مدت زمان آزمون: -

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون A1 شمارش و احتمال**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

1. چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت، به طوری که رقم یکان و دهگان آن از مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ و رقم صدگان آن از مجموعهٔ $B = \{۴ , ۵ , ۶\}$ باشد؟

۱) ۲۴ **۲)** ۳۰ **۳)** ۳۶ **۴)** ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$\underbrace{\underset{\text{یکان}}{\_\_}\ \underset{\text{دهگان}}{\_\_}}_{\{۱,۲,۳,۴\}}\quad \underset{\{۴,۵,۶\}}{\underset{\downarrow}{\underset{\text{صدگان}}{\_\_}}}$$

با توجه به اینکه عدد ۴ در هر دو مجموعهٔ A و B حضور دارد، برای ساخت عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز، باید مسئله را حالت‌بندی کنیم و در نهایت طبق اصل جمع، حالت‌ها را با هم جمع کنیم:

حالت اول: عدد ۴ در یکان یا دهگان قرار گیرد که با توجه به متمایزبودن ارقام، دیگر صدگان نمی‌تواند عدد ۴ را داشته باشد:

$$۶ = \underset{\{۴\}}{۱} \times \underset{\{۱,۲,۳\}}{۳} \times \underset{\{۵,۶\}}{۲} \quad : \quad \text{عدد ۴ در یکان باشد}$$

$$۶ = \underset{\{۱,۲,۳\}}{۳} \times \underset{\{۴\}}{۱} \times \underset{\{۵,۶\}}{۲} \quad : \quad \text{عدد ۴ در دهگان باشد}$$

حالت دوم: عدد ۴ بتواند در صدگان قرار گیرد که در این صورت با توجه به متمایزبودن ارقام، عدد ۴ در یکان و دهگان نمی‌تواند جایگاهی داشته باشد:

$$۱۸ = \underbrace{\underline{۲}\ \ \underline{۳}}_{\{۱ , ۲ , ۳\}}\ \ \underset{\{۴ , ۵ , ۶\}}{\underset{\downarrow}{\underline{۳}}}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات مطلوب} = ۶ + ۶ + ۱۸ = ۳۰$$

۲) با حرف کلمه ی «گل پیرا» چند کلمه ی چهار حرفی (بدون تکرار حروف) می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ی» وجود داشته باشند ولی کنار هم نباشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۶۴ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

تعداد کل کلمه های چهار حرفی شامل «پ» و «ی» که با شش حرف متمایز کلمه ی «گل پیرا» می توان نوشت، برابر است با $\binom{۴}{۲} \times ۴! = ۱۴۴$ ، زیرا باید ابتدا دو حرف از میان حرف هایی غیر از «پ» و «ی» انتخاب کنیم که پس از این کار ، این دو حرف در کنار «پ» و «ی» چهار شی متمایز هستند که در کنار هم !۴ جایگشت دارند.

در این ۱۴۴ حالت، تعداد حالت هایی را به دست می آوریم که «پ» و «ی» کنار هم باشند. به این منظور، دو حرف ازمیان چهار حرف باقی مانده انتخاب می کنیم ($\binom{۴}{۲}$ حالت) . اما «پ» و «ی» نیز کنار هم !۲ جایگشت دارند و با دو حرف دیگر، تشکیل سه شی متمایز می دهند که این سه شی در کنار هم !۳ جایگشت دارند؛ پس طبق اصل ضرب در $\binom{۴}{۲} \times ۲! \times ۳! = ۶ \times ۲ \times ۶ = ۷۲$ حالت «پ» و «ی» کنار هم هستند، بنابراین:

تعداد حالت های مطلوب سوال $= ۱۴۴ - ۷۲ = ۷۲$

۳) چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که «یکان < دهگان ≤ صدگان» باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۵ ۴) ۱۶۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای حل سؤال دو حالت در نظر می‌گیریم. اول اینکه «یکان < دهگان = صدگان» برای ساختن چنین عددی کافی است که ۲ رقم متمایز مانند $\{a,b\}$ از $\{۰,۱,\ldots,۹\}$ انتخاب کنیم و رقم بزرگتر را به صدگان و دهگان نسبت دهیم، رقم کوچکتر را به یکان. پس در این حالت $۴۵ = \binom{۱۰}{۲}$ عدد داریم.

