مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ لگاریتم**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

۱) اگر $\log_{4}^{3} = a$ باشد، حاصل $\log_{9}^{16}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{a+2}{3}$ ۲) $\frac{a-1}{2}$

۳) $\frac{2a+1}{2}$ ۴) $\frac{1}{a}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

$$\log_{4}^{3} = a \Rightarrow \log_{2^2}^{3} = a \Rightarrow \frac{1}{2}\log_{2}^{3} = a$$

$$\Rightarrow \log_{2}^{3} = 2a \Rightarrow \log_{3}^{2} = \frac{1}{2a}$$

$$\log_{9}^{16} = \log_{3^2}^{2^4} = \frac{4}{2}\log_{3}^{2} = 2\log_{3}^{2} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

۲) مجموع جواب‌های معادله $\log_{3}^{(2x-1)} - \log_{(2x-1)}^{9} = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{3}$ ۲) 8

۳) $\frac{13}{3}$ ۴) 6

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$\log_{3}^{(2x-1)} - \log_{(2x-1)}^{9} = 1 \Rightarrow \log_{3}^{(2x-1)} - 2\log_{(2x-1)}^{3} = 1$$

$$\xrightarrow[\log_{(2x-1)}^{3} = \frac{1}{\log_{3}^{(2x-1)}}]{\log_{3}^{(2x-1)} = A} A - \frac{2}{A} = 1$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$A = 2 \Rightarrow \log_{3}^{(2x-1)} = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$A = -1 \Rightarrow \log_{3}^{(2x-1)} = -1 \Rightarrow 2x - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 + x_2 = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

۳) اگر x عددی مثبت و غیر از یک باشد،آن گاه حاصل عبارت $\log_{(\sqrt{2}+1)}(3+2\sqrt{2})+\log_{(2-\sqrt{3})}(\sqrt{3}+2)+\log_{\sqrt[4]{x}} x\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{3}$
۲) $\frac{17}{3}$
۳) ۵
۴) $\frac{13}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

می‌دانیم $(\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2\sqrt{2}$، پس $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$، بنابراین:

$$\log_{(\sqrt{2}+1)}(3+2\sqrt{2}) = \log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1)^2 = 2$$

می‌دانیم $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$، پس $2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1}$، بنابراین:

$$\log_{(2-\sqrt{3})}(\sqrt{3}+2) = \log_{(2-\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^{-1} = -1$$

از طرفی داریم:

$$\log_{\sqrt[4]{x}} x.\sqrt[3]{x} = \log_{x^{\frac{1}{4}}} x^1 . x^{\frac{1}{3}} = \log_{x^{\frac{1}{4}}} x^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$2-1+\frac{16}{3} = \frac{19}{3}$$

۴) از معادله $\log_3^{(2x+1)} + \log_3^{\sqrt{2x+1}} + \log_3^{\sqrt[3]{2x+1}} = \frac{11}{3}$، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x^2}$ در مبنای ۴ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

از ویژگی $\log_b^{a^n} = n\log_b^a$ استفاده می‌کنیم:

$$\log_3^{(2x+1)} + \log_3^{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} + \log_3^{(2x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x+1)} + \frac{1}{2}\log_3^{(2x+1)} + \frac{1}{3}\log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3}$$

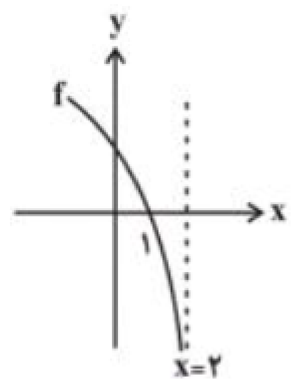
$$\Rightarrow \frac{11}{6}\log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_3^{(2x+1)} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x+1)} = 2 \Rightarrow 2x+1 = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

$$\log_4^{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=4} \log_4^{\sqrt[3]{4^2}} = \log_4^{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}$$

۵ شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = a + \log(b - x)$ است، حاصل $\log_{\sqrt{b}}^{(\sqrt{۲a}+b)}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار داده شده، نمودار تابع $y = \log x$ است که ابتدا نسبت به محور yها قرینه شده و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل شده است، بنابراین $b = ۲$ است. همچنین نمودار تابع f محور xها را در نقطه‌ای به‌طول ۱ قطع کرده بنابراین $f(۱) = ۰$ است. پس:

$$f(۱) = ۰ \Rightarrow a + \log(۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow a + \log ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

$$\log_{\sqrt{b}}^{(\sqrt{۲a}+b)} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲\times ۰}+۲} = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۲} = ۲\log_{۲}^{۲} = ۲$$

