① با حروف کلمهٔ «Lighter» چند کلمهٔ هفت حرفی بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی می‌توان نوشت به شرطی که بین دو حرف g و h دقیقاً یک حرف وجود داشته باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۱۴۴۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

بسته‌ای به‌صورت $\boxed{g-h}$ درنظر می‌گیریم. توجه کنید که دو حرف g و h می‌توانند با هم جابه‌جا شوند. برای حرف بین آن‌ها نیز ۵ حالت خواهیم داشت. حال این بسته و ۴ حرف دیگر را ۵ شیء متمایز درنظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$\underbrace{۵}_{\text{حرف بین } h,g} \times \underbrace{۲!}_{\text{جابه‌جایی } h,g} \times \underbrace{۵!}_{\text{جایگشت کلی}} = ۱۲۰۰$$

② با استفاده از ارقام ۱,۲,۳,۴,۵,۶ چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت به‌طوری که در آنها ارقام ۱ و ۵ کنار هم باشند ولی ارقام ۳ و ۲ کنار هم نباشند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۳۶ ۳) ۵۴ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

تعداد حالت‌هایی را که ارقام ۱ و ۵ کنار هم باشند را تعیین می‌کنیم.

1,5 و ۲,۳,۴,۶ $\Rightarrow$ ۵! × ۲! = ۲۴۰

توجه داشته باشید از بین این حالت‌هایی که حساب کردیم بعضی از آنها قابل قبول نیستند زیرا در بعضی از آنها ۲ و ۳ کنار هم هستند پس تعداد آن حالت‌ها را حساب کرده و از ۲۴۰ کم کنیم.

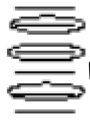
۱,۵ و ۲,۳ و ۴,۶ $\Rightarrow$ ۴! × ۲! × ۲! = ۹۶ $\Rightarrow$ ۲۴۰ − ۹۶ = ۱۴۴

③ شش نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار گیرند به‌طوری که شخص a جلوتر از اشخاص b و c در صف قرار گیرد؟

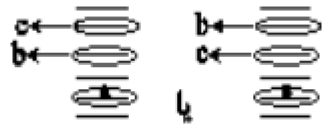
۱) ۷۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

روش اول: ابتدا از شش جایگاه، ۳ جایگاه را برای ۳ شخص a و b و c انتخاب می‌کنیم  یعنی $\binom{۶}{۳}$.

اکنون این سه جایگاه را می‌توانیم به دو طریق توسط a و b و c پر کنیم به‌طوری که a جلوتر از b و c باشد.



و در پایان، ۳ شخص باقی‌مانده به !۳ حالت در ۳ جایگاه باقی‌مانده قرار می‌گیرند.

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = \binom{۶}{۳} \times ۲ \times ۳! = ۲۰ \times ۲ \times ۶ = ۲۴۰$$

روش دوم: کل حالت‌هایی که ۶ نفر در یک صف قرار می‌گیرند $۷۲۰ = ۶!$ حالت است. در $\frac{۱}{۳}$ از این حالت‌ها از بین ۳ شخص a، b و c، شخص a جلوتر، در $\frac{۱}{۳}$ از حالت‌ها شخص b جلوتر و در $\frac{۱}{۳}$ از حالت‌ها شخص c جلوتر می‌ایستد. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر با $۲۴۰ = \frac{۱}{۳} \times ۷۲۰$ می‌شود.

④ چند زیر مجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۶ وجود دارد که شامل اعداد ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ باشد ولی شامل ۶ و ۷ نباشد؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۵ ۳) ۵۶ ۴) ۲۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

بودن یا نبودن اعداد ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ در زیر مجموعه مورد نظر مشخص شده، پس باید از بین اعداد ۱۵، ...، ۹ و ۸ پنج عضو دیگر را انتخاب کرد که تعداد راه‌های انجام این کار، برابر است با:

$$\binom{۸}{۵} = \frac{۸!}{۵!۳!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!\times۶} = ۵۶$$