در حالت دوم «یکان < دهگان < صدگان». در این حالت باید ۳ رقم متمایز انتخاب کنیم و رقم بزرگتر را به صدگان، رقم متوسط را به دهگان و رقم کوچکتر را به یکان نسبت دهیم. یعنی $۱۲۰ = \binom{۱۰}{۳}$ حالت مختلف.

در نتیجه $۱۶۵ = ۴۵ + ۱۲۰$ عدد با این ویژگی وجود دارند.

④ به چند طریق می‌توان ۱۰ کارت به رنگ‌های متمایز را درون ۱۰ جعبه متمایز قرار دارد به‌طوری که فقط یکی از جعبه‌ها خالی بماند؟

۱) $۱۰!$ ۲) $۱۰! \times ۴۵$ ۳) $۱۰! \times ۱۴۴$ ۴) $۱۰! \times ۱۰$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا یکی از جعبه‌ها را انتخاب می کنیم و کنار می‌گذاریم (جعبه‌ای که باید خالی بماند) که این کار به $۱۰ = \frac{۱۰!}{۱! \times ۹!} = \binom{۱۰}{۱}$ طریق امکان‌پذیر است.

سپس از بین ۹ جعبه باقیمانده، یک جعبه انتخاب می‌کنیم که قرار است درون آن دو کارت قرار دهیم، انتخاب جعبه به $۹ = \frac{۹!}{۱! \times ۸!} = \binom{۹}{۱}$ طریق امکان‌پذیر است.

سپس دو کارت از بین ۱۰ کارت را انتخاب کرده تا در جعبه‌ای که در مرحله قبل انتخاب کرده‌ایم، قرار دهیم و این کار به $۴۵ = \frac{۱۰!}{۲! \times ۸!} = \binom{۱۰}{۲}$ طریق امکان‌پذیر است.

حال ۸ کارت باقی می‌ماند و ۸ جعبه خالی که به $۸!$ طریق می‌توان کارت‌های باقیمانده را درون آن‌ها قرار دارد.

بنابراین طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$۱۰ \times ۹ \times ۴۵ \times ۸! = \underbrace{۱۰ \times ۹ \times ۸!}_{۱۰!} \times ۴۵ = ۱۰! \times ۴۵$$

⑤ شخصی می‌خواهد یک مهمانی ۶ نفره از میان ۱۰ نفر دوست خود ترتیب دهد. اگر ۲ نفر از این ۱۰ نفر نخواهند با هم به این مهمانی بیایند، انتخاب مهمان‌ها به چند حالت صورت می‌گیرد؟

۱) ۵۶ ۲) ۱۱۲

۳) ۱۴۰ ۴) ۸۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

این دو نفر را A وB می‌نامیم. تعداد انتخاب‌هایی که A وB هیچ‌کدام شرکت ندارند، برابر است با:

$$C(۸,۶) = \frac{۸!}{۲!۶!} = ۲۸$$

تعداد انتخاب‌هایی نیز که فقط یکی از افراد A وB حضور دارند برابر است با: $۲ \times C(۸,۵) = ۲ \times \frac{۸!}{۵!۳!} = ۲ \times ۵۶ = ۱۱۲$

جواب نهایی برابر است با: $۱۱۲ + ۲۸ = ۱۴۰$

۶) با حروف کلمه «گل پیرا» چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ی» وجود داشته باشند ولی کنار هم نباشند؟

۱) ۷۲
۲) ۲۸۸
۳) ۲۶۴
۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

تعداد کل کلمه‌های چهار حرفی شامل «پ» و «ی» که با شش حرف متمایز کلمه «گل پیرا» می‌توان نوشت، برابر است با $\binom{4}{2} \times 4! = 144$، زیرا باید ابتدا دو حرف از میان حرف‌هایی غیر از «پ» و «ی» انتخاب کنیم که پس از این کار، این دو حرف در کنار «پ» و «ی» چهار شیء متمایز هستند که در کنار هم !۴ جایگشت دارند.

