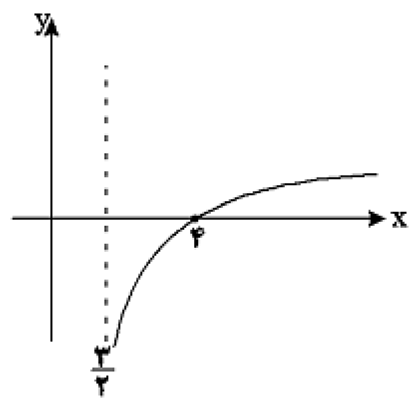
۱) شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = -۱ + \log_b(۲x - a)$ است. این نمودار خط $y = ۱$ را با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

دامنهٔ لگاریتم طبق شکل بازهٔ $(\frac{۳}{۲}, +\infty)$ است، از طرفی دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $(\frac{a}{۲}, +\infty)$ است. پس: $\frac{a}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = ۳$

از طرفی طبق شکل $f(۴) = ۰$ است، پس داریم:

$$-۱ + \log_b(۲ \times ۴ - ۳) = ۰ \Rightarrow \log_b ۵ = ۱ \Rightarrow b = ۵$$

حال باید نمودار تابع $y = f(x)$ را با خط $y = ۱$ تقاطع دهیم:

$$f(x) = ۱ \Rightarrow -۱ + \log_۵^{(۲x-۳)} = ۱ \Rightarrow \log_۵^{(۲x-۳)} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲x - ۳ = ۵^۲ \Rightarrow x = ۱۴$$

۲) اگر $a = \log_۴ ۸\sqrt[۳]{۲\sqrt{۰/۱۲۵}}$، آنگاه حاصل $[۴a]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$۸\sqrt[۳]{۲\sqrt{۰/۱۲۵}} = ۸\sqrt[۳]{۲\sqrt{\frac{۱}{۸}}} = ۸\sqrt[۳]{۲ \times ۲^{-\frac{۳}{۲}}}$$

$$= ۸\sqrt[۳]{۲^{-\frac{۱}{۲}}} = ۲^۳ \times ۲^{-\frac{۱}{۶}} = ۲^{\frac{۱۷}{۶}}$$

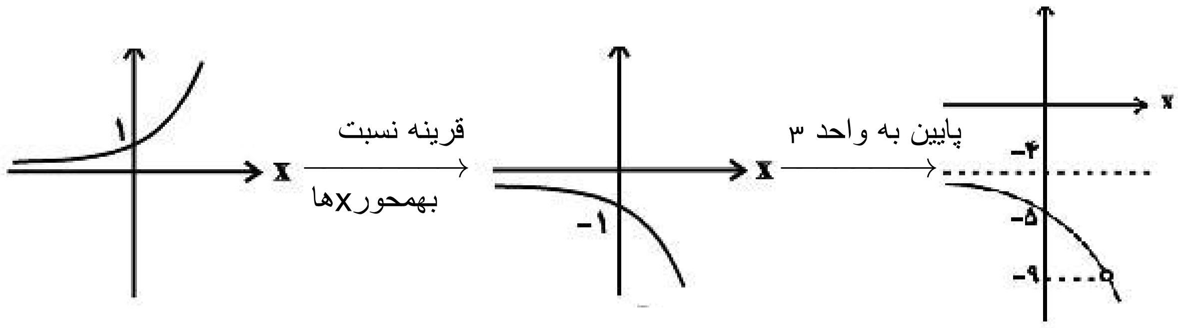
$$\Rightarrow a = \log_۴^{۲^{\frac{۱۷}{۶}}} \Rightarrow ۴^a = ۲^{\frac{۱۷}{۶}} \Rightarrow ۲a = \frac{۱۷}{۶}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱۷}{۱۲} \Rightarrow [۴a] = [\frac{۱۷}{۳}] = ۵$$

۳) اگر $x = \log_{۴}^{۳}$ جواب معادلهٔ $\log_{۲}^{(۴^{۲x}+۳)} = ۲x + a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱   ۴) $\log_{۲}^{۹}$

پاسخ: گزینه ۱



$y = ۲^x$ $y = -(۲^x)$

اگر $۵ = ۲^x$ باشد، مقدار $-(۲^x) - ۴$ برابر است با: $-۹ = -۴ - ۵$

پس ۹- در برد f نیست.