⑤ چند تابع از مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعه $B = \{۴,۵,۶,۷\}$ می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(۴,۴)$ باشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تابع f به‌صورت $\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,۴),(۵,d)\}$ است که a، b، c و d هر کدام می‌توانند یکی از اعداد ۴، ۵، ۶و ۷ باشند، یعنی هرکدام ۴ حالت دارند؛ بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با:

$$۴\times۴\times۴\times۴ = ۲۵۶$$

۶) با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۳، ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۱۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۴۰ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر صدگان ۳ باشد، دو حالت به‌وجود می‌آید:

$$\underset{۱}{\boxed{۳}} \times \underset{۱}{\boxed{۱}} \times \underset{۲}{\boxed{\text{۵یا۷}}} = ۲$$

$$\underset{۱}{\boxed{۳}} \times \underset{۱}{\boxed{۱}} \times \underset{۲}{\boxed{\text{۵یا۷}}} = ۲$$

اگر صدگان بزرگتر از ۳ باشد:

$$\underset{۲}{\boxed{\text{۵یا۷}}} \times \underset{۴\times۳}{\boxed{\text{مابقیارقام}}} = ۲۴$$

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲۴ + ۶ + ۲ = ۳۲$$

۷) از تساوی $۲P(n,۲) + ۹۸ = P(۲n,۲)$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$۲P(n,۲) + ۹۸ = P(۲n,۲)$$

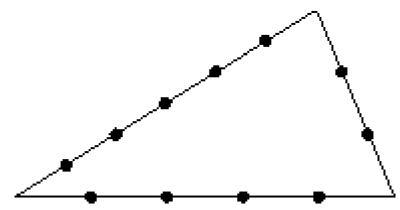
$$\Rightarrow ۲ \times \frac{n!}{(n-۲)!} + ۹۸ = \frac{(۲n)!}{(۲n-۲)!}$$

$$\Rightarrow ۲ \times \frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)!}{(n-۲)!} + ۹۸ = \frac{(۲n)(۲n-۱)(۲n-۲)!}{(۲n-۲)!}$$

$$\Rightarrow ۲n(n-۱) + ۹۸ = ۲n(۲n-۱) \Rightarrow ۲n^۲ - ۲n + ۹۸ = ۴n^۲ - ۲n$$

$$۲n^۲ = ۹۸ \Rightarrow n^۲ = ۴۹ \Rightarrow n = ۷$$

⑧ چند مثلث می‌توان ساخت که رئوس آن از ۱۱ نقطهٔ شکل زیر باشند؟



۱) ۱۶۵
۲) ۱۷۶
۳) ۱۵۲
۴) ۱۵۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

چون تعداد حالت‌ها به روش مستقیم وقت‌گیر است، از متمم استفاده می‌کنیم. تعداد کل حالت‌ها، انتخاب ۳ نقطه از بین ۱۱ نقطه است. یعنی:

$$\binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳!\,(۱۱-۳)!} = ۱۶۵$$

اما اگر هر سه نقطهٔ انتخاب‌شده روی یک ضلع قرار بگیرند، مثلثی تشکیل نمی‌شود و بنابراین لازم است حالت‌هایی را که هر سه نقطهٔ انتخاب‌شده روی یک ضلع قرار دارند، از تعداد کل کم کنیم:

پس حالت‌هایی که هر سه نقطه روی یک ضلع قرار دارند، برابر است با:

$$\binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۴ + ۱۰ = ۱۴$$

حال این تعداد را از مقدار کل کم می‌کنیم: $۱۶۵ - ۱۴ = ۱۵۱$

⑨ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که در آن هیچ دو رقم مجاوری مثل هم نباشند؟

۱) ۵۰۴
۲) ۵۷۶
۳) ۶۴۸
۴) ۷۲۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای رقم صدگان، هر یک از ارقام ۱ تا ۹ را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد ولی برای رقم دهگان، رقم استفاده شده در صدگان را نمی‌توان به کار برد، در حالی که رقم صفر به انتخاب‌ها افزوده می‌شود، پس ۹ انتخاب برای این رقم وجود دارد. برای رقم یکان نیز هر یک از ۹ رقم متفاوت با رقم دهگان را می‌توان استفاده کرد، پس تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$۹ \times ۹ \times ۹ = ۷۲۹$

۱۰) با حروف کلمه «فاکتوریل» چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی می‌توان نوشت که در آن کلمه با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۱) $\frac{۶!}{۲!}$ ۲) $\frac{۸!}{۳!}$ ۳) $\frac{۷!}{۳!}$ ۴) $\frac{۷!}{۲!}$

پاسخ: گزینه ۴

«فاکتوریل» ۸ حرف دارد که ۳ حرف آن نقطه دار است. بنابراین ابتدا یک حرف از سه حرف نقطه‌دار را انتخاب می‌کنیم و سپس حروف دیگر را می‌چینیم:

$$۳ \times P(۷,۴) = ۳ \times \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷!}{۲!}$$

توجه: حرف «ی» درصورتی‌که در انتهای کلمه نباشد و به‌صورت چسبان باشد، نقطه‌دار است.

