۱) اگر $۳^{x-۲} = ۶^{x}$ باشد، آنگاه مقدار عبارت $(\sqrt{۲})^{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ **۲)** $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ **۴)** $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

ابتدا مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$۳^{x-۲} = (۳ \times ۲)^{x}$$
$$\Rightarrow ۳^{x} \times ۳^{-۲} = ۳^{x} \times ۲^{x} \xrightarrow{۳^{x} \neq ۰} \frac{۱}{۹} = ۲^{x}$$
$$\Rightarrow x = \log_{۲}^{\frac{۱}{۹}}$$

حاصل عبارت خواسته شده، برابر است با:

$$(\sqrt{۲})^{x} = (\sqrt{۲})^{\log_{۲}^{\frac{۱}{۹}}} = (\tfrac{۱}{۹})^{\log_{۲}^{\sqrt{۲}}} = (\tfrac{۱}{۹})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

۲) اگر $\log^{(۳^{-x}+۱)} = \log^{۲۸} - x\log^{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\log_{x}^{۹\sqrt{۳}}-۱}{۱-\log_{\sqrt{۳}}^{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ **۲)** $-\frac{۳}{۲}$

۳) ۳ **۴)** -۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

$$\log^{(۳^{-x}+۱)} = \log^{۲۸} + \log^{۳^{-x}}$$
$$\Rightarrow \log^{(۳^{-x}+۱)} = \log^{(۲۸)(۳^{-x})} \Rightarrow ۳^{-x}(۲۸-۱) = ۱$$
$$\Rightarrow ۳^{-x} = \frac{۱}{۲۷} = ۳^{-۳} \Rightarrow x = ۳$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\log_{۳}^{۹\sqrt{۳}}-۱}{۱-\log_{\sqrt{۳}}^{۳}} = \frac{\log_{۳}^{۳^{\frac{۵}{۲}}}-۱}{۱-۲} = \frac{\frac{۵}{۲}\log_{۳}^{۳}-۱}{-۱}$$
$$= -(\frac{۵}{۲}-۱) = -\frac{۳}{۲}$$

۳) در کدام گزینه نمودار دو تابع f و g بر هم منطبق <u>نیستند</u>؟

۱) $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{x}$ ، $g(x) = ۲^{-x}$

۲) $f(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}^{(x-۱)}$ ، $g(x) = -\log_{۲}^{(x-۱)}$

۳) $f(x) = ۲^{x}$ ، $g(x) = -۲^{-x}$

۴) $f(x) = ۲ + \log_{۳}^{\frac{۱}{x}}$ ، $g(x) = ۲ - \log_{۳}^{x}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

با ساده کردن تابع g در هر گزینه و بررسی تک‌تک گزینه‌ها، گزینهٔ درست را پیدا می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $g(x) = (۲^{-۱})^{x} = (\frac{۱}{۲})^{x} = f(x)$

گزینهٔ «۲»: $g(x) = \log_{۲^{-۱}}^{(x-۱)} = \log_{\frac{۱}{۲}}^{(x-۱)} = f(x)$

گزینهٔ «۳»: $g(x) = -(۲^{-۱})^{x} = -(\frac{۱}{۲})^{x} \neq f(x)$

گزینهٔ «۴»: $g(x) = ۲ + \log_{۳}^{x^{-۱}} = ۲ + \log_{۳}^{\frac{۱}{x}} = f(x)$

توجه داشته باشید که در همه گزینه‌ها، دامنه‌های هر دو تابع با هم برابر هستند.

۴) معادله $۲^{۳x} = x^{۶}$ چند، ریشهٔ مثبت دارد؟

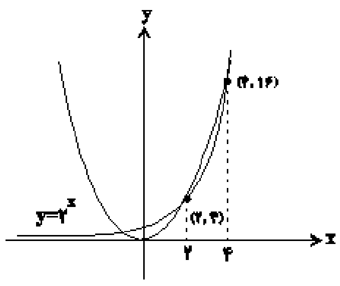
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ«۲»

از دو طرف معادله ریشهٔ سوم می‌گیریم، بنابراین: $۲^{x} = x^{۲}$

با توجه به رسم دو تابع $y_۱ = x^{۲}$ و $y_۲ = ۲^{x}$ می بینیم که نمودارها در سه نقطه یکد یگر را قطع می‌کنند. که دو نقطه آن درxهای مثبت و یک نقطه درxهای منفی قرار دارد. بنابراین معادله دو ریشه مثبت دارد.