۶ جواب معادله $\frac{۱}{\log_{۶}(\log ۵)} = \frac{۱}{\log_{۲} x} + \frac{۱}{\log_{۳} x}$ کدام است؟

۱) $\log \frac{۲}{۵}$
۲) $\log \frac{۳}{۵}$
۳) $\log ۵$
۴) $\log ۶$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\frac{۱}{\log_{۲} x} = \log_x ۲ \ , \quad \frac{۱}{\log_{۳} x} = \log_x ۳ \ , \quad \frac{۱}{\log_{۶}(\log ۵)} = \log_{(\log ۵)} ۶$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$\log_x ۲ + \log_x ۳ = \log_{(\log ۵)} ۶ \Rightarrow \log_x ۶ = \log_{(\log ۵)} ۶ \Rightarrow x = \log ۵$$

۷) اگر $x^{\log_3^x} = ۲۷$ باشد، $\log_3^x$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) ۳
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

از دو طرف تساوی، لگاریتم در پایه ۳ می‌گیریم:

$$\log_3^{x^{\log_3^x}} = \log_3^{27} \Rightarrow \log_3^x \times \log_3^x = ۳$$

$$\Rightarrow \log_3^x = \sqrt{۳} \text{ یا } \log_3^x = -\sqrt{۳}$$

۸) انرژی یک زلزله‌ای a برابر زلزله‌ای دیگر است $(a > ۱)$. اگر دو زلزله، $\frac{۷}{۶}$ ریشتر اختلاف داشته باشند، a کدام است؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M)$

۱) $۱۰۰\sqrt[۴]{۱۰}$
۲) $۱۰\sqrt[۴]{۱۰۰}$
۳) $۱۰\sqrt[۴]{۱۰۰۰}$
۴) $۱۰۰۰\sqrt[۴]{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۳

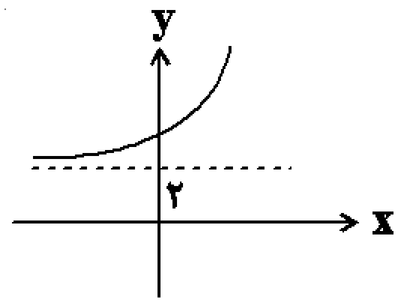
انرژی یکی از زلزله ها را $E_۲$ (بزرگ‌تر) و دیگری را $E_۱$ (کوچک‌تر) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{matrix} \log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۱ \\ \log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۲ \end{matrix} \xrightarrow{-} \log E_۲ - \log E_۱$$

$$= ۱/۵(M_۲ - M_۱) \rightarrow \log \frac{E_۲}{E_۱} = ۱/۵(\frac{۷}{۶}) = \frac{۳}{۲} \times \frac{۷}{۶} = \frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow \log_{10}^a = \frac{۷}{۴} \Rightarrow a = ۱۰^{\frac{۷}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۰^{۷}} = \sqrt[۴]{۱۰^{۴} \times ۱۰^{۳}} = ۱۰\sqrt[۴]{۱۰۰۰}$$

۹) نمودار مقابل مربوط به تابع با ضابطه $f(x) = ۲^{ax} + b$ است و نقطه $(۳,۶)$ روی آن قرار دارد، حاصل $\log_b^{۳a}$ کدام است؟ $(a > ۰)$



۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع $y = ۲^{ax}$ به اندازه ۲ واحد روی محور yها به سمت بالا انتقال یافته است، بنابراین $b = ۲$ است. از طرفی طبق فرض سؤال نقطه $(۳,۶)$ روی نمودار است. پس داریم:

$$\begin{cases} f(۳) = ۶ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲^{۳a} + ۲ = ۶ \Rightarrow ۲^{۳a} = ۴$$

$$\Rightarrow ۳a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\log_b^{۳a} = \log_۲^{۳\times\frac{۲}{۳}} = \log_۲^۲ = ۱$$

