مدت زمان آزمون: -

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ شمارش و احتمال**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

① با حروف کلمه «شهربازی» چند کلمه ۵ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به‌طوری که حرف اول آن نقطه‌دار نباشد؟

۱) ۱۰۸۰ **۲)** ۲۱۶۰ **۳)** ۱۴۴۰ **۴)** ۱۶۸۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

در حروف کلمه «شهربازی»، حرف‌های «ﻫـ»، «ر» و «ا» اگر در ابتدا قرار گیرند، بدون نقطه خواهند بود (دقت کنید که اگر حرف «ی» در ابتدا قرار گیرد به‌صورت «یـ» و نقطه‌دار می‌شود.)

پس به ۳ حالت می‌توان اولین خانه سمت راست را پر کرد:

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها = ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۳ = ۱۰۸۰

② ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب فیزیک و ۵ کتاب زیست را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به‌طوری که هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم قرار نگیرند؟

۱) ۱۰! × ۱۲ **۲)** ۱۲! **۳)** ۱۰! × ۷۲ **۴)** ۵! × ۳! × ۴!

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

۴ کتاب ریاضی را m_1، m_2، m_3، m_4، ۵ کتاب زیست را B_1، B_2، B_3، B_4، B_5 و سه کتاب فیزیک را P_1، P_2، P_3 در نظر می‌گیریم.

ابتدا کتاب‌های ریاضی و زیست را به !۹ حالت کنار هم قرار می‌دهیم

$\bigcirc m_1 \bigcirc m_2 \bigcirc m_3 \bigcirc m_4 \bigcirc B_1 \bigcirc B_2 \bigcirc B_3 \bigcirc B_4 \bigcirc B_5 \bigcirc$

در ده مکان ایجاد شده (که با دایره نشان داده شده‌اند) باید سه کتاب فیزیک را قرار دهیم:

۱۰ × ۹ × ۸

پس جواب مسئله برابر است با:

۹! × ۱۰ × ۹ × ۸ = ۱۰! × ۷۲

③ در یک جلسه قرار است شش نفر یکی پس از دیگری سخنرانی کنند و لزوماً باید شخصA پیش از شخص B و شخصC پس از شخص D سخنرانی کند، به چند طریق می‌توان برنامه سخنرانی‌ها را انجام داد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

در نصف حالت‌ها شخص A قبل از B و در نصف حالت‌ها شخص B قبل از A سخنرانی می‌کند، همین استدلال برای شخص C و D نیز درست است، پس جواب مسأله برابر است با:

$\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲} \times ۶!) = \frac{۷۲۰}{۴} = ۱۸۰$

④ چند جایگشت پنج حرفی با حروف کلمه «توابع» می‌توان نوشت که بین حروف «و» و «ا» دقیقاً یک حرف قرار گیرد و دو حرف دیگر کنار هم نباشند؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تنها حالت ممکن به‌صورت زیر است.

___ $\boxed{\text{و یا ا ___ ا یا و}}$ ___

$۱۲ = ۳! \times ۲!$

برای بقیه حروف　　برای «و» و «ا»

⑤ با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱,۰ چند عدد زوج چهار رقمی کوچکتر از ۳۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در رقم یکان باید از ارقام صفر و ۲ و ۴ استفاده کنیم و در رقم هزارگان از ارقام ۱ و ۲ استفاده کنیم. پس دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $۱۲ = \underset{\text{فقط ۲}}{۱} \times ۳ \times ۴ \times \underset{\text{فقط ۱}}{۱}$

حالت دوم: $۴۸ = \underset{۴,۰}{۲} \times ۳ \times ۴ \times \underset{۱,۲}{۲}$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۱۲ + ۴۸ = ۶۰$

۶) در چند جایگشت از حروف کلمه peiman، عبارت pe وجود دارد ولی عبارت man وجود ندارد؟

۱) ۱۱۴
۲) ۹۸
۳) ۹۶
۴) ۸۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

pe را یک بسته در نظر می‌گیریم که به همراه i, m, a, n دارای ۱۲۰ = !۵ جایگشت‌اند. در این ۱۲۰ جایگشت آن‌هایی که man دارند را نمی‌خواهیم. تعداد این جایگشت‌ها که به‌صورت $i\boxed{man}\boxed{pe}$ هستند برابر ۶ = !۳ است، لذا جواب برابر است با: ۱۱۴ = ۶ − ۱۲۰.