۴) اگر $x = ۲$ جوابی از معادلهٔ $\log_{۴}(x + a) + ۲\log_{۴}(x - ۱) = \log_{۲}^{x}$ باشد، آن‌گاه این معادله در مجموع چند جواب دارد؟

۱) یک   ۲) دو   ۳) سه   ۴) چهار

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

از آنجا که $x = ۲$ جواب معادله است، داریم:

$$\log_{۴}^{(۲+a)} + \underbrace{۲\log_{۴}^{(۱)}}_{۰} = \log_{۲}^{۲} = ۱ \Rightarrow \log_{۴}^{(۲+a)} = ۱$$

$$\Rightarrow ۲ + a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

با قرار دادن $a = ۲$ داریم:

$$\log_{۴}^{(x+۲)} + ۲\log_{۴}^{(x-۱)} = \log_{۲}^{x} = \log_{۴}^{x^۲}$$

$$\Rightarrow \log_{۴}^{(x+۲)(x-۱)^{۲}} = \log_{۴}^{x^۲} \Rightarrow (x + ۲)(x - ۱)^{۲} = x^۲$$

$$x^۳ - ۳x + ۲ = x^۲ \Rightarrow x^۳ - x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

چون $x = ۲$ یکی از ریشه‌ها است، پس با تقسیم بر $(x - ۲)$ داریم:

$$x^۳ - x^۲ - ۳x + ۲ = (x - ۲)(x^۲ + x - ۱) = ۰$$

$$x = ۲ \xrightarrow[x]{\text{دامنه}} x = \frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲} \text{ یا } x = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \text{ یا}$$

$$\Rightarrow x = ۲$$

بنابراین معادله فقط همین یک جواب را دارد.

⑤ جواب معادلهٔ $\log_{۵}^{۲x} - ۲\log\sqrt{x} = ۰$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -۱۰ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

می‌دانیم:

$$\log ۲ + \log ۵ = \log ۱۰ = ۱ \Rightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲$$

حال داریم:

$$\log_{۵}^{۲x} - ۲\log\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \log_{۵}^{۲x} - \log^{(\sqrt{x})^{۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow \log_{۵}^{۲x} = \log^{x}$$
$$\Rightarrow \frac{\log^{۲x}}{\log^{۵}} = \log x \Rightarrow \log ۲ + \log x = \log x(۱ - \log ۲)$$
$$\Rightarrow \log ۲ + \log x = \log x - \log ۲ \times \log x$$
$$\log ۲ = -\log ۲ \times \log x$$
$$\log x = -۱ \Rightarrow x = ۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}$$

⑥ اگر $\log(۳^{-x} + ۱) = \log ۲۸ - x\log ۳$، حاصل عبارت $\frac{\log_{x}^{۹\sqrt{۳}} - ۱}{۱ - \log_{\sqrt{۳}}^{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$\log^{(۳^{-x}+۱)} = \log^{۲۸} + \log^{۳^{-x}}$$
$$\Rightarrow \log^{(۳^{-x}+۱)} = \log^{(۲۸)(۳^{-x})} \Rightarrow ۳^{-x} + ۱ = ۲۸ \times (۳^{-x})$$
$$\Rightarrow ۲۸(۳^{-x}) - ۳^{-x} = ۱ \Rightarrow ۳^{-x}(۲۸ - ۱) = ۱$$
$$\Rightarrow ۳^{-x} = \frac{۱}{۲۷} = ۳^{-۳} \Rightarrow x = ۳$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\log_{۳}^{۹\sqrt{۳}} - ۱}{۱ - \log_{\sqrt{۳}}^{۳}} = \frac{\log_{۳}^{۳^{\frac{۵}{۲}}} - ۱}{۱ - ۲} = \frac{\frac{۵}{۲}\log_{۳}^{۳} - ۱}{-۱}$$
$$= -(\frac{۵}{۲} - ۱) = -\frac{۳}{۲}$$

