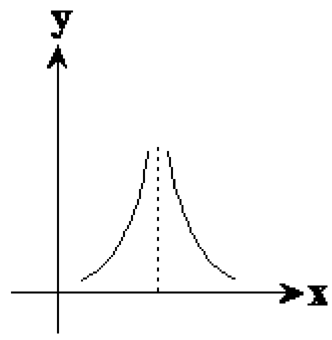
ابتدا تابع $y = [f(x)]$ را تشکیل می‌دهیم و ساده می‌کنیم:

$$y = [f(x)] = [\underbrace{[x]}_{\in Z} - x] = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & , \quad x \in Z \\ -۱ & , \quad x \notin Z \end{cases}$$



$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} [f(x)] = -۱$

۴) شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+a}{۴x^۲+bx+۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱) $(۰,۴)$ ۲) $(۰,-۴)$
۳) $(-۲,۴)$ ۴) $(-۲,-۴)$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار اولاً مخرج یک ریشه مضاعف مثبت دارد که با دقت به ضرایب می‌توان حدس زد $۴x^۲-۴x+۱$ است و یا به صورت زیر مقدار b را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^۲-۴(۴)(۱)=۰\Rightarrow b^۲=۱۶\Rightarrow\begin{cases}b=۴ & \text{غ ق ق}\\ b=-۴ & \text{ق ق}\end{cases}$$

چون جواب حد $(+\infty)$ شده، پس لازم است صورت کسر به‌ازای ریشه مخرج یعنی $x=\frac{۱}{۲}$ یک عدد مثبت باشد:

$$۲(\tfrac{۱}{۲})+a>۰\Rightarrow ۱+a>۰\Rightarrow a>-۱$$

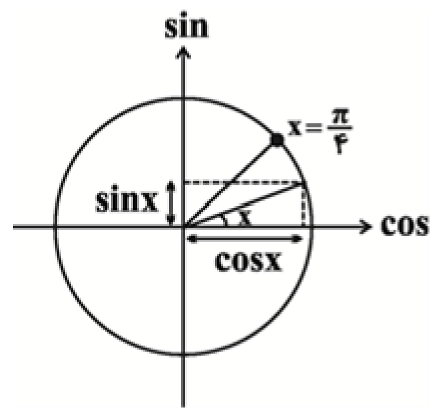
با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

۵) حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}=\frac{|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}|}{۱-۱}=\frac{۰}{۰}$$



به دایره مثلثاتی توجه کنید:

$$x=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \sin x=\cos x$$

$$۰<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \sin x<\cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}-\frac{(\sin x-\cos x)}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}-\frac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶) حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

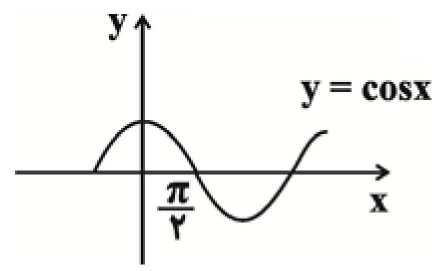
۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -۱ ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل وقتی $x \to \frac{\pi^+}{2}$ میل می‌کند، مقادیر تابع $y = \cos x$ از مقادیر کم‌تر از صفر به عدد صفر نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x+[0^-]}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x-1}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}$$



$$= \lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x-1}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{-1}{1+\sin x} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

۷) اگر تابع f در x = a حد نداشته باشد و تابع g در این نقطه حد داشته باشد، کدام تابع قطعاً در این نقطه حد <u>ندارد</u>؟

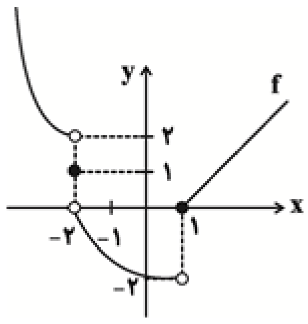
۱) $f \cdot g$ ۲) $f^2 g$ ۳) $\frac{g}{f}$ ۴) $\frac{f}{g}$

پاسخ: گزینه ۴

تابع $\frac{f}{g}$ قطعاً در $x = a$ حد ندارد. زیرا اگر این تابع در $x = a$ حد داشته باشد، با توجه به این‌که تابع g در این نقطه حد دارد، پس باید تابع $\frac{f}{g} \times g$ در این نقطه حد داشته باشد. یعنی f باید حد داشته باشد که خلاف فرض مساله است. سایر گزینه‌ها در حالتی که $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ باشد، می‌توانند در $x = a$ دارای حد باشند.