⑤ به‌ازای چند عدد صحیح نامعادله $\log_{x^2}(x^2-2x) \le \log_x \sqrt{3}$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) پنج

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_{x^2}(x^2-2x) \le \log_x \sqrt{3} \Rightarrow \log_{x^2}(x^2-2x) \le \log_{x^2} 3$$

با توجه به آن‌که $x \in Z$ مبنای لگاریتم است، پس قطعاً $|x| > 1$ است. پس داریم:

$$x^2 - 2x \le 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \le 0 \Rightarrow -1 \le x \le 3$$

اعداد ۱-، ۰، ۱ لگاریتم را تعریف نشده می‌کنند و $x = 2$ و $x = 3$ را در دامنه لگاریتم بررسی می‌کنیم:

وجود ندارد: $x = 2 \Rightarrow \log_4 0$

$x = 3 \Rightarrow \log_9 3$

پس فقط یک عدد پذیرفته است.

⑥ جواب معادله $x + \log_{15}(3^x+\sqrt{2}) = 2\log_{15} 2 + x\log_{15} 5$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\log_3 2$ ۲) $\frac{1}{2}\log_2 3$ ۳) $\frac{3}{2}\log_3 2$ ۴) $\frac{3}{2}\log_2 3$

پاسخ: گزینه ۱

$$x = \log_{15} 4 + \log_{15} 5^x - \log_{15}(3^x+\sqrt{2}) \Rightarrow x = \log_{15} \frac{4\times 5^x}{3^x+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 15^x = \frac{4\times 5^x}{3^x+\sqrt{2}} \xrightarrow{\div 5^x} 3^x = \frac{4}{3^x+\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{3^x=t} t^2 + \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\begin{cases} t = -2\sqrt{2} \quad \text{غ ق ق} \\ t = \sqrt{2} \Rightarrow 3^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_3 2 \end{cases}$$

۷) اگر $2^x = 3^{2-x}$، حاصل $\frac{2x}{x+2\log_6^4}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\log_{12}^6$
۳) $\log_{12}^9$
۴) $\log_{18}^9$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا از دو طرف معادله $2^x = 3^{2-x}$ لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم تا x به دست آید.

$$2^x = 3^{2-x} \Rightarrow \log_2^{2^x} = \log_2^{3^{2-x}}$$

$$\Rightarrow x = (2-x)\log_2^3 \Rightarrow x = 2\log_2^3 - x\log_2^3$$

$$\Rightarrow x + x\log_2^3 = 2\log_2^3 \Rightarrow x(1+\log_2^3) = 2\log_2^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\log_2^3}{1+\log_2^3} = \frac{2\log_2^3}{\log_2^2+\log_2^3} = \frac{2\log_2^3}{\log_2^6} = 2\log_6^3$$

حال عبارت $\frac{2x}{x+2\log_6^4}$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{2x}{x+2\log_6^4} = \frac{2\times 2\log_6^3}{2\log_6^3+2\log_6^4} = \frac{2\log_6^3}{\log_6^{12}}$$

$$= 2\log_{12}^3 = \log_{12}^{3^2} = \log_{12}^9$$

توجه کنید که اگر لگاریتم‌ها تعریف شده باشند، داریم:

$$\frac{\log_a^b}{\log_a^c} = \log_c^b$$

اثبات: اگر قرار دهیم $\log_a^b = y$ و $\log_a^c = z$، آن‌گاه $b = a^y$ و $c = a^z$ است.

