



- ① عبارت $A = \left(\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} \right) - 2\cot^2\theta$ ، چند برابر عبارت $B = \left(\cot^4\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^6\theta} \right)$ است؟ (مخرج کسرها، مخالف صفر هستند.)
- (۱) $-2\tan^2\theta$ (۲) $2\tan^2\theta$ (۳) $2\cot^2\theta$ (۴) $-2\cot^2\theta$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$A = \frac{(1 + \cos\theta) + (1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta} - 2\cot^2\theta = \frac{2}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 2 \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 2$$

$$B = \frac{\cos^4\theta + \sin^2\theta - 1}{\sin^6\theta} = \frac{\cos^4\theta - \cos^2\theta}{\sin^6\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta(\cos^2\theta - 1)}{\sin^6\theta} = -\frac{\cos^2\theta \times \sin^2\theta}{\sin^6\theta} = -\cot^2\theta$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{-\cot^2\theta} = -2\tan^2\theta$$

- ② اگر $m = \frac{\tan x}{1+\cos x} + \frac{\tan x}{1-\cos x}$ باشد، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟ (مخرج کسرها مخالف صفر است.)

$$1 - \frac{4}{m^2} \quad (۲)$$

$$1 - \frac{8}{m^2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{m^2} \quad (۱)$$

$$\frac{8}{m^2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\frac{\tan x}{1+\cos x} + \frac{\tan x}{1-\cos x} = \tan x \left(\frac{1-\cos x + 1+\cos x}{1-\cos^2 x} \right)$$

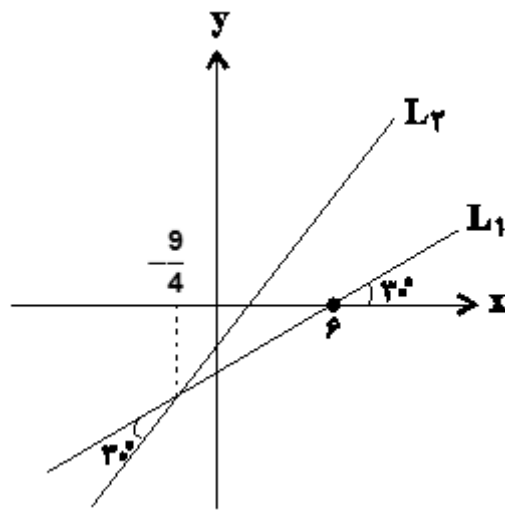
$$= \tan x \left(\frac{2}{\sin^2 x} \right) = m \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{m}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 2(\sin x \cos x)^3$$

$$= 1 - 2 \times \frac{8}{m^3} = 1 - \frac{16}{m^3}$$

۳) با توجه به شکل زیر، خط L_2 در کدام نقطه، محور x ها را قطع می‌کند؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل داده شده، زاویه خط L_1 با جهت مثبت محور x ها، 30° و زاویه خط L_2 با جهت مثبت محور x ها، 60° است.

نقطه $(6, 0)$ روی خط L_1 قرار دارد، بنابراین:

$$L_1 : y = mx + b \xrightarrow{m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$\xrightarrow{(6, 0)} b = -2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{x = -\frac{9}{4}} y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{9}{4}\right) - 2\sqrt{3} = -\frac{11\sqrt{3}}{4}$$

بنابراین نقطه $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$ روی خط L_2 قرار دارد. داریم:

$$y = m'x + b' \xrightarrow{m' = \tan 60^\circ = \sqrt{3}} y = \sqrt{3}x + b'$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{9}{4}, -\frac{11\sqrt{3}}{4}\right)} b' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{y=0} x = \frac{1}{2}$$

۴) اگر $3 \sin \alpha - 2 \cos \beta = -5$ ، آنگاه حاصل $2 \sin \beta + 3 \cos \alpha$ کدام است؟

۴) صفر

۳) -۱

۲) ۱

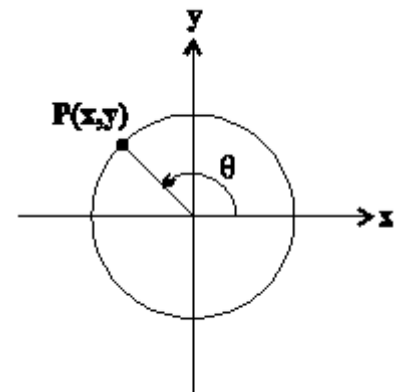
۱) ۵

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم همواره $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ و $-1 \leq \cos \beta \leq 1$ ، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} -3 \leq 3 \sin \alpha \leq 3 \\ -2 \leq -2 \cos \beta \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -5 \leq 3 \sin \alpha - 2 \cos \beta \leq 5$$