⑧ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، آن‌گاه به ازای کدام مقدار m، تابع $g(x) = \frac{۳-۲f(x)}{[۲x]+mf(x)}$، وقتی $x \to -۲$ حد دارد؟

([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) $\frac{۱۹}{۶}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

در نمودار تابع f، $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = ۲$ است.

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to(-۲)^+} g(x) &= \frac{۳+۰}{-۴+۰}\\ \lim_{x\to(-۲)^-} g(x) &= \frac{۳-۴}{-۵+۲m}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{با هم برابرند}} \frac{-۱}{۲m-۵} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲m-۵} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴ = ۶m - ۱۵ \Rightarrow ۶m = ۱۹ \Rightarrow m = \frac{۱۹}{۶}$$

۹) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a[1-2x] & x<2 \\ b & x=2 \\ \frac{x^2-4}{|x^2-5x+6|} & x>2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، حاصل $b - 3a$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۸۱. **اگر تابع** $f(x) = \begin{cases} a|1-2x| & x<2 \\ b & x=2 \\ \frac{x^2-4}{|x^2-5x+6|} & x>2 \end{cases}$ تابع اگر **پیوسته باشد، حاصل** $b-3a$ **کدام است؟ (**$[left[{} \right\$**)، نماد جزء صحیح است.)**

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای پیوسته بودن تابع f در $x = 2$، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} a[1-2\times 2^-] = \lim_{x\to 2^-} a[-3^+] = -3a$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \frac{x^2-4}{|(x-2)(x-3)|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{-(x-3)} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\Rightarrow -3a = b = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow b-3a=8$$

۱۰) تابع $f(x) = (x^2-16)\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]$ در بازه $(0,a)$، فقط در دو نقطه ناپیوسته است. حداکثر مقدار a کدام است؟ ([]، نماد جزءصحیح است.)

۱) ۱۶ ۲) ۱۰۰ ۳) ۶۴ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تابع $y = \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]$ در نقاط صحیح به فرم $x = 4k^2$ $(k \in Z)$، ناپیوسته است. یعنی در نقاط به طول ۴، ۱۶، ۳۶، ۶۴ و ... ناپیوسته است. اما از آنجا که تابع f، در $x = 4$ پیوسته است، طول نقاط ناپیوسته تابع به‌صورت زیر است:

$16, 36, 64, \dots$

برای اینکه در بازه $(0,a)$، دو نقطه ناپیوسته داشته باشد، حداکثر مقدار a باید برابر ۶۴ باشد.

(دقت کنید که:

$$x \to 4^+ : \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right] = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x^2-16) = 0$$

$$x \to 4^- : \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 0 = 0$$

پس f در $x = 4$ پیوسته است.)

۱۱) به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، تابع $f(x) = [mx^{2} + 2(m^{2} - 2)x]$ در $x = 1$ حد دارد ولی پیوسته نیست؟ ([ ]: علامت جزء صحیح است.)

۱) $\{1\}$ ۲) $\{-2\}$ ۳) $\{-2,1\}$ ۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر $g(x) = mx^{2} + 2(m^{2} - 2)x$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه تابع $f(x) = [g(x)]$ زمانی در نقطه $x = k$ حد دارد ولی پیوسته نیست که به‌ازای $x = k$، بیش‌ترین مقدار $g(x)$ در همسایگی‌اش باشد و البته $g(x) \in Z$؛ پس باید در این سؤال که داخل براکت یک عبارت درجه دوم قرار دارد، $k = 1$ رأس سهمی باشد:

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow -\frac{2(m^{2}-2)}{2m} = 1 \Rightarrow \frac{m^{2}-2}{m} = -1 \Rightarrow m^{2} + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

هر دو مقدار در شرط $g(1) \in Z$ صدق می‌کنند، اما $m = 1$ باعث می‌شود عبارت درجه دوم اصلاً بیش‌ترین مقدار نداشته باشد و نادرست است.