در این ۱۴۴ حالت، تعداد حالت‌هایی را به‌دست می‌آوریم که «پ» و «ی» کنار هم باشند. به این منظور، دو حرف از میان چهار حرف باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم ($\binom{4}{2}$ حالت). اما «پ» و «ی» نیز کنار هم !۲ جایگشت دارند و با دو حرف دیگر، تشکیل سه شیء متمایز می‌دهند که این سه شیء هم درکنار هم !۳ جایگشت دارند؛ پس طبق اصل ضرب در $\binom{4}{2} \times 2! \times 3! = 6 \times 2 \times 6 = 72$ حالت «پ» و «ی» کنار هم هستند، بنابراین:

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب سؤال} = 144 - 72 = 72$$

۷) در چند جایگشت از حروف کلمه tehran حرف r بعد از t آمده است، به‌طوری‌که این دو حرف در کنار یکدیگر نیستند؟

۱) ۱۲۰
۲) ۲۴۰
۳) ۳۶۰
۴) ۴۸۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا تمام جایگشت‌هایی را که حرف r و t در کنار یکدیگر نیستند، می‌یابیم. برای این کار تمام حالات را محاسبه می‌کنیم و حالاتی را که این دو کنار هم هستند، از آن کم می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{همه حالات} = 6! \\ t \text{ کنار هم بودن } r = 2! \times 5! \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حالات مطلوب} = 6! - 2 \times 5!$$

$$= 720 - 240 = 480$$

در نیمی از حالات r بعد t و نیمی دیگر از حالات r قبل t آمده است؛ پس مطلوب مسئله برابر است با: $\frac{480}{2} = 240$

۸) چند مقدار قابل قبول برای x وجود دارد تا معادله $\binom{4x+15}{2x} = \binom{4x+15}{x^2}$ برقرار باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از آن‌جا که انتخاب از $4x+15$ حالت صورت گرفته است، پس در یکی از حالات می‌تواند $x^2 = 2x$ برقرار باشد: $x^2 = 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

هر دو مقدار برای x پذیرفته هستند.

از طرفی می‌دانیم که $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ پس یعنی حالت $x^2 + 2x = 4x + 15$ نیز پذیرفته است:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

که حالت $x = -3$ باعث منفی شدن $2x$ می‌شود و پذیرفته نیست.

پس در مجموع ۳ جواب برای x وجود دارد.

۹) ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به‌گونه‌ای که هیچ دو دانش‌آموزی از پایه دوازدهم کنار هم نباشند؟

۱) $6! \times 7!$
۲) $5! \times 6!$
۳) $5! \times 7!$
۴) $4! \times 6!$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$\times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times$

فرض کنید ابتدا ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم در صف بایستند که این کار به $6!$ طریق امکان‌پذیر است. اگر محل قرار گرفتن این دانش‌آموزان را مطابق شکل با $\bigcirc$ نمایش دهیم، آنگاه ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم می‌توانند در مکان‌هایی که با علامت $\times$ در شکل مشخص شده قرار گیرند. بعد از انتخاب ۴ مکان از ۷ مکان مشخص شده باید دقت کرده که $4!$ جایگشت برای ایستادن این ۴ دانش‌آموز در این مکان‌ها وجود دارد، بنابراین تعداد حالت‌های ایستادن این افراد در یک صف برابر است با:

$$6! \times \binom{7}{4} \times 4! = 6! \times \frac{7!}{4!3!} \times 4! = \frac{6\times5!\times7!}{3!} = 5! \times 7!$$

۱۰) از بین ۶ زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توان ۶ نفر را انتخاب کرد، به‌طوری که بین افراد انتخابی دقیقاً دو زوج وجود داشته باشد؟

۱) ۱۶۰ **۲)** ۲۴۰

۳) ۳۶۰ **۴)** ۴۸۰

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا از بین ۶ زوج، ۲ زوج، یعنی ۴ نفر، انتخاب می‌کنیم. حال ۲ نفر باقی‌مانده را از بین ۴ زوج دیگر انتخاب می‌کنیم. برای آنکه این دو فرد زن و شوهر نباشند، باید از دو خانواده مختلف انتخاب شوند. پس از بین ۴ زوج باقی‌مانده، ۲ زوج انتخاب کرده و از هر کدام از زوج‌های انتخاب شده یک نفر (زن یا شوهر) را انتخاب می‌کنیم.

$$n = \binom{۶}{۲} \times \binom{۴}{۲} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{ازفر هر زوج، یک نفر انتخاب می شود}} = ۳۶۰$$

۱۱) با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد چهاررقمی زوج و کم‌تر از ۴۵۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۹۷ **۲)** ۲۵۵