۱۰) اگر $(\frac{۴}{۹})^{x+۲} < (\frac{۲}{۳})^{۴x-۲}$ باشد، آنگاه حدود x کدام است؟

۱) $x < ۲$
۲) $x > ۲$
۳) $x < ۳$
۴) $x > ۳$

پاسخ: گزینه ۴

$$(\frac{۲}{۳})^{۴x-۲} < (\frac{۴}{۹})^{x+۲} \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{۴x-۲} < (\frac{۲}{۳})^{۲x+۴}$$

اگر $۰ < a < ۱$ و داشته باشیم $a^z < a^y$، نتیجه می‌گیریم که $z > y$ بنابراین:

$$\xrightarrow{۰<a=\frac{۲}{۳}<۱} ۴x - ۲ > ۲x + ۴ \Rightarrow ۲x > ۶ \Rightarrow x > ۳$$

۱۱) اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{a-1}(2x-b)$ برابر $(3\ ,\ +\infty)$ و $f(\frac{15}{2}) = 2$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

دامنهٔ تابع f عبارت است از:

$$2x-b>0 \Rightarrow x>\frac{b}{2} \xrightarrow{x>3} \frac{b}{2}=3 \Rightarrow b=6$$

بنابراین $f(x) = \log_{a-1}(2x-6)$، لذا:

$$f(\frac{15}{2}) = \log_{a-1}(2(\frac{15}{2})-6) = 2 \Rightarrow \log_{a-1}(9) = 2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a-1=3 \Rightarrow a=4 & \text{ق ق} \\ a-1=-3 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=10$$

۱۲) در تابع با ضابطه $f(x) = 3^{2ax+b}$، $f(2)=3$ و $f^{-1}(1)=4$ است، حاصل $\log_{27}^{f(-4)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(2)=3 \Rightarrow 3^{4a+b}=3 \Rightarrow 4a+b=1$$
$$f^{-1}(1)=4 \Rightarrow f(4)=1 \Rightarrow 3^{8a+b}=1 \Rightarrow 8a+b=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=1 \\ 8a+b=0 \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله، دو مجهول به‌دست آمده مقادیر a و b را می‌یابیم.

$$-1\times \begin{cases} (4a+b=1) \\ 8a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a-b=-1 \\ 8a+b=0 \end{cases} \Rightarrow 4a=-1$$
$$\Rightarrow a=\frac{-1}{4}\ ,\ b=2$$

بنابراین $f(x) = 3^{2(-\frac{1}{4})x+2}$ و همچنین داریم:

$$\log_{27}^{f(x)} = \log_{3^3}^{3^{2ax+b}} = \frac{2ax+b}{3}\log_3^3 = \frac{2ax+b}{3}$$
$$\xrightarrow{x=-4} \log_{27}^{f(-4)} = \frac{2(-\frac{1}{4})(-4)+2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

۱۳) اگر $۳^{\frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{۳}}^{۳x}} = ۲^{(\log_۲^{(x+۲)} + \log_۲^{(x-۲)})}$ باشد، $\log_۲^{(x+۴)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_۲^{(x+۲)} + \log_۲^{(x-۲)} = \log_۲^{(x+۲)(x-۲)}$$
$$= \log_۲^{(x^۲-۴)}$$

با توجه به فرمول $a^{\log_a^x} = x$ داریم:

$$۳^{\frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{۳}}^{۳x}} = ۳^{\log_۳^{۳x}} = ۳x$$
$$۲^{\log_۲^{(x^۲-۴)}} = (x^۲ - ۴)$$
$$\Rightarrow ۳x = x^۲ - ۴$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۴) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ غ ق ق} \\ x = ۴ \text{ ق ق} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \log_۲^{(x+۴)} = \log_۲^۸ = ۳$$

۱۴) دو تابع $f(x) = \log_۲(x+۳)$ و $g(x) = \log_۴(۳x+۱)+۱$ در دو نقطه A و B متقاطع‌اند. شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

دو ضابطه را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = g(x)$$

به جای ۱، $\log_۴^۴$ و به جای $\log_۲(x+۳)$، $\log_۴(x+۳)^۲$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\log_۴(x+۳)^۲ = \log_۴(۳x+۱) + \log_۴^۴$$

$$\Rightarrow (x+۳)^۲ = ۱۲x + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۵ = ۰ \left\langle \begin{matrix} x = ۱ \\ x = ۵ \end{matrix} \right.$$