۱۲) تابع $f(x) = \cos x\,[\sin x] + a\,[\tan \frac{x}{4}]$ در نقطهٔ $x = \pi$ به‌ازای کدام مقدار a پیوسته است؟([ ]: جزء صحیح)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

شرط پیوستگی $f(x)$ در نقطهٔ $x = \pi$:

$$\lim_{x\to\pi^{+}} f(x) = \lim_{x\to\pi^{-}} f(x) = f(\pi)$$

شرط حد داشتن $f(x)$ در $x = \pi$:

$$\lim_{x\to\pi^{-}} f(x) = \lim_{x\to\pi^{+}} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to\pi^{-}} f(x) &= (-1) \times [0^{+}] + a[1^{-}] = 0 \\ \lim_{x\to\pi^{+}} f(x) &= (-1) \times [0^{-}] + a[1^{+}] = 1 + a \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 + a = 0$$

$$\Rightarrow a = -1$$

به‌ازای $a = -1$ تابع حد دارد اما هرگز نمی‌تواند پیوسته باشد.

$$f(\pi) = 0 + a = -1 \neq \lim_{x\to\pi} f(x)$$

۱۳) تابع $f(x)=[x^۲]$ در بازه $(-۱,k)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است. بیش‌ترین مقدار K کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم تابع $[x]$ (جزء صحیح) در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته و در نقاطی با طول غیرصحیح پیوسته است. لذا با توجه به بازه مطرح شده، کافیست شرط پیوستگی را برای تابع $[x^۲]$ در نقاطی‌که $x^۲$ صحیح می‌شود بررسی کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow x^۲=۰$$

تابع در این نقطه، پیوسته است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)=۰$$

$$x=۱ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x^۲\to ۱^+}[x^۲]=۱=f(۱) \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x^۲\to ۱^-}[x^۲]=۰ \end{cases}$$
$\Leftarrow$ تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

$$x=\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to (\sqrt{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x^۲\to ۲^+}[x^۲]=۲=f(۲) \\ \lim\limits_{x\to (\sqrt{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x^۲\to ۲^-}[x^۲]=۱ \end{cases}$$

$\Leftarrow$ تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

روشن است که به ازای مقادیر $k>\sqrt{۲}$، تعداد نقاط ناپیوستگی بیش از یکی خواهد بود. پس بیش‌ترین مقدار k برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۴) حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+۲}{۲\cos^۲ x+\cos x-۱}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+۲}{۲\cos^۲ x+\cos x-۱}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+۲}{(\cos x+۱)(۲\cos x-۱)}=\frac{۲}{(۰^+)(-۳)}=-\infty$$

می‌دانیم که $\cos x+۱\geq ۰$، پس $\lim_{x\to\pi}(\cos x+۱)=۰^+$ است.

۱۵) حاصل $\lim_{x\to 0^-} \frac{[x]}{\tan x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) $\pm\infty$
۴) حد ندارد.

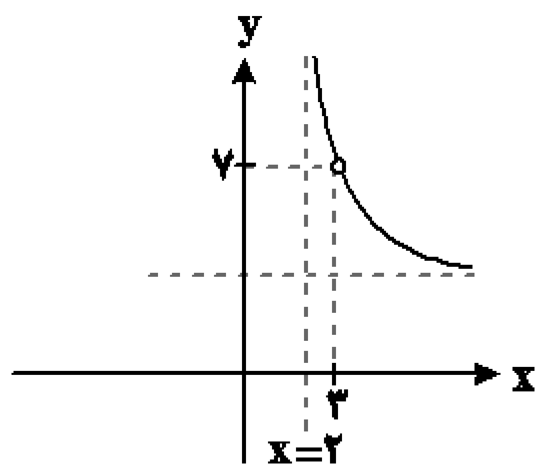
پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا مقدار جزء صحیح را در همسایگی عدد مورد نظر حد، به‌دست آورده و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{[x]}{\tan x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[0^-]}{\tan x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\tan x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۱۶) اگر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{2x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $ab+cd$ کدام است؟



۱) ۱۵-
۲) ۱۵
۳) ۳۰
۴) ۳۰-

پاسخ: گزینه ۱

تابع در $x = 2$ نامتناهی می‌شود. پس $x = 2$ ریشه مخرج است. از طرفی تابع در $x = 3$ حد دارد ولی مقدار ندارد. پس $x = 3$ هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج است. مخرج کسر به صورت $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ می‌باشد. پس $c = -5$ و $d = 6$

$$2x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=3} 18 + 3a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = -18 \qquad (1)$$