⑦ اگر $\log ۳ = b$ و $\log ۲ = a$ باشد، آنگاه $\log_{\sqrt{۵}}^{۰/۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲b+۲}{۱-a}$ ۲) $\frac{۲b-۲}{۱-a}$ ۳) $\frac{۲b+۲}{۱+a}$ ۴) $\frac{۲b-۲}{a-۱}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$\log_{\sqrt{۵}}^{۰/۳} = \frac{\log^{۰/۳}}{\log^{\sqrt{۵}}} = \frac{\log^{۳} - ۱}{\frac{۱}{۲}\log^{۵}} = \frac{b - ۱}{\frac{۱}{۲}(۱ - \log ۲)} = \frac{۲b - ۲}{۱ - a}$$

۸) اگر $\log_{۵}^{x} + \log_{۳}^{x} = ۱$ باشد، مقدار $\log_{x}^{۵}$ کدام است؟

۱) $\log_{۱۵}^{۳}$ ۲) $\log_{۵}^{۳}$ ۳) $\log_{۳}^{۱۵}$ ۴) $\log_{۳}^{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

نکته: $\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}}$

نکته: $\log_{b}^{a} = \frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}$

$$\log_{۵}^{x} + \log_{۳}^{x} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\log_{x}^{۵}} + \frac{۱}{\log_{x}^{۳}} = ۱$$

$$\Rightarrow \log_{x}^{۵} + \log_{x}^{۳} = \log_{x}^{۵} . \log_{x}^{۳}$$

$$\log_{x}^{۱۵} = \log_{x}^{۵} . \log_{x}^{۳} \Rightarrow \log_{x}^{۵} = \frac{\log_{x}^{۱۵}}{\log_{x}^{۳}} = \log_{۳}^{۱۵}$$

۹) وارون تابع $f(x) = ۲^{x+۱} - ۳$ به صورت تابع $f^{-۱}(x) = \log_{۲}^{(\frac{x+a}{b})}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$y = f(x) = ۲^{x+۱} - ۳ \Rightarrow ۲^{x+۱} = y + ۳ \Rightarrow \log_{۲}^{(y+۳)} = x + ۱$$

$$\Rightarrow x = \log_{۲}^{(y+۳)} - ۱ \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = f^{-۱}(x) = \log_{۲}^{(x+۳)} - ۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_{۲}^{(x+۳)} - \log_{۲}^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_{۲}^{(\frac{x+۳}{۲})} \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = ۵$$

۱۰) اگر a و b اعداد صحیحی باشند که در معادلهٔ $\frac{۲^{a+b}}{۹^{۲a-b}} = ۱۴۴$ صدق می‌کنند، حاصل $۳a - ۲b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$(۲^{a+b})((۳^{-۲})^{۲a-b}) = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow (۲^{a+b})(۳^{-۴a+۲b}) = ۲^{۴} \times ۳^{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = ۴ \\ -۴a + ۲b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - ۲b = -۸ \\ -۴a + ۲b = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۶a = -۶ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۳$$

$$\Rightarrow ۳a - ۲b = ۳ - ۶ = -۳$$

⑪ به ازای چند مقدار طبیعیa، تابع $f(x) = (\frac{4-a^2}{2a+1})^x$ یک تابع نمایی است که با افزایش مقدارx مقدار تابع افزایش می‌یابد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) صفر　　۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

نکته: در تابع نمایی $y = a^x$ زمانی که$a > 1$ باشد با افزایش مقدارx مقدار تابع افزایش می‌یابد.

$$f(x) = (\frac{4-a^2}{2a+1})^x \Rightarrow \frac{4-a^2}{2a+1} > 1$$

$$\frac{4-a^2}{2a+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{4-a^2-2a-1}{2a+1} > 0$$

$$P = \frac{-a^2-2a+3}{2a+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -a^2 - 2a + 3 = 0 \begin{matrix} \nearrow a = 1 \\ \searrow a = -3 \end{matrix} \\ 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

		-3		$-\frac{1}{2}$		1	
$-a^2-2a+3$	−	0	+		+	0	−
$2a+1$	−		−	0	+		+
$P > 0$	+	0	−	ن	+	0	−

مجموعه مقادیرa : $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$ در این بازه‌ها هیچ عدد طبیعی برایa وجود ندارد.