۷) از بین ۷ بازیکن فوتبال که دوتای آن‌ها برادر هستند، می‌خواهیم ۳ نفر را به عنوان مدافع انتخاب کنیم به‌طوری که حداقل یکی از برادرها به عنوان مدافع انتخاب شود. این امر به چند طریق ممکن است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

یا یکی از برادرها به عنوان مدافع انتخاب می‌شود یا هر دوی آن‌ها به عنوان مدافع انتخاب می‌شوند. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۲}{۲}\binom{۵}{۲} = ۲۰ + ۵ = ۲۵$$

۸) اگر $C(n,۳) = P(n-۱,۲)$ باشد، حاصل $\binom{n}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۰
۳) ۲۱
۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۱

$$C(n,۳) = \frac{n!}{(n-۳)! \times ۳!} = \frac{n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳)!}{(n-۳)! \times ۶} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

$$P(n-۱,۲) = \frac{(n-۱)!}{(n-۳)!} = (n-۱) \times (n-۲)$$

$$C(n,۳) = P(n-۱,۲) \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶} = (n-۱) \times (n-۲)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۶} = ۱ \Rightarrow n = ۶$$

$$\Rightarrow \binom{n}{۲} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$$

۹) با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج کوچکتر از ۴۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶ **۲)** ۴۲ **۳)** ۳۴ **۴)** ۳۸

پاسخ: گزینه ۳

برای هزارگان عدد سه حالت وجود دارد:

الف) هزارگان = ۲
$$\underset{\substack{\downarrow \\ ۲}}{\underline{\quad ۱ \quad}} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۰\text{یا}۴}}{\underline{\quad ۲ \quad}} = ۱۲$$

(ابتدا هزارگان و سپس یکان را انتخاب می‌کنیم.)

ب) هزارگان = ۳
$$\underset{\substack{\downarrow \\ ۳}}{\underline{۱}} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underset{\substack{\downarrow ۰\text{یا}۲\text{یا}۴}}{\underline{\qquad ۳ \qquad}} = ۱۸$$

پ) هزارگان = ۴
$$\underset{\substack{\downarrow \\ ۴}}{\underline{۱}} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۰\text{یا}۲}}{\underline{\quad ۱ \quad}} \times \underline{۲} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۰\text{یا}۲}}{\underline{\quad ۲ \quad}} = ۴$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $۱۲ + ۱۸ + ۴ = ۳۴$

۱۰) چند تابع می‌توان از مجموعه $A = \{۴,۵,۶\}$ به مجموعه $B = \{۷,۸\}$ نوشت به طوری‌که تابع همانی یا ثابت نباشند؟

۱) ۸ **۲)** ۵

۳) ۶ **۴)** ۴

پاسخ: گزینه ۳

اعضای مجموعه A را به عنوان مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع قرار می‌دهیم. برای مؤلفه دوم هر زوج مرتب، ۲ حالت (۷ یا ۸) داریم، پس:

$f = \{(۴, \underset{۲}{-}), (۵, \underset{۲}{-}), (۶, \underset{۲}{-})\}$ طبق اصل ضرب: $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

تابع f همانی نمی‌تواند باشد ولی در دو حالت زیر ثابت است:

$$\begin{cases} f = \{(۴,۷), (۵,۷), (۶,۷)\} \\ f = \{(۴,۸), (۵,۸), (۶,۸)\} \end{cases}$$

پس تعداد کل تابع‌های مطلوب برابر با $۸ - ۲ = ۶$ است.