۱۱) در چند جایگشت از حروف کلمه sabzipolu عبارت sabzi وجود دارد ولی عبارت pol وجود ندارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۸

۳) ۱۱۴ ۴) ۱۱۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تعداد جایگشت‌هایی را که عبارت sabzi دارد به‌دست می‌آوریم:

sabzi - P - o - l - u ⇒ ۵ شی ⇒ تعداد جایگشت‌ها ۱۲۰ = !۵

تعداد جایگشت‌هایی که sabzi و pol را دارد.

sabzi - pol - u ⇒ ۳ شی ⇒ ۳! = ۶ تعداد جایگشت‌ها

تعداد جایگشت‌های مطلوب:

$$۵! - ۳! = ۱۲۰ - ۶ = ۱۱۴$$

۱۲) هفت نفر که سه‌تای آن‌ها برادر هستند، در یک صف کنار هم ایستاده‌اند. با کدام احتمال سه برادر در کنار هم ایستاده‌اند به‌طوری که برادر بزرگ‌تر بین دو برادر دیگر ایستاده است؟

۱) $\frac{۱}{۲۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱}{۴۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

ترتیب قرارگرفتن این هفت نفر به‌صورت زیر است:

$$\circ\circ\circ\circ\ \boxed{\circ\bullet\circ}$$

$$p = \frac{۵! \times ۲!}{۷!} = \frac{۲}{۷ \times ۶} = \frac{۱}{۲۱}$$

⑬ احتمال قبولی امیر در ادبیات و شیمی به‌ترتیب ۰/۸ و ۰/۴ است. با کدام احتمال حداقل در یکی از دروس قبول می‌شود؟

۱) ۰/۷۶ ۲) ۰/۸۸ ۳) ۰/۶۸ ۴) ۰/۳۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

برای به دست آوردن احتمال قبولی در حداقل یکی از دروس باید احتمال قبول نشدن در هر دو درس را از ۱ کم کنیم. با توجه به آن که پیشامدهای قبولی امیر در ادبیات (A) و شیمی (B) مستقل از هم‌اند، پس داریم:

$$P(A \cup B) = ۱ - P(A') \times P(B') = ۱ - (۱ - ۰/۸)(۱ - ۰/۴) = ۰/۸۸$$

⑭ در کیسه‌ای ۵ مهره سبز، ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، رنگ مهره‌های خارج شده <u>متفاوت</u> است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با $n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶} = ۲۲۰$. برای اینکه رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت باشد، باید از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{۵}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۶۰$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۰}{۲۲۰} = \frac{۳}{۱۱}$$

⑮ از بین سه دانش‌آموز، با کدام احتمال فصل تولد حداقل دو نفر از آن‌ها یکسان است؟ (تعداد روزهای فصل‌ها را برابر فرض کنید.)

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

باید متمم پیشامدی را در نظر بگیریم که ۳ دانش‌آموز در ۴ فصل متفاوت متولد شده باشند. بنابراین: $۱ - \frac{۴\times۳\times۲}{۴\times۴\times۴} = ۱ - \frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}$

۱۶) از مجموعهٔ $S = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ..., ۱۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر است، ولی مضرب ۶ نیست؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۴۴}{۹۱}$ ۳) $\frac{۴۶}{۹۱}$ ۴) $\frac{۲۳}{۴۵}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

A : پیشامد آن که عدد انتخاب شده مضرب ۲ باشد.

$$A = \{۱۰, ۱۲, ۱۴, ..., ۱۰۰\} \rightarrow n(A) = ۴۶$$

B : پیشامد آن که عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد.

$$B = \{۱۲, ۱۵, ۱۸, ..., ۹۹\} \rightarrow n(B) = ۳۰$$

$A \cap B$: پیشامد آن که عدد انتخاب شده مضرب ۶ باشد.