⑫ مجموع جواب‌های معادله $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

اگر 3^x را t بنامیم، به‌جای 9^x می‌گذاریم t^2 و به جای 3^{x+1} که برابر $3^x \times 3$ است هم می‌نویسیم$3t$. پس داریم:

$$t^2 - 4(3t) + 27 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{پس دو ریشه داریم}$$

جواب‌های این معادله t_1، t_2 یعنی 3^{x_1} و 3^{x_2} هستند. ضرب این جواب‌ها می‌شود:

$$P = t_1 t_2 = 3^{x_1} \times 3^{x_2} = 3^{x_1 + x_2} = \frac{c}{a} = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3$$

(۱۳) مجموع جواب‌های معادلهٔ $\log_{۲}(۴^x+۱۵)=x+۳$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۱۵}$
۳) ۸
۴) $\log_{۲}^{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$\log_{۲}(۴^x+۱۵)=x+۳ \Rightarrow ۴^x+۱۵=۲^{x+۳} \Rightarrow ۲^{۲x}-۸\times ۲^x+۱۵=۰$$

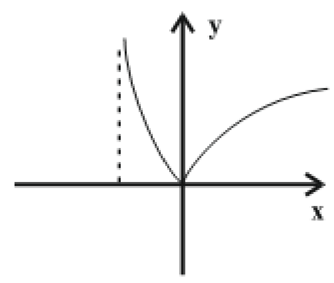
$$\xrightarrow{۲^x=t} t^۲-۸t+۱۵=۰ \Rightarrow (t-۵)(t-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱=۵ \Rightarrow ۲^{x_۱}=۵ \Rightarrow x_۱=\log_{۲}^{۵} \\ t_۲=۳ \Rightarrow ۲^{x_۲}=۳ \Rightarrow x_۲=\log_{۲}^{۳} \end{cases}$$

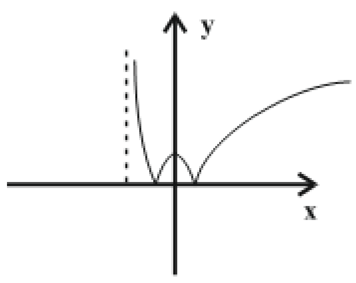
$$x_۱+x_۲=\log_{۲}^{۵}+\log_{۲}^{۳}=\log_{۲}^{۱۵}$$

۱۴) نمودار تابع $f(x) = |۱ - \log(x+۱)|$ کدام است؟

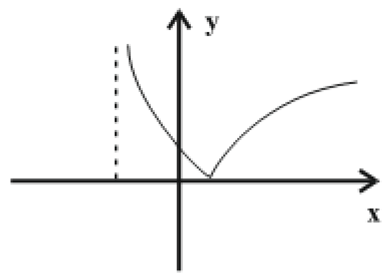
۱)



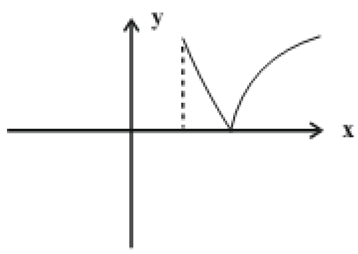
۲)



۳)

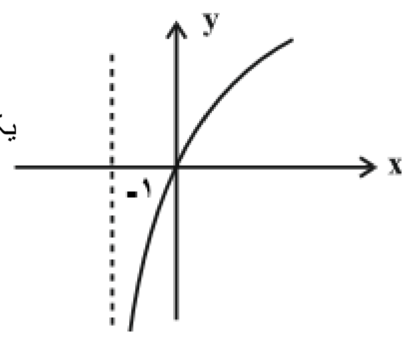


۴)