حاصل حد در $x = 3$ برابر ۷ است. برای محاسبه حد باید صورت و مخرج را بر $(x-3)$ تقسیم کنیم.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+ax+b}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x+6+a}{x-2} = 7 \Rightarrow \frac{12+a}{1} = 7$$

$$\Rightarrow a = -5 \xrightarrow{(1)} 3a + b = -18 \Rightarrow b = -3$$

$$ab + cd = (-3)(-5) + (-5)(6) = 15 - 30 = -15$$

۱۷) حاصل $\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|-2x^2-x+1|}-\frac{4}{4x^2-1}\right)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|-2x^2-x+1|}-\frac{4}{4x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|2x^2+x-1|}-\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|(2x-1)(x+1)|}-\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{3(2x+1)-4(x+1)}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{6x+3-4x-4}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{2x-1}{(2x-1)(x+1)(2x+1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}\times 2}=\frac{1}{3}$$

۱۸) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{ax+b}-1}{x^2-4}=-\frac{1}{16}$ باشد، $a-2b$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) $-\frac{9}{2}$ ۴) $-\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

مخرج به ازای $x=2$ صفر است. پس صورت هم باید صفر باشد.

$$\sqrt{ax+b}-1=0\xrightarrow{x=2}\sqrt{2a+b}=1\Rightarrow 2a+b=1$$

پس $b-1=-2a$ است:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{ax+b}-1}{x^2-4}\times\frac{\sqrt{ax+b}+1}{\sqrt{ax+b}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{ax+b-1}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)}$$

به جای $b-1$ در صورت $-2a$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$=\lim_{x\to 2}\frac{ax-2a}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a}{(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)}=\frac{a}{4(\sqrt{2a+b}+1)}$$

$$=\frac{a}{4(1+1)}=\frac{a}{8}=-\frac{1}{16}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم $2a+b=1$ است، پس $b=2$ بدست می‌آید.

$$a-2b=-\frac{1}{2}-2(2)=-\frac{1}{2}-4=-\frac{9}{2}$$

۱۹) حد راست تابع $f(x) = \frac{(x^۳-۱)+\sqrt{x^۳-۱}}{(۱-x^۲)+\sqrt{x^۲-۱}}$ وقتی $x \to ۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{-۳}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{(x^۳-۱)+\sqrt{x^۳-۱}}{(۱-x^۲)+\sqrt{x^۲-۱}} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)+\sqrt{(x-۱)(x^۲+x+۱)}}{(۱-x)(۱+x)+\sqrt{(x-۱)(x+۱)}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{۳(x-۱)+\sqrt{۳(x-۱)}}{۲(۱-x)+\sqrt{۲(x-۱)}}$$

اگر $t = x - ۱$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{t\to ۰^+} \frac{۳t+\sqrt{۳t}}{-۲t+\sqrt{۲t}} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{\sqrt{t}(۳\sqrt{t}+\sqrt{۳})}{\sqrt{t}(-۲\sqrt{t}+\sqrt{۲})} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۲۰) اگر $\lim_{x\to \frac{a}{۲}} \frac{۱+x}{x^۲+bx+۴} = -\infty$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۸
۳) ۴
۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲

چون حاصل حد $-\infty$ شده است پس مخرج کسر باید ریشه مضاعف در $x = \frac{a}{۲}$ داشته باشد:

$$(x - \frac{a}{۲})^۲ = x^۲ + bx + ۴$$

$$x^۲ - ax + \frac{a^۲}{۴} = x^۲ + bx + ۴$$

$$\frac{a^۲}{۴} = ۴ \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = \pm ۴$$

$$b = -a \quad (*)$$

اگر فرض کنیم $a = ۴$ در این صورت:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x+۱}{x^۲-۴x+۴} = \lim_{x\to ۲} \frac{x+۱}{(x-۲)^۲} = \frac{۳}{۰^+} = +\infty$$

پس $a = ۴$ صحیح نمی‌باشد.

اگر $a = -۴$:
$$\lim_{x\to -۲} \frac{x+۱}{x^۲+۴x+۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{x+۱}{(x+۲)^۲} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

پس $a = -۴$ قابل قبول است، بنابراین:

$$\xrightarrow{(*)} b - a = ۴ - (-۴) = ۸$$

(۲۱) حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2+\sqrt{x^2+2x-5}}{x^2-1-\sqrt{4x-x^2}}$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** تعریف نشده

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

زیر رادیکال مخرج، منفی می‌شود پس تابع در بی‌نهایت تعریف نشده است.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2+\sqrt{x^2+2x-5}}{x^2-1-\sqrt{4x-x^2}}$$

(۲۲) حد تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}$ وقتی $x \to +\infty$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۱- **۳)** $\frac{1}{2}$ **۴)** $\frac{-1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