با جای‌گذاری xهای بدست آمده در یکی از ضابطه‌ها، مختصات A و B به‌صورت $A(۱,۲)$ و $B(۵,۳)$ به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow \text{شیب خط گذرنده از A و B} : m_{AB} = \frac{۳-۲}{۵-۱} = \frac{۱}{۴}$$

⑮ نقطه $(۱,۳)$ روی نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x + b$ و نقطه $(۵,۲)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد. $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

نقطه $(۱,۳)$ روی نمودار f و نقطه $(۵,۲)$ روی نمودار $f^{-۱}$ است. از گزاره دوم نتیجه می‌شود که نقطه $(۲,۵)$ نیز روی نمودار f قرار دارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱) = a + b = ۳ \\ f(۲) = a^۲ + b = ۵ \end{cases}$$

طرفین تساوی‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow a^۲ + b - a - b = ۵ - ۳$$

$$a^۲ - a - ۲ = (a-۲)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \text{ غ ق ق} \\ a = ۲ \text{ ق ق} \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲^x + ۱ \Rightarrow f(-۱) = ۲^{-۱} + ۱ = \frac{۳}{۲}$$

⑯ اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله $x^۲ - (۲m+۱)x - ۳ = ۰$ باشند و $\log ab - \log a \log b = -\frac{۱}{۳}m$، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$　　۲) $-\frac{۱۲}{۷}$　　۳) $\frac{۲۱}{۸}$　　۴) $\frac{۱۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $a'x^۲ + b'x + c' = ۰$ برابر با $-\frac{b'}{a'}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{c'}{a'}$ است.

$$\begin{cases} \log a + \log b = ۲m + ۱ \Rightarrow \log ab = ۲m + ۱ \\ \log a \log b = -۳ \end{cases}$$

$$(\log ab) - (\log a \log b) = -\frac{۱}{۳}m \Rightarrow ۲m + ۱ + ۳ = -\frac{۱}{۳}m$$

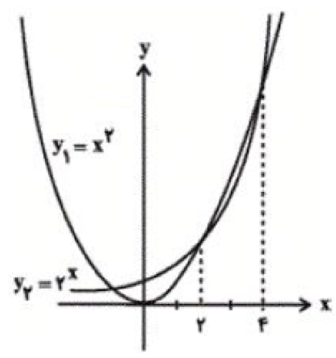
$$\Rightarrow \frac{۷}{۳}m = -۴ \Rightarrow m = -\frac{۱۲}{۷}$$

⑰ اگر $x > ۰$ و $x^۲ > ۲^x$ در بازه (a, b) برقرار باشد، حداکثر مقدار عبارت $\log_۸ \sqrt{b-a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

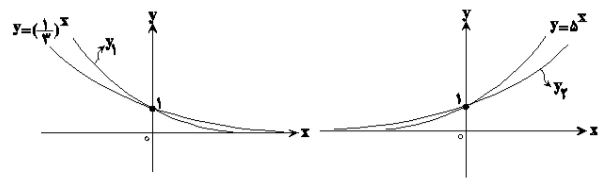
پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل و این‌که $x > ۰$ است، نمودار $y_۱ = x^۲$ در بازه $(۲, ۴)$ بالای نمودار $y_۲ = ۲^x$ قرار می‌گیرد.



$$\log_۸ \sqrt{b-a} = \log_۸ \sqrt{۲} = \log_{۲^۳} ۲^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۶}$$

۱۸) با توجه به شکل زیر، نمودار توابع نمایی $y_۱$ و $y_۲$ مربوط به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر می‌توانند باشند؟



۱) $y_۲ = ۴^x \ , \ y_۱ = (\frac{۱}{۴})^x$
۲) $y_۲ = ۶^x \ , \ y_۱ = (\frac{۱}{۴})^x$
۳) $y_۲ = ۳^x \ , \ y_۱ = (\frac{۳}{۴})^x$
۴) $y_۲ = \sqrt{۷}^x \ , \ y_۱ = (\frac{۵}{۴})^x$