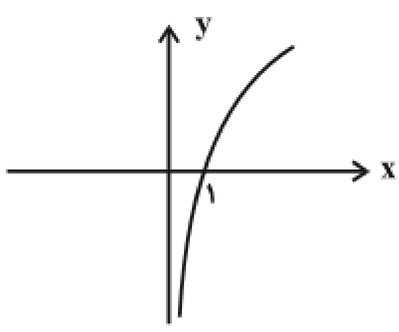
پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



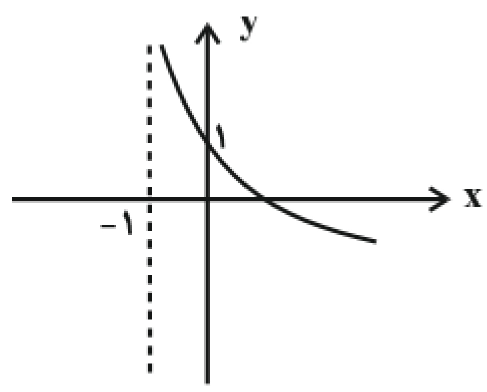
$y_۲ = \log(x+۱)$

یک واحد انتقال به چپ



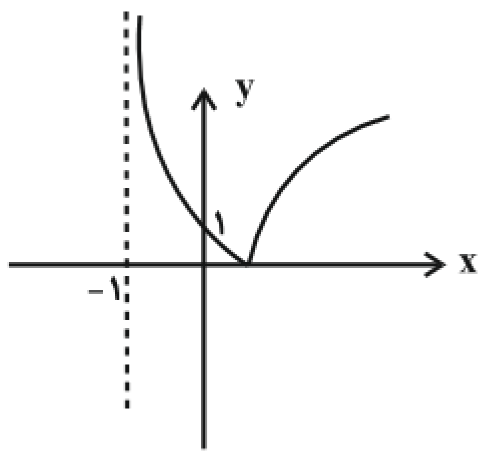
$y_۱ = \log x$

قرینه نسبت‌به‌محور xها و یک
واحدانتقالبهبالا



$y_۳ = ۱ - \log(x+۱)$

بنابراین:



قرینه‌های منفی
محوربهنسبتxها

$f(x) = |۱ - \log(x+۱)|$

⑮ حاصلضرب ریشه‌های معادله $16x^3 = x^{\log_2^x}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

از طرفین تساوی، لگاریتم در پایه‌ی ۲ می‌گیریم:

$$16x^3 = x^{\log_2^x} \Rightarrow \log_2 16x^3 = \log_2^{x^{\log_2^x}}$$

$$\Rightarrow \log_2 2^4 + \log_2 x^3 = (\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$\Rightarrow 4\log_2 2 + 3\log_2 x = (\log_2 x)(\log_2 x)$$
$$\Rightarrow (\log_2 x)(\log_2 x) - 3\log_2 x - 4 = 0$$

حال قرار می‌دهیم $a = \log_2^x$، بنابراین داریم:

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ a = 4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

حاصلضرب ریشه‌ها $= \frac{1}{2} \times 16 = 8$

⑯ نمودار تابع $f(x) = \log(ax+b)$ با دامنه $(-\infty, 1)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. اگرطول نقطه برخورد نمودار حاصل با نمودار f، برابر $-\sqrt{5}$ باشد، آنگاه $f(-19)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\log 9$

پاسخ: گزینه ۳

به ازای دامنه تابع داده شده داریم:

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \xrightarrow[\div a]{a<b} x < \frac{-b}{a} \Rightarrow (-\infty, \frac{-b}{a}) = (-\infty, 1) \Rightarrow \frac{-b}{a} = 1 \Rightarrow b = -a$$

$$f(x) = \log(ax - a) = \log a(x-1) \xrightarrow[x \to x+2]{\text{دو واحد به چپ}} \log a(x+1) \xrightarrow[\substack{\text{محور xها} \\ f(x)=-f(x)}]{\text{قرینه نسبت به}} -\log a(x+1)$$