در نتیجه:

$$\log_c^b = \log_{a^z}^{a^y} = \frac{y}{z}\log_a^a = \frac{y}{z} = \frac{\log_a^b}{\log_a^c}$$

۸) جمعیت گونه خاصی از حشرات، سالانه ۱۰ درصد افزایش می‌یابد. پس از حداقل چند سال، جمعیت این گونه خاص بیش از یازده برابر می‌شود؟ $(\log 11 \simeq 1/041)$

۱) ۲۴
۲) ۲۵
۳) ۲۶
۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنیم جمعیت اولیه این گونه خاص p_0 و جمعیت آن پس از n سال $p(n)$ باشد؛ داریم:

$$p(n) = p_0(1/1)^n$$

$$\text{فرض}: p(n) > 11p_0 \Rightarrow (1/1)^n > 11 \Rightarrow n\underbrace{\log 1/1}_{\log 11-1} > \log 11$$

$$\Rightarrow n > \frac{\log 11}{\log 11 - 1}$$

با جای‌گذاری مقدار تقریبی $\log 11$ و محاسبه کسر فوق داریم:

$$n > 25/39 \xrightarrow{n\in N} n \geq 26$$

یعنی پس از حداقل گذشت ۲۶ سال، مطمئنیم جمعیت این گونه خاص از حشرات بیش از ۱۱ برابر می‌شود.

۹) اگر $x > 0$ و $(3x)^{\log_a 3} - (5x)^{\log_a 5} = 0$ باشد، آن‌گاه x کدام است؟ $(a > 1)$

۱) $\frac{1}{125}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) ۱ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲

برای حل سؤال، از دو طرف معادلهٔ $(3x)^{\log_a 3} = (5x)^{\log_a 5}$، در مبنای a لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_a 3(\log_a 3x) = \log_a 5(\log_a 5x)$$

$$\Rightarrow \log_a 3(\log_a x + \log_a 3) = \log_a 5(\log_a x + \log_a 5)$$

$$\Rightarrow (\log_a 3)^2 + (\log_a 3)(\log_a x) = (\log_a 5)^2 + (\log_a 5)(\log_a x)$$

$$\Rightarrow (\log_a 3)^2 - (\log_a 5)^2 = (\log_a 5 - \log_a 3)(\log_a x) \Rightarrow -(\log_a 3 + \log_a 5) = \log_a x$$

$$\Rightarrow -\log_a 15 = \log_a x \Rightarrow \log_a \frac{1}{15} = \log_a x \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

۱۰) قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\log x = \sqrt{\log(x^7) - 12}$ کدام است؟

۱) ۱۱۰۰۰ ۲) ۹۰۰۰

۳) ۱۰۰۰۰ ۴) ۹۰۹۰

پاسخ: گزینه ۲

$$\log x = \sqrt{\log(x^7) - 12} \Rightarrow (\log x)^2 = \log x^7 - 12$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 7\log x - 12 \Rightarrow (\log x)^2 - 7(\log x) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\log x - 3)(\log x - 4) = 0 \Rightarrow \log x = 3 \quad \text{یا} \quad \log x = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 10^3 \quad \text{یا} \quad x_2 = 10^4$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = |10^4 - 10^3| = 10000 - 1000 = 9000$$

۱۱) اگر x_2 و x_1 ریشه‌های معادله $x^{2-\log x} = \frac{1}{100}x$ باشند، حاصل $0/1x_2 + 10x_1$ کدام است؟ $(x_1 < x_2)$

۱) ۱/۱ ۲) ۱۱ ۳) ۲/۱ ۴) ۱/۲

پاسخ: گزینه ۲

از طرفین تساوی، لگاریتم در پایهٔ ۱۰ می‌گیریم.

$$\log x^{2-\log x} = \log(\frac{1}{100}x) \Rightarrow (2 - \log x)\log x = \log\frac{1}{100} + \log x$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - \log x - 2 = 0 \Rightarrow (\log x + 1)(\log x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \log x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{10} \\ \log x = 2 \Rightarrow x_2 = 100 \end{cases} \Rightarrow 0/1x_2 + 10x_1 = 11$$

۱۲) اگر داشته باشیم $\log_{۲}^{x} = \log_{y}^{۱۶}$ و $xy = ۶۴$، حاصل $(\log_{۲} \frac{x}{y})^{۲}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۲۰ ۴) $\frac{۲۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

راه‌حل اول: قرار می‌دهیم $\log_{۲}x = \log_{y}۱۶ = k$، بنابراین داریم:

$$\log_{۲}x = k \Rightarrow x = ۲^{k}$$

$$\log_{y}۱۶ = k \Rightarrow y^{k} = ۱۶ = ۲^{۴} \Rightarrow y = ۲^{\frac{۴}{k}}$$