۱۱) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد روشده مضرب ۴ باشد، چند برابر احتمال آن است که حاصل‌ضرب دو عدد روشده مضرب ۴ باشد؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

نکته: به کمک جدول زیر تعداد حالت‌های ممکن برای مجموع دو عدد روشده در پرتاب دو تاس را درنظر می‌گیریم:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

برای آن‌که مجموع اعداد روشده مضرب ۴ باشد، مجموع آن‌ها باید ۴ یا ۸ یا ۱۲ شود که تعداد حالت‌های آن به‌ترتیب ۳ و ۵ و ۱ می‌باشد. پس احتمال آن‌که مجموع اعداد روشده مضرب ۴ باشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{۳+۵+۱}{۶\times۶}=\frac{۹}{۳۶}$$

از طرفی برای آن‌که حاصل‌ضرب دو عدد روشده مضرب ۴ باشد، باید هر دو عدد زوج باشند یا این‌که یکی از اعداد روشده ۴ باشد:

(۱) $۹ = ۳ \times ۳ =$ تعداد حالت هایی که هردو عدد زوج باشند.

(۲) $۳ = ۳ \times ۱ =$ تعداد حالت هایی که تاس اول ۴ و تاس دوم فرد بیاید.

(۳) $۳ = ۱ \times ۳ =$ تعداد حالت هایی که تاس اول فرد و تاس دوم عدد۴ بیاید.

$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} P(B)=\frac{۹+۳+۳}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۹}{۳۶}}{\frac{۱۵}{۳۶}}=\frac{۳}{۵}$$

۱۲) سه نمایندهٔ مجلس و سه سرباز به تصادف در یک صف قرار می‌گیرند. با چه احتمالی سه سرباز در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

۶ نفر به !۶ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. ۳ سرباز را یک بسته در نظر می‌گیریم که با ۳ نماینده جمعاً !۴ حالت جایگشت دارند. همچنین خود سربازها نیز به !۳ طریق می‌توانند کنار هم بایستند، بنابراین داریم:

$$n(S)=۶!$$

$$n(A)=۳!\times۴!$$

$$P(A)=\frac{۳!\times۴!}{۶!}=\frac{۱}{۵}$$

۱۳) احتمال ابتلا به ناشنوایی برای شخصی دو برابر احتمال کوری برای اوست. اگر احتمال این که حداقل یکی از این دو رخ دهد، $\frac{۵}{۸}$ باشد، احتمال کوری بدون ناشنوایی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

ناشنوایی و کوری مستقل از هم هستند:

$$\begin{cases} D: \text{ناشنوایی} \\ B: \text{کوری} \end{cases} \quad P(D) = ۲x \ , \ P(B) = x$$

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{۵}{۸}$$

$$۳x - ۲x^۲ = \frac{۵}{۸} \rightarrow ۲x^۲ - ۳x + \frac{۵}{۸} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۵}{۴} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$P(B - D) = P(B) - P(B \cap D) = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۸}$$

۱۴) در یک خانواده با چهار فرزند، با کدام احتمال تعداد فرزندان پسر و دختر برابر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از خانواده‌ای با ۲n فرزند، در $\binom{۲n}{۲}$ حالت، تعداد فرزندان پسر و دختر برابراند.

پس در خانواده ۴ فرزندی، در $۶ = \binom{۴}{۲}$ حالت، تعداد فرزندان پسر و دختر برابرند.

تعداد کل حالات برای فرزندان این خانواده نیز، برابر $۱۶ = ۲^۴$ است. پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

۱۵) در جعبه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج کنیم، چه‌قدر احتمال دارد دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱} = ۸۴$$

$$n(A) = \binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} = ۴۰ + ۳۰ = ۷۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷۰}{۸۴} = \frac{۵}{۶}$$

۱۶) دو نفر به سمت یک هدف تیراندازی می‌کنند. A به احتمال $\frac{۱}{۳}$ و B به احتمال $\frac{۳}{۴}$ به هدف می‌زنند. احتمال آن که فقط B به هدف بزند چند برابر احتمال آن است که فقط A به هدف بزند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

احتمال این که فقط A به هدف بزند $P(A \cap B')$ و احتمال اینکه فقط B به هدف بزند $P(B \cap A')$ است و چون پیشامدهای A و B مستقل‌اند داریم:

$$\frac{P(B \cap A')}{P(A \cap B')} = \frac{P(B)\times P(A')}{P(A)\times P(B')} = \frac{\frac{۳}{۴}(۱-\frac{۱}{۳})}{\frac{۱}{۳}\times(۱-\frac{۳}{۴})} = \frac{\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}} = ۶$$

۱۷) دو سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا مجموع دو تاس ۵ ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

A : پیشامد آن که هر دو سکه رو بیاید.