$$f(x) = -\log a(x+1)$$

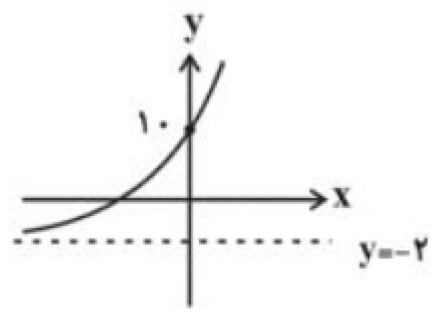
$$\Rightarrow \log a(x-1) = \log \frac{1}{a(x+1)} \Rightarrow a(x-1) = \frac{1}{a(x+1)}$$

$$\Rightarrow a^2(x^2-1) = 1 \xrightarrow{x=-\sqrt{5}} 4a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow{a<0} a = \frac{-1}{2}$$

با جایگذاری a و b در تابع داریم:

$$f(x) = \log(\frac{-1}{2}(x-1)) \Rightarrow f(-19) = \log 10 = 1$$

۱۷) نمودار تابع $y = ۳ \times ۲^{x+a} + b$ به‌صورت زیر می‌باشد. حاصل $a + b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

چون نمودار تابع‌نمایی دارای برد $(-۲, +\infty)$ می‌باشد، پس $b = -۲$ می‌باشد.

$$y = ۳ \times ۲^{x+a} - ۲ \xrightarrow{(۰,۱۰)} ۱۰ = ۳ \times ۲^{a} - ۲ \rightarrow ۳ \times ۲^{a} = ۱۲$$

$$۲^{a} = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow a + b = ۰$$

۱۸) اگر $\log^{۲} = n$ و $\log^{۳} = m$ باشد، آنگاه حاصل $\log^{۴/۵}_{\sqrt[۳]{۱۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶m-۳n-۳}{۳m+n}$

۲) $\frac{۶m-۳n}{۳m+\frac{۱}{۲}n}$

۳) $\frac{۶m-۳n-۳}{۳m+۲n}$

۴) $\frac{۶m-۳n}{m+۲n}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log^{۴/۵}_{\sqrt[۳]{۱۲}} = \frac{\log^{۴/۵}}{\log^{\sqrt[۳]{۱۲}}} = \frac{\log^{۴۵}-\log^{۱۰}}{\frac{۱}{۳}\log^{۱۲}}$$

$$= \frac{\log^{۹\times ۵}-۱}{\frac{۱}{۳}\log^{۳\times ۴}} = \frac{\log^{۹}+\log^{۵}-۱}{\frac{۱}{۳}(\log^{۳}+\log^{۴})} = \frac{۲\log^{۳}+(۱-\log^{۲})-۱}{\frac{۱}{۳}(\log^{۳}+۲\log^{۲})}$$

$$= \frac{۲\log^{۳}-\log^{۲}}{\frac{۱}{۳}(\log^{۳}+۲\log^{۲})} = \frac{۲m-n}{\frac{۱}{۳}(m+۲n)} = \frac{۶m-۳n}{m+۲n}$$

۱۹) از معادله $\log_{۲}^{(x+۱۴)} + \log_{۴}^{(x+۱۴)} + \log_{۱۶}^{(x+۱۴)} = ۷$، مقدار لگاریتم $\sqrt{x}$ در مبنای ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۴

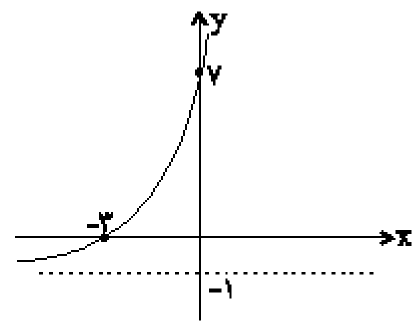
$$\log_{۲}^{(x+۱۴)} + \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{(x+۱۴)} + \frac{۱}{۴}\log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۷$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۴}\log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۷ \Rightarrow \log_{۲}^{(x+۱۴)} = ۴$$

$$\Rightarrow x + ۱۴ = ۱۶ \Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow \log_{۸}^{\sqrt{x}} \underline{\underline{x = ۲}} \log_{۸}^{\sqrt{۲}} = \log_{۲^{۳}}^{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۱}}\log_{۲}^{۲} = \frac{۱}{۶}$$