با جای‌گذاری مقدارهای به‌دست آمده برای x و y در رابطهٔ $xy = ۶۴$ داریم:

$$xy = ۶۴ \Rightarrow ۲^{k} \times ۲^{\frac{۴}{k}} = ۲^{۶} \Rightarrow ۲^{k+\frac{۴}{k}} = ۲^{۶}$$

$$\Rightarrow k + \frac{۴}{k} = ۶ \Rightarrow k^{۲} - ۶k + ۴ = ۰$$

با حل این معادله به جواب‌های $k = ۳ \pm \sqrt{۵}$ می‌رسیم. بنابراین:

$$(\log_{۲} \frac{x}{y})^{۲} = (\log_{۲}x - \log_{۲}y)^{۲} = (k - \frac{۴}{k})^{۲}$$

$$= (۳ \pm \sqrt{۵} - \frac{۴}{۳\pm\sqrt{۵}})^{۲} = (۳ \pm \sqrt{۵} - (۳ \mp \sqrt{۵}))^{۲} = (\pm۲\sqrt{۵})^{۲} = ۲۰$$

راه‌حل دوم:

$$\log_{۲}^{x} = \log_{y}^{۱۶} = \log_{y}^{۲^{۴}} = ۴\log_{y}^{۲} = \frac{۴}{\log_{۲}^{y}}$$

$$\Rightarrow \log_{۲}^{x} \, . \, \log_{۲}^{y} = ۴ \quad (۱)$$

$$xy = ۶۴ = ۲^{۶} \Rightarrow \log_{۲}^{xy} = ۶ \Rightarrow \log_{۲}^{x} + \log_{۲}^{y} = ۶$$

$$\xrightarrow{\text{به توان 2}} (\log_{۲}^{x})^{۲} + ۲\log_{۲}^{x} \, . \, \log_{۲}^{y} + (\log_{۲}^{y})^{۲} = ۳۶$$

$$\xrightarrow{(۱)} (\log_{۲}^{x})^{۲} + (\log_{۲}^{y})^{۲} = ۳۶ - ۸ = ۲۸$$

$$(\log \frac{x}{y})^{۲} = (\log_{۲}^{x} - \log_{۲}^{y})^{۲}$$

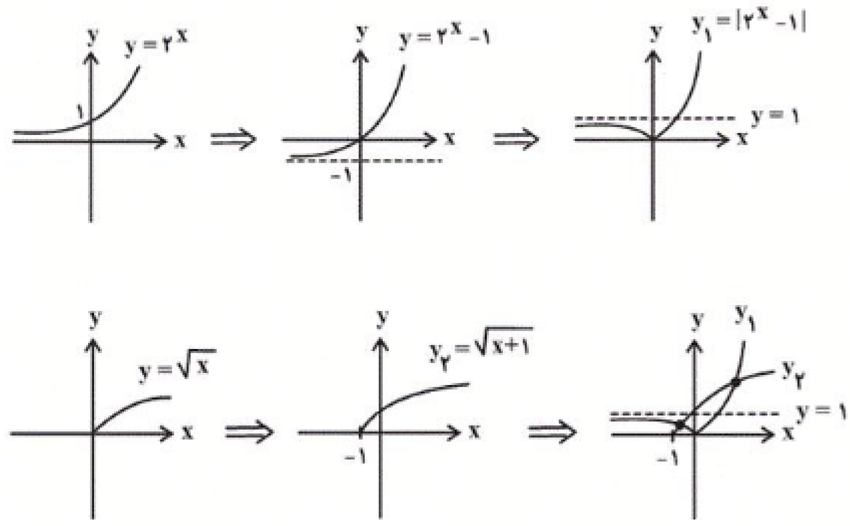
$$= (\log_{۲}^{x})^{۲} + (\log_{۲}^{y})^{۲} - ۲\log_{۲}^{x} \, . \, \log_{۲}^{y} \xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} ۲۸ - ۸ = ۲۰$$

۱۳) معادله $\sqrt{x+1} = |2^x - 1|$ چند جواب دارد؟

۱) دو جواب مثبت
۲) فقط یک جواب مثبت
۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی
۴) جواب ندارد.