B : پیشامد آن که مجموع دو تاس ۵ بیاید.

احتمال پیشامدهای A و B به صورت زیر است:

$$P(A) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \ , \ P(B) = \frac{۴}{۶\times۶} = \frac{۱}{۹}$$

با توجه به آن که پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگر هستند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

۱۸) ۱۰% دانش‌آموزان یک کلاس در درس شیمی، ۱۵% در درس زیست‌شناسی و ۵% در هر دو درس مردود شده‌اند. دانش‌آموزی را به‌طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم که در درس شیمی قبول شده است، احتمال آن‌که در درس زیست‌شناسی مردود شده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۳

اگر A پیشامد مردود شدن در درس شیمی وB پیشامد مردود شدن در درس زیست‌شناسی باشد، داریم:

$$P(A) = \frac{۱۰}{۱۰۰} \ , \ P(B) = \frac{۱۵}{۱۰۰} \ , \ P(A \cap B) = \frac{۵}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{۱-P(A)}$$

$$= \frac{P(B)-P(A \cap B)}{۱-P(A)} = \frac{\frac{۱۵}{۱۰۰}-\frac{۵}{۱۰۰}}{\frac{۹۰}{۱۰۰}} = \frac{\frac{۱۰}{۱۰۰}}{\frac{۹۰}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۹}$$

۱۹) در یک خانواده سه فرزندی احتمال آن‌که دو فرزندی که متوالیاً به دنیا آمده‌اند دارایRH یکسان نباشند، کدام است؟ (احتمال RH منفی ۰/۲ است.)

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۳۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای آنکه شرط مسأله برقرار باشد، باید یکی از دوحالت زیر برای RH فرزندان رخ دهد:

حالت اول: $(+, -, +) \Rightarrow ۰/۸ \times ۰/۲ \times ۰/۸$

حالت دوم: $(-, +, -) \Rightarrow ۰/۲ \times ۰/۸ \times ۰/۲$

احتمال مورد نظر= $(۰/۸)^۲(۰/۲) + (۰/۲)^۲(۰/۸)$

$= (۰/۸)(۰/۲)(۰/۸ + ۰/۲) = ۰/۱۶$

۲۰) در یک خانواده با شش فرزند، تعداد فرزندان دختر و پسر باهم برابر است. احتمال آنکه فرزندان از نظر جنسیت یک در میان باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

پاسخ: گزینه ۲

تعداد حالت‌هایی که یک خانواده شش فرزندی سه فرزند پسر و سه فرزند دختر دارد، برابر است با: $\binom{۶}{۳} = ۲۰$. از این بیست حالت، تنها در دو حالت زیر جنسیت فرزندان یک در میان متفاوت است:

(د پ د پ د پ) و (پ د پ د پ د)

پس احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{۲}{۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$

۲۱) ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$\xrightarrow{\text{انتخاب ظرف}}\begin{cases} A : \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{انتخاب مهره}} \dfrac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \dfrac{\frac{۴\times۳}{۲}\times\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}} = \frac{۶۰}{۱۲۶} \\ B : \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{انتخاب مهره}} \dfrac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \dfrac{\frac{۶\times۵}{۲}\times\frac{۳\times۲}{۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}} = \frac{۴۵}{۱۲۶} \\ C : \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{انتخاب مهره}} \dfrac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \dfrac{\frac{۵\times۶}{۲}\times\frac{۳\times۲}{۲}}{\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}} = \frac{۴۵}{۱۲۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \frac{۱}{۳}\times\frac{۶۰}{۱۲۶} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۴۵}{۱۲۶} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۴۵}{۱۲۶} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۶۰+۴۵+۴۵}{۱۲۶}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}\times\frac{۱۵۰}{۱۲۶} = \frac{۲۵}{۶۳}$$