۲۰) اگر نمودار تابع نمایی $f(x) = -۱ + a^{x+b}$ به صورت زیر باشد، مقدار $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟



۱) -۱
۲) -۲
۳) -۴
۴) -۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مختصات $(۰, ۷)$ و $(-۳, ۰)$ در ضابطه تابع صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} f(۰) = -۱ + a^{b} = ۷ \Rightarrow a^{b} = ۸ \\ f(-۳) = -۱ + a^{-۳+b} = ۰ \Rightarrow a^{-۳+b} = ۱ \\ \Rightarrow a^{-۳+b} = a^{۰} \Rightarrow -۳ + b = ۰ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a^{b}=۸} a^{۳} = ۸ \Rightarrow a^{۳} = ۲^{۳} \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = -۱ + ۲^{x+۳}$$

حال فرض کنیم $f^{-۱}(۱) = t$ است، پس $f(t) = ۱$ است:

$$f(t) = -۱ + ۲^{t+۳} = ۱ \Rightarrow ۲^{t+۳} = ۲^{۱} \Rightarrow t + ۳ = ۱ \Rightarrow t = ۲$$

پس $f^{-۱}(۱) = -۲$ است.

۲۱) در کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t دقیقه پس از شروع، از رابطه $f(t) = A \times ۲^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۴۰۰ و دردقیقه دوم برابر ۲۵۶۰۰ باشد، در دقیقه سوم تعداد باکتری‌ها کدام است؟ (A و k اعداد ثابتی هستند)

۱) ۱۰۲۴۰۰
۲) ۲۰۴۸۰۰
۳) ۵۱۲۰۰
۴) ۲۵۶۰۰

پاسخ: گزینه ۲

$$f(t) = A \times ۲^{kt} \xrightarrow{t=۰ \to f(۰)=۴۰۰} ۴۰۰ = A \times ۲^{k(۰)}$$
$$\Rightarrow A = ۴۰۰$$

از طرفی در دقیقه دوم تعداد باکتری‌ها ۲۵۶۰۰ است:

$$f(۲) = ۲۵۶۰۰ \xrightarrow{f(t)=۴۰۰\times ۲^{kt}} ۲۵۶۰۰ = ۴۰۰ \times ۲^{۲k}$$
$$\Rightarrow ۲^{۲k} = \frac{۲۵۶۰۰}{۴۰۰} = ۶۴ \Rightarrow ۲^{۲k} = ۲^{۶} \Rightarrow ۲k = ۶$$
$$\Rightarrow k = ۳ \Rightarrow f(t) = ۴۰۰ \times ۲^{۳t} \xrightarrow{t=۳} f(۳) = ۴۰۰ \times ۲^{۹}$$
$$\Rightarrow f(۳) = ۴۰۰ \times ۵۱۲ = ۲۰۴۸۰۰$$

۲۲) اگر $\log(۷x - ۱) + \log(x + ۲) = ۲$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{۷}}^{(۳x-۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

از رابطه‌های $\log a + \log b = \log ab$ و $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ استفاده می‌کنیم:

$$\log(۷x - ۱) + \log(x + ۲) = ۲ \Rightarrow \log(۷x - ۱)(x + ۲) = ۲$$

$$\Rightarrow (۷x - ۱)(x + ۲) = ۱۰^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow ۷x^{۲} + ۱۳x - ۱۰۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (۷x + ۳۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ & \text{ق ق} \\ x = -\frac{۳۴}{۷} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{۷}}^{۳x-۲} \quad \underline{\underline{x = ۳}} \quad \log_{\sqrt{۷}}^{۷} = \log_{۷^{\frac{۱}{۲}}}^{۷} = ۲\log_{۷}^{۷} = ۲$$

۲۳) اگر $\log_{۳}^{(۳^a-۸)} = ۲ - a$ باشد، حاصل $\log_{(۴a+۱)}^{(۲a-۱)}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۳