تنها زمانی حاصل $3 \sin \alpha - 2 \cos \beta$ برابر -۵ می‌شود که $\sin \alpha = -1$ و $\cos \beta = 1$ باشد.



$$\begin{cases} y = \sin \theta \\ x = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

بنابراین برای زوایای α و β داریم:

$$\begin{cases} 1 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \\ \sin^2 \beta + 1 = 1 \Rightarrow \sin \beta = 0 \end{cases}$$

پس: $2 \sin \beta + 3 \cos \alpha = 0$

۵) اگر نقطه $P\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, y\right)$ روی دایره مثلثاتی در ربع سوم با زاویه θ قرار داشته باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۳) $-\sqrt{3}$

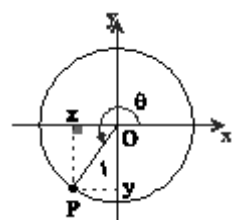
۲) $\sqrt{3}$

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

نقطه $P\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, y\right)$ در ناحیه سوم با زاویه θ قرار دارد. با توجه به شکل و رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{3}{3} \xrightarrow{y < 0} y = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{-1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

۶) اگر انتهای کمان زاویه α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی و $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{5}{13}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{5}{13}$

(۱) $-\frac{10}{13}$

(۳) $-\frac{12}{13}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)^2}}$$

$$(1 + \cos \alpha) \frac{|\sin \alpha|}{|1 + \cos \alpha|} \text{ در ناحیه چهارم } \alpha (1 + \cos \alpha) \frac{(-\sin \alpha)}{(1 + \cos \alpha)}$$

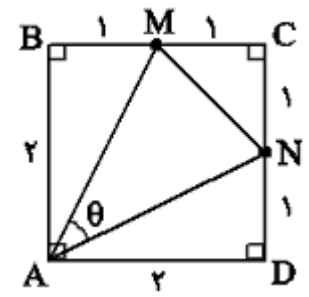
$$= -\sin \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{5}{13}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{25}$$

$$\Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \cot \alpha = -\frac{12}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{5}{12}$$

۷) در مربع شکل روبه‌رو، مقدار $\sin \theta$ کدام است؟



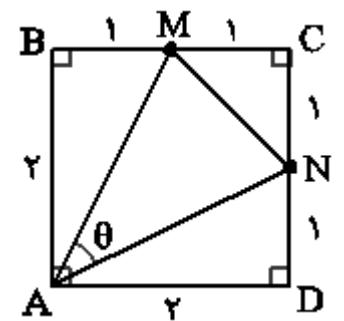
- (۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{2}{5}$

- (۱) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABM و ADN داریم:



$$AM = AN = \sqrt{5}$$

از طرفی داریم:

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times AM \times AN \times \sin \theta$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = S_{ABCD} - (S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ADN} + S_{\triangle MNC})$$

$$\Rightarrow (2 - (1 + 1 + \frac{1}{2})) = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5}$$

۸) اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{23}{32}$ و $135^\circ < x < 180^\circ$ ، آن گاه حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

$\frac{-5}{16}$ (۴)

$\frac{-11}{16}$ (۳)

$\frac{-5}{8}$ (۲)

$\frac{-5}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{23}{32}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$$

$$\Rightarrow 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{23}{32} \Rightarrow -3 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{-9}{32}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x \times \cos^2 x = \frac{9}{64} \Rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{3}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه دوم}} \sin x \cos x = \frac{-3}{8}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\sin x \cos x = -\frac{3}{8}$ با فرض اینکه $\sin x + \cos x = A$ باشد، داریم:

$$\sin x + \cos x = A \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = A^2 \Rightarrow 1 + 2\left(\frac{-3}{8}\right) = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{135^\circ < x < 180^\circ} A = \frac{-1}{2}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= \frac{-1}{8} - 3\left(\frac{-3}{8}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8} - \frac{9}{16} = \frac{-11}{16}$$

۹) اگر $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(2\alpha - \pi) + 4 \cos(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)}{2 \cos(2\pi - 4\beta) - \sin(\frac{3\pi}{4} + 4\beta)}$ کدام است؟

-۱ (۴)