پاسخ: گزینه ۳

معادله را می‌توانیم به روش هندسی حل کنیم به این صورت که نمودار توابع طرفین تساوی را رسم می‌کنیم. تعداد نقاط برخورد دو نمودار، تعداد جواب‌های معادله است.



معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۱۴) اگر $5^{\log x} - 3^{(\log x)-1} = 3^{(\log x)+1} - 5^{(\log x)-1}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{3}}^{(x-19)}$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

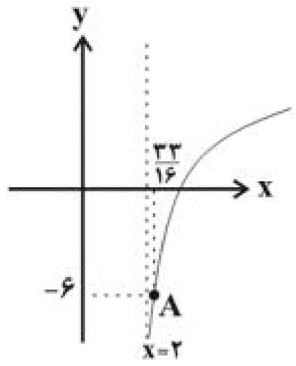
$$5^{\log x} + 5^{(\log x)-1} = 3^{(\log x)+1} + 3^{(\log x)-1}$$

$$\Rightarrow 5^{\log x}\left(1+\frac{1}{5}\right) = 3^{\log x}\left(3+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{6}{5}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \frac{25}{9} \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{(x-19)} = \log_{\sqrt{3}}^{81} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^4} = 8\log_3^3 = 8$$

۱۵) اگر شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ۳\log_{۲b}(x+۴a)$ باشد، $b-a$ کدام است؟



۱) ۲/۵
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آنکه نمودار تابع به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل شده است، $+۴a = -۲$ می‌باشد، پس: $a = -۰/۵$ است.

با توجه به نمودار داده‌شده، نقطه $A\left(\frac{۳۳}{۱۶}, -۶\right)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$-۶ = ۳\log_{۲b}^{\left(\frac{۳۳}{۱۶}-۲\right)} \Rightarrow \log_{۲b}^{\frac{۱}{۱۶}} = -۲ \Rightarrow (۲b)^{-۲} = \frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴b^۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow b-a = ۲-(-۰/۵) = ۲/۵$$

نکته: $b = -۲$ قابل قبول نیست چون پایه لگاریتم نمی‌تواند منفی باشد.

۱۶) حاصل‌ضرب جواب‌های معادله $\log_۲^x - \log_x^۸ = ۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_۲^x - \log_x^{۲^۳} = ۲ \Rightarrow \log_۲^x - ۳\log_x^۲ = ۲$$

با توجه به اینکه $\log_x^۲ = \frac{۱}{\log_۲^x}$ بنابراین:

$$\log_۲^x - \frac{۳}{\log_۲^x} = ۲ \xrightarrow{\log_۲^x = A} A - \frac{۳}{A} = ۲$$

$$\xrightarrow{\times A} A^۲ - ۲A - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = -۱ \Rightarrow \log_۲^x = -۱ \\ A = ۳ \Rightarrow \log_۲^x = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲} \\ x_۲ = ۸ \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل ضرب جواب ها} = \left(\frac{۱}{۲}\right) \times (۸) = ۴$$

۱۷) تابع f با ضابطه $f(x) = a + \log_{۲}^{(bx-۵)}$ از نقاط (۲،۷) و (۳،۹) می‌گذرد. $f(۷)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned} f(۲) = ۷ \Rightarrow a + \log_{۲}^{(۲b-۵)} = ۷ \\ f(۳) = ۹ \Rightarrow a + \log_{۲}^{(۳b-۵)} = ۹ \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{-} \log_{۲}^{۳b-۵} - \log_{۲}^{۲b-۵} = ۲ \Rightarrow \log_{۲}^{\frac{۳b-۵}{۲b-۵}} = \log_{۲}^{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳b-۵}{۲b-۵} = ۴ \Rightarrow b = ۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادلات}} a = ۷$$

حال $f(۷)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(۷) = ۷ + \log_{۲}^{۳\times۷-۵} = ۷ + \log_{۲}^{۱۶} = ۱۱$$