۳) ۷۲ **۴)** ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به رقم هزارگان، انتخاب‌های ممکن را به ۳ حالت تقسیم می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{ll}
۴ \longrightarrow ۰,۲ & \\
\boxed{۱}\ \boxed{۳}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲} & \rightarrow ۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸ \\
۲ \longrightarrow ۰,۴ & \\
\boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲} & \rightarrow ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴ \\
۱,۳ \longrightarrow ۰,۲,۴ & \\
\boxed{۲}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۳} & \rightarrow ۲ \times ۴ \times ۳ \times ۳ = ۷۲
\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ تعداد $= ۱۸ + ۲۴ + ۷۲ = ۱۱۴$

۱۲) اعداد ۱,۲,۳,...,۷ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. احتمال آنکه ارقام زوج یک در میان باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم که تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر کل جایگشت‌های ممکن است، پس داریم:

$n(S) = ۷!$

حال برای آنکه ارقام زوج یک در میان باشند، حالات زیر امکان‌پذیر است:

فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد
فرد فرد زوج فرد زوج فرد زوج
زوج فرد زوج فرد زوج فرد فرد

$\Rightarrow n(A)=3\times3!\times4!$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳\times۳!\times۴!}{۷!} = \frac{۳}{۳۵}$$

۱۳) در خانواده‌ای با ۳ فرزند، احتمال این‌که فرزندان در سه روز متوالی هفته به دنیا آمده باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴۹}$
۲) $\frac{۶}{۴۹}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۶}{۳۴۹}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

تعداد حالت‌های تولد سه فرزند در روزهای هفته = تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

$= ۷ \times ۷ \times ۷ = ۷^{۳}$

(دوشنبه، یکشنبه، شنبه)}= A سه روز متوالی

{(یکشنبه، شنبه و جمعه) ..... , (سه‌شنبه، دوشنبه، یکشنبه) ,

!۳=جابجایی سه نفر در سه روز متوالی و n(A) = ۷

$\Rightarrow$احتمال مطلوب= $\frac{۷\times۳!}{۷^{۳}} = \frac{۳!}{۷^{۲}} = \frac{۶}{۴۹}$

۱۴) تاسی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که حداقل یک بار عدد ۴ ظاهر شود و عدد ۴ بزرگ‌ترین عدد رو شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۱۳}{۱۰۸}$
۳) $\frac{۳۷}{۲۱۶}$
۴) $\frac{۳۱}{۲۱۶}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۱۶$

حالت‌های مطلوب:

$$\left.\begin{array}{ll} \binom{۳}{۱} \times \overset{\{۱,۲,۳\}}{\overset{\downarrow}{۳^۲}} = ۲۷ & : \text{فقط یکی از تاس ها ۴ باشد} \\ \binom{۳}{۲} \times ۳ = ۹ & : \text{دو تا از تاس ها ۴ باشد} \\ ۱ & : \text{هر سه تاس ۴ باشد} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۳۷$$

$P(A) = \frac{۳۷}{۲۱۶}$

۱۵) در خانواده‌ای با ۴ فرزند، احتمال آنکه فرزند سوم پسر باشد یا همه فرزندان هم‌جنس باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$
۲) $\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$

اگر پیشامد پسر بودن فرزند سوم را A و پیشامد هم‌جنس بودن همه فرزندان را B بنامیم، داریم: $n(A) = ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۸$

$B = \{(\text{پ پ پ پ}) \text{و} (\text{د د د د})\} \Rightarrow n(B) = ۲$

حال $P(A \cup B)$ را می‌خواهیم. می‌دانیم که $A \cap B = \{(\text{پ پ پ پ})\}$ است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{۸}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶}$$

۱۶) ۱۰ نفر که فقط دو نفر آن‌ها با هم برادر هستند در یک صف قرار می‌گیرند، با کدام احتمال بین دو برادر یک نفر خاص به همراه دو نفر دیگر قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۶۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۲

بین دو برادر ۳ نفر قرار می‌گیرند که یک نفر آن‌ها مشخص است و از بین ۷ نفر دیگر ۲ نفر انتخاب می‌کنیم؛ یعنی $\binom{۷}{۲}$. حال ۳ نفر بین دو برادر !۳ جایگشت دارند و دو برادر نیز به !۲ جایگشت می‌کنند. دو برادر و ۳ نفر بین آن‌ها را یک دسته می‌کنیم که به همراه ۵ نفر دیگر گروه به !۶ جایگشت می‌کنند، پس تعداد حالات مطلوب برابر $\binom{۷}{۲} \times ۳! \times ۲! \times ۶!$ خواهد شد، کل حالات هم !۱۰ است. داریم:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل}} = \frac{\binom{۷}{۲} \times ۳! \times ۲! \times ۶!}{۱۰!}$$

$$= \frac{۲۱ \times ۶ \times ۲}{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰} = \frac{۱۲}{۲۴۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

۱۷) در پرتاب هم زمان دو تاس می‌دانیم که اعداد رو شده در هر دو تاس زوج هستند، احتمال آن‌که مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

فرض می‌کنیم:

A : پیشامد آن‌که اعداد رو شده دو تاس زوج باشند.