پاسخ: گزینه ۱

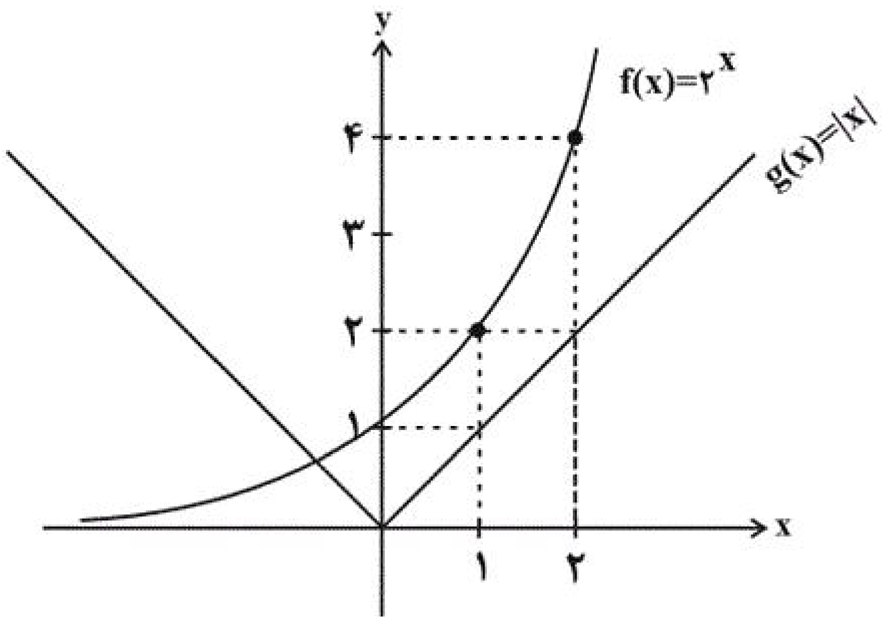
گزینه «۱»

به‌ازای xهای منفی، نمودار $y_۱$ بالاتر از $(\frac{۱}{۳})^x$ قرار دارد، لذا پایه تابع نمایی $y_۱$ باید مقداری مثبت و کوچک‌تر از $(\frac{۱}{۳})$ باشد. ضمناً به‌ازای xهای مثبت، نمودار $y_۲$ پایین‌تر از نمودار ۵^x است. پس پایه تابع نمایی $y_۲$ باید مثبت و کم‌تر از ۵ باشد.

۱۹) نمودار توابع $f(x) = ۲^x$ و $g(x) = |x|$ با دامنه مجموعه اعداد حقیقی، در چند نقطه با هم برخورد دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱



با توجه به رسم دو نمودار در یک دستگاه مختصات می‌بینیم که تنها در یک نقطه برخورد دارند.

(۲۰) اگر لگاریتم عدد $۵\sqrt[۳]{۰/۲}$ در مبنای ۲۵ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $۲+\frac{۱}{A}$ در مبنای ۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$۵\sqrt[۳]{۰/۲} = ۵\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}} = ۵ \times \sqrt[۳]{۵^{-۱}} = ۵ \times ۵^{-\frac{۱}{۳}} = ۵^{\frac{۲}{۳}}$$

$$A = \log_{۲۵}^{۵^{\frac{۲}{۳}}} = \log_{۵^۲}^{۵^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\log_{۵}^{\frac{۱}{A}+۲} = \log_{۵}^{\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}+۲} = \log_{۵}^{۳+۲} = \log_{۵}^{۵} = ۱$$

(۲۱) اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ باشند، حاصل $\log_{۶}^{۲۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲a}{a+b}$ ۲) $\frac{۱-a}{a+b}$ ۳) $\frac{۲-۲a}{a+b}$ ۴) $\frac{a+b}{a-b}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\log_{۶}^{۲۵} = \frac{\log ۲۵}{\log ۶} = \frac{۲\log ۵}{\log ۳+\log ۲} = \frac{۲(۱-\log ۲)}{\log ۳+\log ۲}$$

$$= \frac{۲(۱-a)}{a+b} = \frac{۲-۲a}{a+b}$$

(۲۲) اگر $۲^{x-y} \times ۴^{y-x} = ۱۶$ و $\log x = ۲\log ۲x - \log y$، مقدار $\log_{۴}^{۳y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$۲^{x-y} \times ۲^{۲y-۲x} = ۲^۴ \Rightarrow ۲^{y-x} = ۲^۴ \Rightarrow y - x = ۴ \ (*)$$