$-\frac{5}{4}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} 2\alpha + 4\beta = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{دو زاویه ی متمم}}$$

$$\sin 2\alpha = \cos 4\beta$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(2\alpha - \pi) &= -\sin 2\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) &= -\sin 2\alpha \\ \cos(2\pi - 4\beta) &= \cos 4\beta \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 4\beta\right) &= -\cos 4\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{عبارت} = \frac{-\sin 2\alpha - 4 \sin 2\alpha}{2 \cos 4\beta + \cos 4\beta} = \frac{-5 \sin 2\alpha}{3 \cos 4\beta} = \frac{-5}{3}$$

۱۰) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ و $\sin x + \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{5}$ باشد، آنگاه حاصل $\tan x - \cot x$ کدام است؟

(۴) $-\frac{12\sqrt{13}}{30}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۲) $-\frac{1}{12}$

(۱) $\frac{12\sqrt{13}}{30}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه (۲)

$$\sin(x) + \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{5} \quad (1)$$

اگر $A = \sin x + \cos x$ و $B = \cos x - \sin x$ باشد، آنگاه:

$$A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \frac{49}{25} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \times \cos x = \frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow \sin x \times \cos x = \frac{12}{25} \quad (2)$$

$$B^2 = (\cos x - \sin x)^2$$

$$\Rightarrow B^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \times \cos x$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{12}{25}\right) = \frac{1}{25} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x = +\frac{1}{5} \quad (3)$$

حال با داشتن A و B، حاصل $\tan x - \cot x$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan x - \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \times \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \times \cos x} \\ &\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{12}{25}} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

۱۱) اگر نقطه $P(x, \frac{3}{5})$ انتهای کمان زاویه θ باشد و داشته باشیم $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ ، آنگاه حاصل $A = \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) - 3 \sin(\pi + \theta)}{\tan(\theta - \pi) + \cos(2\pi - \theta)}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{45}{11}$

(۳) $\frac{52}{31}$

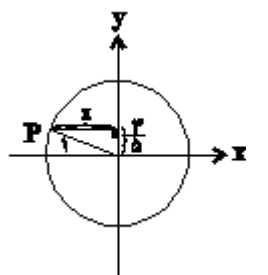
(۲) $\frac{45}{11}$

(۱) $-\frac{52}{31}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

نقطه $P(x, \frac{3}{5})$ مطابق شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. با توجه به شکل و رابطه فیثاغورس داریم:



$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + x^2 = 1^2 \Rightarrow x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{4}{5}$$

بنابراین: $P\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (\cos \theta, \sin \theta)$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) - 3 \sin(\pi + \theta)}{\tan(\theta - \pi) + \cos(2\pi - \theta)} = \frac{-\cos \theta + 3 \sin \theta}{\tan \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{4}{5} + 3\left(\frac{3}{5}\right)}{-\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{31}{20}} = -\frac{52}{31} \end{aligned}$$

۱۲) اگر در معادله $\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \cos(3x + \frac{\pi}{\lambda})$ ، $(x + \frac{\pi}{\lambda})$ و $(3x + \frac{\pi}{\lambda})$ دو زاویه حاده باشند، آنگاه حاصل $\cos 4x + \cot 8x + \sin 16x$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای دو زاویه حاده α, β ، اگر $\sin \alpha = \cos \beta$ باشد، آنگاه $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ است:

$$\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \cos(3x + \frac{\pi}{\lambda}) \rightarrow x + \frac{\pi}{\lambda} + 3x + \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$\cos 4x + \cot 8x + \sin 16x$$

$$= \cos 4(\frac{\pi}{8}) + \cot 8(\frac{\pi}{8}) + \sin 16(\frac{\pi}{8})$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + \cot \pi + \sin \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳) کدامیک از اعداد زیر از سایرین کوچکتر است؟ (زاویه ۱ برحسب رادیان است.)

$(\cot 1)^{\tan 1}$ (۴)

$(\tan 1)^{\cot 1}$ (۳)

$(\cot 1)^{\cot 1}$ (۲)

$(\tan 1)^{\tan 1}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به این که زاویه ۱ رادیان حدود ۵۷ درجه است، داریم:

$$1 \text{ rad} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 1 > 1$$

حال چهار عدد را به صورت زیر می‌نویسیم:

گزینه «۱»: $(\tan 1)^{\tan 1}$ گزینه «۲»: $(\frac{1}{\tan 1})^{\cot 1}$

گزینه «۳»: $(\tan 1)^{\cot 1}$ گزینه «۴»: $(\frac{1}{\tan 1})^{\tan 1}$

گزینه‌های «۱» و «۳» بزرگتر از یک هستند؛ از آن جا که $\tan 1 > \cot 1$ پس از میان دو گزینه باقیمانده، $(\frac{1}{\tan 1})^{\tan 1}$ کوچکتر است؛ زیرا وقتی پایه عددی بین صفر و یک است عددی کوچکتر است که توان آن بزرگتر باشد. بنابراین گزینه «۴» درست است.