B : پیشامد آن‌که مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد.

احتمال موردنظر $P(B|A)$ است که برابر است با:

$$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

$$n(A) = ۳ \times ۳ = ۹ \Rightarrow P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

$$A \cap B = \{(۲,۴),(۴,۲),(۶,۶)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۳}$$

۱۸) اگر $P(A|B)=\frac{۳}{۷}$ و $P(B'|A)=\frac{۱۳}{۱۴}$ باشد، آنگاه احتمال رخ دادن پیشامد A چند برابر احتمال رخ دادن پیشامد B است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$P(A|B)=\frac{۳}{۷}\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۷}P(B)\quad (*)$$

$$P(B'|A)=\frac{P(B'\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۱۳}{۱۴}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{P(A)-\frac{۳}{۷}P(B)}{P(A)}=\frac{۱۳}{۱۴}\Rightarrow ۱۴P(A)-۶P(B)=۱۳P(A)$$

$$\Rightarrow P(A)=۶P(B)$$

۱۹) نرگس به احتمال ۰/۷۵ در تیم کوهنوردی دانشگاه و به احتمال ۰/۴ در تیم ملی فوتسال انتخاب می‌شود. احتمال آن‌که نرگس حداقل در یکی از دو تیم انتخاب شود، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۹۵ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

پیشامدA =انتخاب شدن در تیم کوهنوردی دانشگاه : $P(A)=۰/۷۵$

پیشامدB = انتخاب شدن در تیم ملی فوتسال : $P(B)=۰/۴$

دو پیشامد Aو B مستقل هستند، بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۷۵\times ۰/۴=۰/۳$$

احتمال آن‌که نرگس حداقل در یکی از دو تیم انتخاب شود برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=۰/۷۵+۰/۴-۰/۳=۰/۸۵$$

۲۰) یک تاس سفید و یک تاس سیاه را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامد اینکه تاس سفید مضرب سه باشد، از کدام یک از پیشامدهای زیر مستقل است؟

۱) مجموع دو تاس برابر ۲ باشد.
۲) مجموع دو تاس برابر ۴ باشد.
۳) مجموع دو تاس برابر ۶ باشد.
۴) مجموع دو تاس برابر ۸ باشد.

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

پیشامد A را مضرب ۳ بودن تاس سفید درنظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} n(S) = ۶ \times ۶ \\ n(A) = ۲ \times ۶ \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{۲\times۶}{۶\times۶} = \frac{۱}{۳}$$

برای آنکه پیشامد B مستقل از A باشد، باید:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۳}P(B)$$

با توجه به جدول زیر، گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

گزینه	$P(B)$	$A \cap B$	$P(A \cap B)$
۱	$\frac{۱}{۳۶}$	$\varnothing$	۰
۲	$\frac{۳}{۳۶}$	$\{(۳,۱)\}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	$\frac{۵}{۳۶}$	$\{(۳,۳)\}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۴	$\frac{۵}{۳۶}$	$\{(۳,۵),(۶,۲)\}$	$\frac{۲}{۳۶}$

با توجه به جدول، رابطهٔ $P(A \cap B) = \frac{۱}{۳}P(B)$ تنها در گزینهٔ «۲» برقرار است.

۲۱) دو کیسه داریم که اولی شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و دومی شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. از یکی از این دو کیسه به تصادف مهره‌ای برداشته و در کیسه دیگر می‌گذاریم و سپس یک مهره از کیسه اخیر بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که هر دو مهره خارج شده سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴۰}$ **۲)** $\frac{۹}{۲۰}$ **۳)** $\frac{۳۱}{۱۲۰}$ **۴)** $\frac{۳۱}{۶۰}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