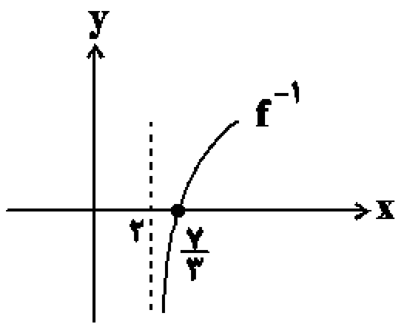
اگر $\log_c^x = b$ باشد، آن‌گاه $x = c^b$. بنابراین:

$$\log_{۳}^{۳^a-۸} = ۲ - a \Rightarrow ۳^a - ۸ = \frac{۳^{۲}}{۳^a} \xrightarrow{t=۳^a}$$

$$t - ۸ = \frac{۹}{t} \Rightarrow t^{۲} - ۸t - ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۹ = ۳^a \Rightarrow a = ۲ \\ t = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{(۴a+۱)}^{(۲a-۱)} \xrightarrow{a=۲} \log_{۹}^{۳} = \frac{۱}{۲}$$

۲۴) اگر نمودار معکوس تابع $f(x) = \frac{۳^{۲x}}{۳^{a}} - b$ به‌صورت زیر باشد. مقدار $f(۲)$ کدام است؟



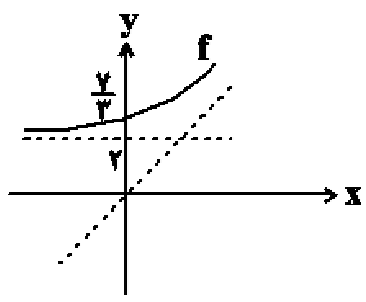
۱) ۲۵
۲) ۲۹
۳) وجود ندارد
۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

نمودار f^{-1} را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم تا نمودار f به‌دست آید:

کمی تابع f را ساده کنیم:

$$f(x) = \frac{۳^{۲x}}{۳^{a}} - b = ۳^{۲x-a} - b$$



با توجه به شکل مشخص است که نمودار تابع نمایی ۲ واحد به بالا انتقال یافته است. پس:

$$-b = ۲ \Rightarrow b = -۲$$

از طرفی نمودار f از نقطه $(۰, \frac{۷}{۳})$ عبور می‌کند:

$$f(۰) = \frac{۷}{۳} \rightarrow \frac{۷}{۳} = ۳^{۲(۰)-a} + ۲ \rightarrow \frac{۷}{۳} - ۲ = ۳^{-a}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} = ۳^{-a} \rightarrow ۳^{-۱} = ۳^{-a} \rightarrow a = ۱ \rightarrow f(x) = ۳^{۲x-۱} + ۲$$
$$\xrightarrow{x=۲} f(۲) = ۳^{۳} + ۲ = ۲۹$$

۲۵ مجموع جواب‌های معادله $(\sqrt{۲}-۱)^{x^۲+۵} = (\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}})^{۶x}$ چند برابر حاصل‌ضرب جواب‌های آن است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۶}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

$$(\sqrt{۲}-۱)^{x^۲+۵} = (\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}})^{۶x}$$

با توجه به اینکه $\sqrt{۲}-۱ = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۱} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$، پس داریم:

$$(\sqrt{۲}-۱)^{x^۲+۵} = (\sqrt{۲}-۱)^{۶x} \Rightarrow x^۲+۵ = ۶x$$
$$\Rightarrow x^۲-۶x+۵ = ۰$$

برای پیدا کردن مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها یکی از دو روش زیر را می‌توان استفاده نمود:

روش اول:

$$x^۲+۵-۶x = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۵, x = ۱$$

$$\begin{cases} \text{مجموع} = ۵+۱ = ۶ \\ \text{ضرب} = ۵\times۱ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{نسبت خواسته شده} = \frac{۶}{۵}$$

روش دوم:

در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c = ۰$ مجموع جواب‌ها $S = \frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب جواب‌ها $P = \frac{c}{a}$ است، پس:

$$\frac{S}{P} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{۶}{۵}$$