۱۴) اگر $\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$ باشد، $\tan^2(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\Rightarrow \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \cos^2 \alpha \quad (*)$$

با توجه به زوایای داده شده، ملاحظه می‌شود که اختلافشان برابر $\frac{\pi}{4}$ است:

$$(x + \frac{\pi}{4}) - (x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

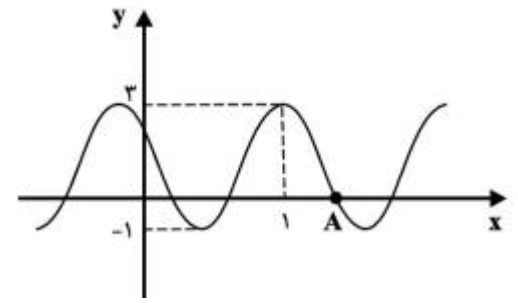
پس به جای زاویه $x - \frac{\pi}{4}$ زاویه $x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ قرار می‌دهیم:

$$\sin^2((x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$$
$$\xrightarrow{(*)} \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\tan^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2(x + \frac{\pi}{4})} - 1 = 4 - 1 = 3$$

۱۵) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin c\pi x$ در شکل زیر رسم شده است. طول نقطه A کدام است؟



- (۱) $\frac{13}{6}$
- (۲) $\frac{14}{6}$
- (۳) $\frac{15}{6}$
- (۴) $\frac{16}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب ۳ و -۱ است، پس داریم:

$$\begin{cases} y_{\min} = a - |b| = -1 \\ y_{\max} = a + |b| = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1, |b| = 2$$

چون در همسایگی $x = 0$ نمودار تابع نزولی است، $bc < 0$ خواهد بود. حال برای سادگی b را منفی و c را مثبت در نظر می‌گیریم. از روی نمودار مشخص است که $\frac{3}{4}$ برابر دوره تناوب نمودار برابر ۱ است.

$$\frac{3}{4}T = 1 \Rightarrow T = \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{c\pi} = \frac{2}{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \sin \frac{3\pi x}{2}$$

نقطه A یکی از صفرهای تابع f است:

$$\xrightarrow{f(x)=0} \sin \frac{3\pi x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{4k}{3} + \frac{1}{9} \\ \frac{3\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{4k}{3} + \frac{5}{9} \end{cases}$$

صفرهای مثبت تابع عبارت‌اند از $\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{13}{9}, \frac{17}{9}, \dots$. طول نقطه A سومین صفر مثبت تابع یعنی $\frac{13}{9}$ است.

۱۶) معادله $\tan x(2 \sin x - 1) = \frac{1}{\cos x}$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- ۱ (۲)
۳ (۴)

- ۱) صفر
۲) ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با شرط $\cos x \neq 0$ ، طرفین را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}(2 \sin x - 1) = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\times \cos x} \sin x(2 \sin x - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(\sin x - 1)(\sin x + \frac{1}{2}) = 0$$

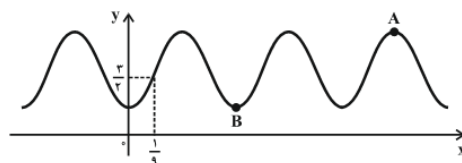
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $\cos x$ را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست.

k	۰	۱
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$ ✗	$2\pi - \frac{\pi}{6}$ ✓
$x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$	$(\pi + \frac{\pi}{6})$ ✓	$3\pi + \frac{\pi}{6}$ ✗

بنابراین این معادله فقط ۲ جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۱۷) اگر نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin^2(\frac{3\pi}{4}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



- ۱ (۱)
۳/۴ (۲)
۲ (۳)
۵/۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + a \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$$

ضابطه تابع $f(x) = 1 + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{4}x$ را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = 1 + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{4}x = 1 + 2 \left(\frac{1 - \cos 3\pi x}{2} \right) = 2 - \cos 3\pi x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}, \quad \max = 2 + |-1| = 3, \quad \min = 2 - |-1| = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ مختصات: } (2/5T, 3) = (2/3, 3) \\ B \text{ مختصات: } (T, 1) = (2/3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{شیب خط: } m_{AB} = \frac{3-1}{2/3-2/3} = 2$$

۱۸) دوره تناوب اصلی تابع $y = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ کدام است؟

(۴) ندارد.