با ضرب‌کردن تابع در مزدوج رادیکالی آن، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty} (2\sqrt{x} - \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}) \times \frac{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-(4x-2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-2\sqrt{x}}}$$

در عبارت $4x - 2\sqrt{x}$ که زیر رادیکال قرار دارد، وقتی $x \to +\infty$ کافی است تنها توان بزرگ‌تر را درنظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

۲۳) در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}$، اگر $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x)=xf(x)$ وقتی $x\to -\infty$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸

۳) -۴ ۴) -۸

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=۲\Rightarrow \frac{a+۲b}{۰}=۲$$

حد مخرج در $x=۱$ برابر صفر است پس باید حد صورت هم صفر باشد.

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\left(ax+b\sqrt{x^۲+۳}\right)=a+۲b=۰\Rightarrow a=-۲b\ \ (*)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{-۲bx+b\sqrt{x^۲+۳}}{(x-۲)(x-۱)}\times\frac{-۲x-\sqrt{x^۲+۳}}{-۲x-\sqrt{x^۲+۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{b(۴x^۲-(x^۲+۳))}{(-۲x-\sqrt{x^۲+۳})(x-۲)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{b(۳)(x-۱)(x+۱)}{(-۴)(x-۲)(x-۱)}$$

$$=\frac{۶b}{+۴}\overset{\text{طبق فرض}}{=}۲$$

$$\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{(*)}a=-۲\left(\frac{۴}{۳}\right)=\frac{-۸}{۳}$$

$$g(x)=xf(x)=\frac{ax^۲+bx\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}\Rightarrow \lim_{x\to -\infty}\frac{ax^۲+bx|x|}{x^۲}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^۲-bx^۲}{x^۲}=\frac{(a-b)x^۲}{x^۲}=a-b\Rightarrow -\frac{۸}{۳}-\frac{۴}{۳}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴$$

۲۴) حد کسر $\frac{x^{n+۲}+nx+۲}{nx^{m-۱}-(n^۲+۱)x}$ وقتی $x\to +\infty$ با شرط $۱<m<۲$ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

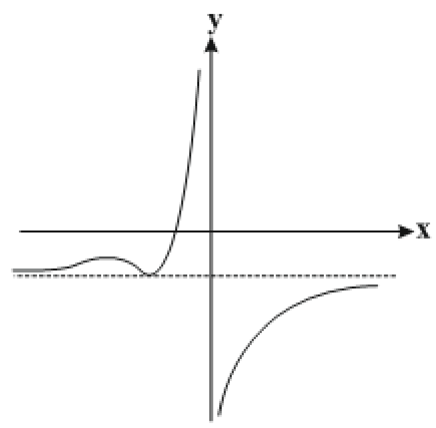
پاسخ: گزینه ۳

$$n+۲>۱:\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{n+۲}}{-(n^۲+۱)x}=-\infty$$

$$n+۲=۱\Rightarrow n=-۱:\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\overbrace{x-x}^{۰}+۲}{-۲x}=۰$$

$$n+۲<۱\to n<-۱:\ \lim_{x\to +\infty}\frac{nx}{-(n^۲+۱)x}=\frac{n}{-(n^۲+۱)}>۰$$

۲۵ شکل زیر نمودار منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^۳+x^۲+ax+۱}{b-x^۳}$ را نشان می‌دهد. $a + b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۳

چون مجانب قائم، منطبق بر محورyها (با معادله‌ی $x = ۰$) است، پس مخرج به‌ازای $x = ۰$ باید صفر شود پس $b = ۰$. مجانب افقی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۳+x^۲+ax+۱}{-x^۳} = -۱$$

طبق نمودار، تابع بر مجانب افقی‌اش مماس است. معادله‌ی تقاطع آن با مجانب افقی‌اش باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\frac{x^۳+x^۲+ax+۱}{-x^۳} = -۱ \Rightarrow x^۳ + x^۲ + ax + ۱ = x^۳ \Rightarrow x^۲ + ax + ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۲ \end{cases}$$

طول نقطه‌ی تماس منحنی با مجانب افقی‌اش منفی است.

$a = ۲ \Rightarrow$ معادله‌ی تقاطع: $x^۲ + ۲x + ۱ = (x + ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$a = -۲ \Rightarrow$ معادله‌ی تقاطع: $x^۲ - ۲x + ۱ = (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

بنابراین $a = ۲$، پس $a + b = ۲ + ۰ = ۲$.