$$\log x = ۲\log ۲x - \log y \Rightarrow \log x = \log ۴x^۲ - \log y$$

$$\Rightarrow \log x = \log \frac{۴x^۲}{y}$$

$$x = \frac{۴x^۲}{y} \xrightarrow{x\neq ۰} \frac{۴x}{y} = ۱ \Rightarrow y = ۴x \xrightarrow{(*)} ۴x - x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

$$y = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow \log_{۴}^{۳y} = \log_{۴}^{۳\times\frac{۱۶}{۳}} = \log_{۴}^{۱۶} = ۲$$

۲۳) وارون تابع $f(x) = a + \log_{۳}(bx + ۱)$، از دو نقطهٔ $A(۳\ ,\ ۱)$ و $B(۵\ ,\ ۱۳)$ عبور می‌کند. مقدار b کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$(۳\ ,\ ۱) \in f^{-۱} \Rightarrow (۱\ ,\ ۳) \in f \Rightarrow f(۱) = ۳ \Rightarrow a + \log_{۳}^{(b+۱)} = ۳$$

$$(۵\ ,\ ۱۳) \in f^{-۱} \Rightarrow (۱۳\ ,\ ۵) \in f \Rightarrow f(۱۳) = ۵ \Rightarrow a + \log_{۳}^{(۱۳b+۱)} = ۵$$

طرفین دو معادله بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$a + \log_{۳}^{(۱۳b+۱)} - a - \log_{۳}^{(b+۱)} = ۵ - ۳ \Rightarrow \log_{۳}^{\left(\frac{۱۳b+۱}{b+۱}\right)} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱۳b+۱}{b+۱} = ۹ \Rightarrow ۱۳b + ۱ = ۹b + ۹ \Rightarrow b = ۲$$

۲۴) اگر $f(x) = \sqrt{۱ - \log(۲x - ۲)}$ باشد، دامنهٔ تابع $y = f(-۱ - x)$ کدام است؟

۱) $(-۲\ ,\ ۷]$ ۲) $(-۷\ ,\ -۲]$

۳) $[-۷\ ,\ -۲)$ ۴) $[-۲\ ,\ ۷)$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دامنهٔ $f(x)$ را به دست می‌آوریم. باید به‌طور همزمان داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \\ ۱ - \log(۲x - ۲) \geq ۰ \Rightarrow \log(۲x - ۲) \leq ۱ \Rightarrow ۲x - ۲ \leq ۱۰ \Rightarrow x \leq ۶ \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع $f(x)$، بازهٔ $(۱\ ,\ ۶]$ است. برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $y = f(-۱ - x)$ می‌توان نوشت:

$$۱ < -۱ - x \leq ۶ \Rightarrow ۲ < -x \leq ۷ \Rightarrow -۷ \leq x < -۲$$

۲۵) حاصل $\log_{\sqrt[۴]{۳}}(\sqrt{۵} + \sqrt{۲}) + \log_{\sqrt{۳}}(۷ - ۲\sqrt{۱۰})$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) ۲   ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_{\sqrt[۴]{۳}}(\sqrt{۵} + \sqrt{۲}) + \log_{\sqrt{۳}}(۷ - ۲\sqrt{۱۰})$$
$$= \log_{۳^{\frac{۱}{۴}}}(\sqrt{۵} + \sqrt{۲}) + \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}(۷ - ۲\sqrt{۱۰})$$

$$= ۴\log_{۳}(\sqrt{۵} + \sqrt{۲}) + ۲\log_{۳}(۷ - ۲\sqrt{۱۰}) = ۲[\log_{۳}(\sqrt{۵} + \sqrt{۲})^{۲} + \log_{۳}(۷ - ۲\sqrt{۱۰})] = ۲[\log_{۳}(۷ + ۲\sqrt{۱۰}) + \log_{۳}(۷ - ۲\sqrt{۱۰})]$$

$$= ۲[\log_{۳}(۷ + ۲\sqrt{۱۰})(۷ - ۲\sqrt{۱۰})] = ۲\log_{۳} ۹ = ۲ \times ۲ = ۴$$