(۳) π

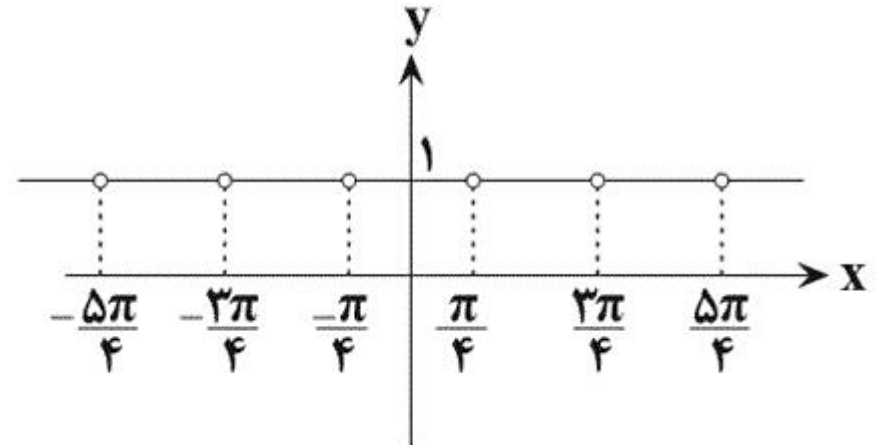
(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۱) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، این تابع به صورت ثابت $y = 1$ درمی‌آید. اما چون نقاط $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ در دامنه تابع نیستند، بنابراین نمودار تابع به صورت زیر و دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.



۱۹) برای $x \in \left(\frac{\pi}{\lambda}, \frac{3\pi}{\lambda}\right) - \left\{\frac{\pi}{\lambda}\right\}$ اگر $\tan(2x) = \frac{2}{m-3}$ باشد، حدود m کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - [1, 5]$

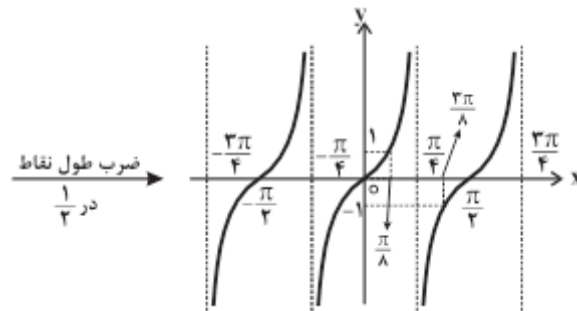
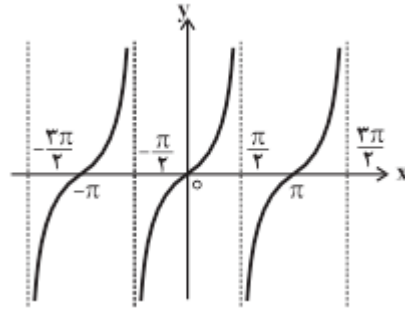
(۳) $(5, +\infty)$

(۲) $(3, 5)$

(۱) $(1, 5) - \{3\}$

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع $y = \tan(2x)$ را با انقباض افقی نمودار تابع $y = \tan x$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار بالا داریم:

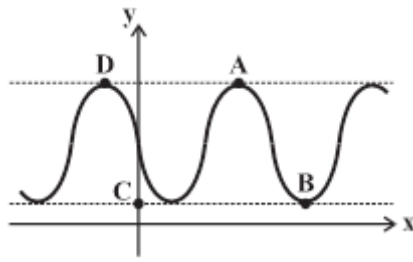
$$\frac{\pi}{\lambda} < x < \frac{3\pi}{\lambda}, x \neq \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow |\tan(2x)| > 1 \Rightarrow \left| \frac{2}{m-3} \right| > 1$$

$$\Rightarrow |m - 3| < 2 \Rightarrow 1 < m < 5$$

اما واضح است که مقدار $m = 3$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow m \in (1, 5) - \{3\}$$

۲۰) نمودار تابع $f(x) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 4$ به صورت شکل زیر است. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



(۱) ۳۵

(۲) ۴۵

(۳) ۲۴

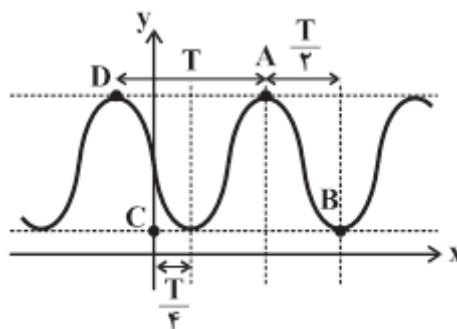
(۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