۱۸) اگر $\log_{۲}^{۳} = a$ باشد، حاصل $\log_{۶}^{۱۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{۲a+۱}$ ۲) $\frac{a+۲}{a+۱}$ ۳) $\frac{a+۱}{۲a}$ ۴) $\frac{۲a+۱}{a+۱}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_{۶}^{۱۸} = \log_{۶}^{۶\times۳} = \log_{۶}^{۶} + \log_{۶}^{۳} = ۱ + \log_{۶}^{۳} = ۱ + \frac{۱}{\log_{۳}^{۶}} =$$

$$۱ + \frac{۱}{\log_{۳}^{۳} + \log_{۳}^{۲}} = ۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{\log_{۲}^{۳}}} = ۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{a}} = ۱ + \frac{۱}{\frac{a+۱}{a}} =$$

$$۱ + \frac{a}{a+۱} = \frac{a+۱+a}{a+۱} = \frac{۲a+۱}{a+۱}$$

۱۹) اگر $۳^{۲x} - ۲\times۳^{x} = -۱$ و $\log_{۸۱} ۹\sqrt{۳} = \frac{y}{۸}$ باشد، حاصل $\log_{(x+y)} ۵y$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

$$(۳^{x})^{۲} - ۲(۳^{x}) + ۱ = ۰ \xrightarrow{۳^{x}=t} t^{۲} = ۲t + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۱ \Rightarrow ۳^{x} = ۱ \Rightarrow x = ۰$$

$$\log_{۸۱} ۹\sqrt{۳} = \log_{۳^{۴}}(۳^{۲} \times ۳^{\frac{۱}{۲}}) = \log_{۳^{۴}} ۳^{\frac{۵}{۲}}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۴}{۱}} \log_{۳}^{۳} = \frac{۵}{۸} = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۵$$

$$\Rightarrow \log_{(x+y)} ۵y = \log_{(۰+۵)} ۵ \times ۵ = \log_{۵} ۲۵ = ۲$$

۲۰) حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $2x+1=\log_3(4\times 3^x-1)$ چقدر از حاصل جمع آن‌ها بیش‌تر است؟

۱) ۳   ۲) ۱   ۳) صفر   ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به ویژگی $\log_b^a=c \Leftrightarrow a=b^c$، می‌توان نوشت:

$$3^{2x+1}=4\times 3^x-1 \Rightarrow 3^{2x}\times 3-4\times 3^x+1=0 \xrightarrow{3^x=t}$$

$$3t^2-4t+1=0 \Rightarrow (3t-1)(t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0 \\ t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{حاصل جمع جواب ها} = -1 \\ \text{حاصل ضرب جواب ها} = 0 \end{cases}$

⇒ حاصل‌ضرب - حاصل جمع =۱

۲۱) حاصل عبارت $(\log_{39}^{3})^2+\log_{39}^{13}\times\log_{39}^{117}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) -۱   ۳) -۲   ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_{39}^{117}=\log_{39}^{9\times 13}=\log_{39}^{3^2}+\log_{39}^{13}=2\log_{39}^{3}+\log_{39}^{13}$$

اگر قرار دهیم: $\log_{39}^{3}=a$ و $\log_{39}^{13}=b$ ، آن‌گاه داریم:

$\log_{39}^{117}=2a+b$ پس:

$$a^2+b(2a+b)=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

از طرفی $a+b=\log_{39}^{3}+\log_{39}^{13}=\log_{39}^{39}=1$ پس حاصل برابر 1^2 یعنی ۱ است.

۲۲) تابع $f(x) = \log_{۴}(ax^{۲} + bx + c)$ فقط در بازه $(-۲,۱)$ قابل تعریف است. اگر $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ باشد، $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱-\log ۲}{۲\log ۲}$
۲) $\frac{۱}{۲\log ۲}$
۳) $\frac{۱+\log ۲}{۲\log ۲}$
۴) $\frac{۱-\log ۲}{\log ۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(۰) = \frac{۳}{۲} = \log_{۴}^{c} \Rightarrow c = ۲^{۲\left(\frac{۳}{۲}\right)} = ۸$$

از طرفی دامنه تابع $(-۲,۱)$ است. این یعنی تعیین علامت چندجمله‌ای داده‌شده باید به‌صورت زیر باشد:

x		-۲		۱	
$ax^{۲}+bx+۸$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

واضح است که $x = -۲$ و $x = ۱$ باید جواب‌های معادله $ax^{۲} + bx + ۸ = ۰$ باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a(-۲)^{۲} + b(-۲) + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲a - b = -۴ \\ a(۱)^{۲} + b(۱) + ۸ = ۰ \Rightarrow a + b = -۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = -۴ \Rightarrow f(x) = \log_{۴}\left[-۴(x^{۲} + x - ۲)\right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \log_{۴}\left[-۴\left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} - ۲\right)\right] = \log_{۴}^{۵} = \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۵}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\log_{۲}^{۱۰} - ۱\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\log ۲} - ۱\right) = \frac{۱-\log ۲}{۲\log ۲}$$