انتخاب یکی از دوکیسه در مرحله اول به‌طور تصادفی و با شانس برابر انجام می‌شود. احتمال انتخاب مهره سفید از کیسه‌های اول و دوم به ترتیب برابر $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۳}{۸}$ است. با افزودن مهره سفید به هر یک از کیسه‌ها، ترکیب آن‌ها دچار تغییر می‌شود. اگر پیشامد خارج شدن دو مهره سفید را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۹} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۱۵} + \frac{۱}{۸} = \frac{۳۱}{۱۲۰}$$

۲۲ سه کیسه داریم. در کیسه اول ۴ مهره آبی و ۲ مهره قرمز، در کیسه دوم ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در کیسه‌سوم ۵ مهره آبی و ۱ مهره قرمز وجود دارد. به تصادف یک کیسه را انتخاب کرده و دو مهره از آن خارج می‌کنیم. اگر دو مهره همرنگ نباشند، با کدام احتمال از کیسه اول خارج شده‌اند؟

۱) $\frac{5}{22}$ ۲) $\frac{9}{22}$

۳) $\frac{8}{45}$ ۴) $\frac{4}{11}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\times\begin{cases} \xrightarrow{\text{انتخاب کیسه ی اول}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{انتخاب دو مهره ی غیر همرنگ}} \dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15} \\ \xrightarrow{\text{انتخاب کیسه ی دوم}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{انتخاب دو مهره ی غیر همرنگ}} \dfrac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} \\ \xrightarrow{\text{انتخاب کیسه ی سوم}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{انتخاب دو مهره ی غیر همرنگ}} \dfrac{\binom{5}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} \end{cases}$$

اگر پیشامد همرنگ نبودن دو مهره را A و پیشامد خارج شدن از کیسه اول را B بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{15} = \frac{22}{45}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} = \frac{8}{45}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{22}{45}} = \frac{4}{11}$$

۲۳ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، تاس می‌ریزیم. اگر پشت بیاید، سه سکه دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش، احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{11}{16}$

پاسخ: گزینه ۴

اگر سکه رو بیاید، تاس می‌ریزیم، بنابراین صرف‌نظر از نتیجه پرتاب تاس، همواره دقیقاً یک سکه رو ظاهر می‌شود. اگر سکه پشت بیاید، سه سکه دیگر پرتاب می‌کنیم که حالت مطلوب آن است که فقط یکی از این سه سکه رو ظاهر شود. اگر پیشامد آنکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{سکه اول رو}} \times 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{سکه اول پشت بیاید}} \times \underbrace{\frac{\binom{3}{1}}{2^3}}_{\text{از سه سکه دیگر یکی رو بیاید}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

۲۴) دو جعبه داریم که اولی دارای یک لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب و دومی دارای ۶ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول یک لامپ به تصادف انتخاب کرده و در جعبه دوم قرار می‌دهیم و سپس ۲ لامپ به‌تصادف از جعبه دوم خارج می‌کنیم. احتمال آنکه لامپ‌های خارج شده از جعبه دوم هر دو سالم یا هر دو معیوب باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۴۵}$ ۳) $\frac{۲۲}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۴۵}$

پاسخ: گزینه ۳

اگر پیشامدهای $B_۱$ و $B_۲$ به‌ترتیب سالم و معیوب بودن لامپ انتخابی از جعبه اول و پیشامد A سالم بودن هر دو لامپ یا معیوب بودن هر دو لامپ انتخابی از جعبه دوم باشد، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۷}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{۲}{۳} \times \frac{\binom{۶}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۲۱+۳}{۴۵} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱۵+۶}{۴۵} = \frac{۸}{۴۵} + \frac{۱۴}{۴۵} = \frac{۲۲}{۴۵}$$

۲۵) احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{۷}{۹}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه۴

اگر احتمال موفقیت فرد را با $P(A) = x$ نشان دهیم، احتمال موفقیت دوست او $P(B) = \frac{x}{۲}$ است.

چون A و B مستقل‌اند، پس: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A \cup B) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۹}$$

$$\Rightarrow x + \frac{x}{۲} - (x \times \frac{x}{۲}) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} - \frac{۳x}{۲} + \frac{۷}{۹} = ۰$$

$$\Delta = (-\frac{۳}{۲})^۲ - ۴ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۹} = \frac{۹}{۴} - \frac{۱۴}{۹} = \frac{۸۱-۵۶}{۳۶} = \frac{۲۵}{۳۶}$$

$$x = \frac{\frac{۳}{۲} \pm \frac{۵}{۶}}{۱} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۴}{۶} > ۱ \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \text{ ق ق} \end{cases}$$