برای تابع f داریم:

$$\begin{cases} \max(f) = |-3| + 4 = 1 \\ \min(f) = -|-3| + 4 = 1 \end{cases}$$

از طرفی چهارضلعی ABCD دوزنقه است.



$$\begin{cases} AD = T = 4 \\ BC = T + \frac{1}{4}T = 5 \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{6(4+5)}{2} = 27$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع} = \max(f) - \min(f) = 6$$

۲۱) تابع متناوب f با دامنه R و دوره تناوب 2 ، در بازه $[0, 2)$ به صورت $f(x) = \begin{cases} x; 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{2-x}; 1 \leq x < 2 \end{cases}$ تعریف شده است. مقدار $f(-1/11)$ کدام است؟

(۲) ۰/۱۱

(۴) ۰/۳

(۱) ۰/۹

(۳) ۰/۰۹

پاسخ: گزینه ۱

در توابع متناوب با دوره تناوب T داریم:

$$f(x) = f(x + kT) \xrightarrow{T=2} f(x) = f(x + 2k); k \in Z$$

حال با قراردادن $k = 5$ خواهیم داشت:

$$f(-1/11) = f(-1/11 + 2 \times 5) = f(1/19) = \sqrt{2 - 1/19} = 0/9$$

۲۲) مجموع جواب‌های معادله $\sin^6 x = \cos x(1 + \cos^3 x)$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}$ (۴)

$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

$\frac{4\pi}{3}$ (۲)

$\frac{3\pi}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin^6 x = \cos x + \cos^3 x \Rightarrow \cos^3 x - \sin^6 x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = -\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \begin{cases} \cos x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{4\pi}{3}$$

۲۳) مجموع ریشه‌های معادله $(3 \sin x - 2)(4 \cos x + 3) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{7\pi}{12}$ (۲)

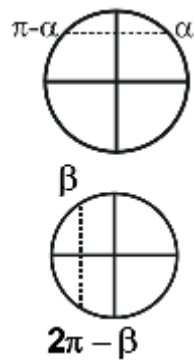
4π (۴)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

3π (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} 3 \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{3} = \sin \alpha \Rightarrow \\ \text{مجموع} = \alpha + (\pi - \alpha) = \pi \\ 4 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{4} = \cos \beta \Rightarrow \\ \text{مجموع} = \beta + (2\pi - \beta) = 2\pi \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{مجموع کل جواب‌ها} = 3\pi$$

۲۴) اگر $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ باشد، نمودار $y = 4 \sin ax$ در بازه $(0, 2\pi)$ ، حداکثر چند نقطه برخورد با $y = a$ دارد؟

۵ (۴)

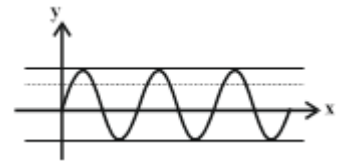
۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

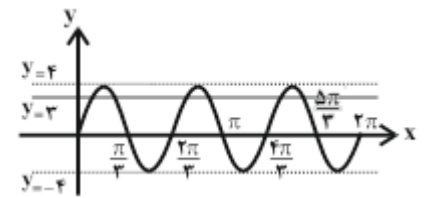
واضح است که $-4 \leq 4 \sin ax \leq 4$ ، پس برای اینکه با $y = a$ برخورد داشته باشد، باید $a \in [-4, 4] - \{0\}$ باشد. در ضمن $a = 4$ یا $a = -4$ با نمودار برخوردهای کمتری نسبت به بقیه اعداد این بازه دارند:



در واقع $a \in [-3, 3] - \{0\}$ است.

برای اینکه تعداد نقاط برخورد بیشتر شوند، دوره تناوب باید کوچکترین مقدار ممکن باشد. یعنی:

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3}$$



در این حالت $y = 3$ با نمودار $y = 4 \sin 3x$ ، ۶ نقطه برخورد دارد.

۲۵) تعداد جوابهای معادله $\cos 2x - \cos x = \frac{1}{|x|+[-x]}$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ ([]، نماد جز صحیح است.)

۵ (۲)

۶ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

تابع تعریف نشده: $x \in \mathbb{Z}$

$$x \notin \mathbb{Z} : 2\cos^2 x - 1 - \cos x = -1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۴ جواب است.