۲۲) امیر و بهروز هر کدام به‌ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر احتمال شرکت امیر و بهروز در مسابقه علمی را به‌ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$P(A) = ۰/۶ \quad , \quad P(B) = ۰/۳$

$P(A|B) = ۰/۵ \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = ۰/۵$

$\Rightarrow P(A\cap B) = ۰/۵ \times ۰/۳ \Rightarrow P(A\cap B) = ۰/۱۵$

$P(A|B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)} = \frac{۰/۶-۰/۱۵}{۱-۰/۳}$

$P(A|B') = \frac{۰/۴۵}{۰/۷} = \frac{۹}{۱۴}$

۲۳) یک دسته کارت، شامل ۶ کارت سفید و ۵ کارت سیاه و دسته دیگر شامل ۹ کارت سفید است. یکی از دسته‌ها را به تصادف انتخاب و از آن دو کارت خارج می‌کنیم. اگر دو کارت سفید باشند، احتمال آن که از دسته اول انتخاب شده باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۱۴}$

۳) $\frac{۵}{۱۶}$

۴) $\frac{۳}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر $A_۱$ پیشامد انتخاب دسته اول و $A_۲$ پیشامد انتخاب دسته دوم و W پیشامد انتخاب دو کارت سفید باشد، آن‌گاه:

$$P(A_۱|W) = \frac{P(A_۱)P(W|A_۱)}{P(A_۱)P(W|A_۱)+P(A_۲)P(W|A_۲)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times۱} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۵۵}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۵۵}+\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۱۴}$$

۲۴) یک سکه را ۵ بار پرتاب کرده‌ایم. اگر بدانیم دقیقاً ۲ بار سکه رو ظاهر شده، احتمال این‌که پرتاب اول و آخر مثل هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

پاسخ: گزینه ۲

فضای نمونه کاهش یافته در این احتمال شرطی دارای $۱۰ = \binom{۵}{۲}$ عضو است. پیشامد مطلوب به دو صورت زیر است:

$$\begin{cases} \boxed{\text{پشت}}\ \underbrace{\square\square\square}_{\text{۲بار رو در سه پرتاب}}\ \boxed{\text{پشت}} \Rightarrow \binom{۳}{۲} = ۳ \\ \boxed{\text{رو}}\ \underbrace{\square\square\square}_{\text{هرسه پرتاب پشت}}\ \boxed{\text{رو}} \Rightarrow \binom{۳}{۳} = ۱ \end{cases}$$

پس پیشامد مطلوب ۴ عضو دارد.

$\Rightarrow$ احتمال مورد نظر $= \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$

۲۵) دو ظرف داریم که اولی شامل ۳ مهره آبی و ۲ مهره قرمز و دومی شامل ۵ مهره آبی و یک مهره قرمز است. ۲ مهره به تصادف و با هم از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس مهره‌ای به تصادف از ظرف دوم خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره انتخابی از ظرف دوم قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{3}{20}$ ۳) $\frac{9}{40}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ظرف اول		ظرف دوم	
هر دو آبی	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$	$\xrightarrow{\text{قرمز}}$	$\frac{1}{8}$
یکی آبی یکی قرمز	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}$	$\xrightarrow{\text{قرمز}}$	$\frac{2}{8}$
هر دو قرمز	$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$	$\xrightarrow{\text{قرمز}}$	$\frac{3}{8}$

اگر پیشامد خروج مهره قرمز از ظرف دوم را با R نمایش دهیم، آنگاه طبق نمودار درختی داریم:

$$P(R)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\times\frac{1}{8}+\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}\times\frac{2}{8}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}\times\frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{10}\times\frac{1}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{3+12+3}{80}=\frac{18}{80}=\frac{9}{40}$$