۲۳) ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{۴^{x}+۲^{x+۱}+۱}{۴^{x}+۲^{x}}$ کدام است؟

۱) $\log_{۴}(x-۱)$
۲) $\log_{۲}(۲^{۲x}-۶)$
۳) $\log_{۲}\left(\frac{۱}{x-۱}\right)$
۴) $\log_{۴}\left(\frac{۱}{x-۱}\right)$

پاسخ: گزینه ۳

اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = f(x) = \frac{۴^{x}+۲\times۲^{x}+۱}{۴^{x}+۲^{x}} = \frac{(۲^{x}+۱)^{۲}}{۲^{x}(۲^{x}+۱)} = \frac{۲^{x}+۱}{۲^{x}} = ۱ + ۲^{-x}$$

حالا وارون آن را پیدا می‌کنیم: $y - ۱ = ۲^{-x} \Rightarrow -x = \log_{۲}^{(y-۱)}$

$$\Rightarrow x = \log_{۲}^{\frac{۱}{y-۱}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_{۲}^{\frac{۱}{x-۱}}$$

۲۴) اگر نقطه (a , b) محل تلاقی نمودارهای دو تابع $y = ۹(\frac{\sqrt{۶}}{۲})^{۴x} + ۱$ و $y = ۱۲(\frac{۳}{۲})^{x} - ۳$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

برای یافتن محل تلاقی، ضابطه دو نمودار را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$۹ \times (\frac{\sqrt{۶}}{۲})^{۴x} + ۱ = ۱۲ \times (\frac{۳}{۲})^{x} - ۳ \Rightarrow ۹ \times [(\frac{\sqrt{۶}}{۲})^{۲}]^{۲x} + ۱ = ۱۲ \times (\frac{۳}{۲})^{x} - ۳$$

$$\Rightarrow ۹ \times (\frac{۳}{۲})^{۲x} + ۱ = ۱۲ \times (\frac{۳}{۲})^{x} - ۳ \Rightarrow t = (\frac{۳}{۲})^{x} \Rightarrow ۹t^{۲} + ۱ = ۱۲t - ۳$$

$$\Rightarrow ۹t^{۲} - ۱۲t + ۴ = ۰ \Rightarrow (۳t - ۲)^{۲} = ۰ \Rightarrow t = \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^{x} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x = -۱$$

با جای‌گذاری $x = -۱$ در یکی از معادلات داریم:

$$y = ۱۲ \times (\frac{۳}{۲})^{-۱} - ۳ = ۱۲ \times (\frac{۲}{۳}) - ۳ = ۵$$

در نتیجه محل تلاقی $(a , b) = (-۱ , ۵)$ است؛ پس: $a + b = ۴$

۲۵) اختلاف شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر برابر ۱/۴ است. انرژی زلزله قوی‌تر چند برابر دیگری است؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M , \log ۵ = ۰/۷)$

۱) ۵
۲) ۲۵
۳) ۱۲۵
۴) ۶۲۵

پاسخ: گزینه ۳

$$M_{۲} - M_{۱} = ۱/۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱/۵M_{۲} = \log E_{۲} - ۱۱/۸ \\ ۱/۵M_{۱} = \log E_{۱} - ۱۱/۸ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} ۱/۵(M_{۲} - M_{۱}) = \log E_{۲} - \log E_{۱}$$

$$\Rightarrow ۱/۵ \times ۱/۴ = \log \frac{E_{۲}}{E_{۱}}$$

$$\Rightarrow ۱/۵ \times ۲\log ۵ = \log \frac{E_{۲}}{E_{۱}} \Rightarrow \log \frac{E_{۲}}{E_{۱}} = ۳\log ۵$$

$$\Rightarrow \log \frac{E_{۲}}{E_{۱}} = \log ۵^{۳} \Rightarrow \frac{E_{۲}}{E_{۱}} = ۱۲۵$$