$$A \cap B = \{۱۲, ۱۸, ۲۴, ..., ۹۶\} \rightarrow n(A \cap B) = ۱۵$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\frac{n(A)+n(B)-۲n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۴۶+۳۰-۲\times۱۵}{۹۱} = \frac{۴۶}{۹۱}$$

۱۷) احتمال عدم موفقیت حامد و حسین در آزمون پایان ترم به‌ترتیب از راست به چپ، $\frac{۱}{۴}$ و$\frac{۲}{۵}$ است. احتمال اینکه فقط یکی از این دو نفر در آزمون قبول شوند، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۹}{۱۰}$ ۳) $\frac{۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

احتمال موفقیت حامد $P(A) = \frac{۳}{۴}$ و احتمال موفقیت حسین $P(B) = \frac{۳}{۵}$ است. با توجه به آن که پیشامدهای A و B مستقل از هم هستند، احتمال آن که فقط یکی از این دو نفر در آزمون قبول شود، به صورت زیر است:

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A)P(B') + P(A')P(B)$$

$$= \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۹}{۲۰}$$

۱۸) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی باشند و $P(A|B') = ۲P(B|A') = \frac{۱}{۲}$. احتمال رخ دادن A چند برابر احتمال رخ دادن B است؟

۱) ۴ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

چون A و B ناسازگار هستند، پس:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)$$

با جایگذاری در داده‌های مسأله داریم:

$$P(A|B') = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A)}{۱-P(B)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲P(A) + P(B) = ۱$$

$$P(B|A') = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B)}{۱-P(A)} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow P(A) + ۴P(B) = ۱$$

بنابراین: $۲P(A) + P(B) = P(A) + ۴P(B) \Rightarrow P(A) = ۳P(B)$

۱۹) در کیسه‌ای ۱۲ مهره با شماره‌های ۱ تا ۱۲ وجود دارد. از این کیسه دو مهره خارج می‌کنیم و می‌دانیم که هر دو عدد خارج شده اول هستند. با کدام احتمال، مجموع دو عدد روشده کمتر از ۱۰ است؟

۱) $\frac{۷}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

با توجه به شرط آن که هر دو عدد خارج شده اول هستند، داریم:

اعداد اول از ۱ تا ۱۲ = $\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱\}$

$$n(S) = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

$$A = \{(۲, ۳), (۲, ۵), (۲, ۷), (۳, ۵)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

۲۰) سه تاس آبی، قرمز و سیاه را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد تاس‌های رو شده متفاوت هستند، با چه احتمالی عدد تاس آبی بزرگ‌تر از سایر تاس‌ها آمده است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

در پرتاب ۳ تاس $۲۱۶ = ۶^۳$ حالت داریم. اما در اینجا گفته شده است که عدد تاس‌ها متفاوت‌اند. یعنی $۱۲۰ = ۴ \times ۵ \times ۶$ حالت فضای نمونه‌ای کاهش یافته ماست. حال برای مقایسهٔ عدد تاس آبی با دو تاس دیگر سه حالت پیش می‌آید: تاس آبی بزرگ‌تر از دو تاس دیگر بیاید. تاس آبی بین دو تاس دیگر بیاید. تاس آبی کوچک‌تر از دو تاس دیگر بیاید. می‌دانیم احتمال وقوع هریک از حالات بالا با هم برابر است. بنابراین می‌توان گفت در $\frac{۱}{۳}$ حالات فضای نمونه جدید، تاس آبی بزرگ‌تر از سایر تاس‌ها می‌آید.

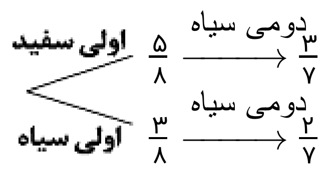
۲۱) در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه قرار دارد. دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهرهٔ دوم سیاه است؟

۱) ۰/۵۷۵ ۲) ۰/۳۷۵
۳) ۰/۶۲۵ ۴) ۰/۴۲۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

راه حل اول: با استفاده از نمودار درختی داریم:



$P(\text{دومی سیاه}) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} + \frac{۳}{۸} \times \frac{۲}{۷} = \frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$

راه حل دوم: در حالتی که از رنگ مهرهٔ اول اطلاع نداریم، احتمال رنگ‌ها مشابه حالتی است که هیچ مهره‌ای برنداشته‌ایم. بنابراین احتمال آن که رنگ مهرهٔ دوم سیاه باشد، همان $۰/۳۷۵ = \frac{۳}{۸}$ است.

۲۲) دو جعبه داریم که در جعبهٔ اول ۷ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۶ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد. از جعبهٔ اول ۴ لامپ و از جعبهٔ دوم ۶ لامپ، به تصادف برمی‌داریم و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، سالم است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۰}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۴) $\frac{۲۳}{۶۰}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

در جعبهٔ جدید ۱۰ لامپ وجود دارد که ۴ تا از جعبهٔ اول و ۶ تا از جعبهٔ دوم آمده است. بنابراین اگر لامپی از جعبهٔ جدید انتخاب کنیم، احتمال آن که متعلق به جعبهٔ اول و دوم باشد به ترتیب برابر $\frac{۴}{۱۰}$ و $\frac{۶}{۱۰}$ است. همچنین احتمال سالم بودن لامپ جعبهٔ اول و دوم به ترتیب برابر $\frac{۷}{۱۲}$ و $\frac{۶}{۹}$ است. پس طبق قانون احتمال کل، احتمال سالم بودن یک لامپ از جعبهٔ جدید برابر است با:

$$\frac{۴}{۱۰} \times \frac{۷}{۱۲} + \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} = \frac{۷}{۳۰} + \frac{۲}{۵} = \frac{۱۹}{۳۰}$$

۲۳) دو ظرف یکسان داریم که در اولی ۶ گوی آبی و ۳ گوی قرمز و در دومی ۳ گوی آبی و ۵ گوی قرمز وجود دارد. یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و از آن، گویی بیرون می‌آوریم. اگر این گوی آبی باشد، با کدام احتمال از ظرف اول انتخاب شده است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۴ ۳) ۰/۶۰ ۴) ۰/۶۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

فرض کنیم Aپیشامد انتخاب ظرف اول،Bپیشامد انتخاب ظرف دوم وCپیشامد آن باشد که گوی انتخابی آبی است. احتمال مورد نظر برابر است با $P(A|C)$، پس بنابر قاعده بیز داریم:

$$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۹}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۹}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۱۶}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۸}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} = ۰/۶۴$$

توجه کنید که احتمال انتخاب هر ظرف برابر$\frac{۱}{۲}$می‌باشد.

۲۴) در ظرفی ۳ مهرهٔ بنفش، ۴ مهرهٔ خاکستری و ۳ مهرهٔ آلبالویی وجود دارد. یک مهره به تصادف برمی‌داریم و بعد از دیدن رنگ آن، تمام مهره‌های هم‌رنگ آن را از ظرف خارج می‌کنیم و نهایتاً یک مهرهٔ دیگر برمی‌داریم. با کدام احتمال مهرهٔ نهایی آلبالویی است؟

۱) $\frac{23}{70}$ ۲) $\frac{13}{14}$ ۳) $\frac{9}{70}$ ۴) $\frac{31}{140}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$\frac{3}{10}$ آلبالویی → ۳بنفش ۴خاکستری $P(A_1) = 0$

$\frac{3}{10}$ بنفش → ۴خاکستری ۳آلبالویی $P(A_2) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{7}$

$\frac{4}{10}$ خاکستر → ۳بنفش ۳آلبالویی $P(A_3) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{6}$

$$P(A) = 0 + \frac{3}{10} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{70} + \frac{1}{5} = \frac{23}{70}$$

۲۵) شصت درصد مردان و بیست و پنج درصد زنان خطر ابتلا به یک بیماری را دارند. در شرکتی که نسبت کارکنان مرد به زن، ۳ به ۲ است. یک نفر از کارکنان را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال خطر ابتلا دارد؟

۱) ۰/۴۲۵ ۲) ۰/۴۶
۳) ۰/۴ ۴) ۰/۳۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

نسبت کارکنان مرد به زن ۳ به ۲ است یعنی $\frac{3}{5}$ مرد و $\frac{2}{5}$ زن هستند.

کارکنان $\xrightarrow{\frac{3}{5}}$ مرد $\xrightarrow{\frac{60}{100}}$ ابتلا

کارکنان $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ زن $\xrightarrow{\frac{25}{100}}$ ابتلا

$$\frac{3}{5} \times \frac{60}{100} + \frac{2}{5} \times \frac{25}{100} = \frac{36}{100} + \frac{10}{100} = 0/46$$