۱) هر گاه $\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = a$ باشد، حاصل $1+\cot^2 x$ برحسب a همواره کدام است؟ $(a \in R)$

۱) a^2 ۲) $\frac{1}{a^2}$ ۳) $\sqrt{a}$ ۴) a

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم که $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = a \Rightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = a$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)} = a \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = a \qquad (*)$$

از طرفی:

$$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \xrightarrow{(*)} 1+\cot^2 x = a^2$$

۲) اگر $0 < x < 90^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ همواره کدام است؟

۱) $2\cot x$ ۲) $2\tan x$ ۳) $-2\cot x$ ۴) $-2\tan x$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

ابتدا صورت و مخرج کسر زیر هر رادیکال را در مزدوج مخرج آن ضرب کرده و ساده می‌کنیم، داریم:

$$A = \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$$

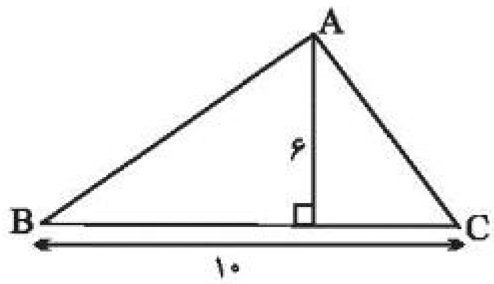
$$A = \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} \quad , \quad 1-\sin^2 x = \cos^2 x$$

$$A = \frac{|1+\sin x|}{|\cos x|} - \frac{|1-\sin x|}{|\cos x|}$$

چون $0 < x < 90^\circ$ است، پس $\cos x > 0$, $1+\sin x > 0$ و $1-\sin x > 0$ می‌باشد، در نتیجه قدرمطلق‌ها را بر می‌داریم، پس:

$$A = \frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{\cos x} = 2\tan x$$

③ مطابق شکل زیر، اگر در مثلث ABC، رابطهٔ $۲\cot\hat{B} = ۳\cot\hat{C}$ برقرار باشد، طول ضلع AB کدام است؟



۱) ۶

۲) $۶\sqrt{۲}$

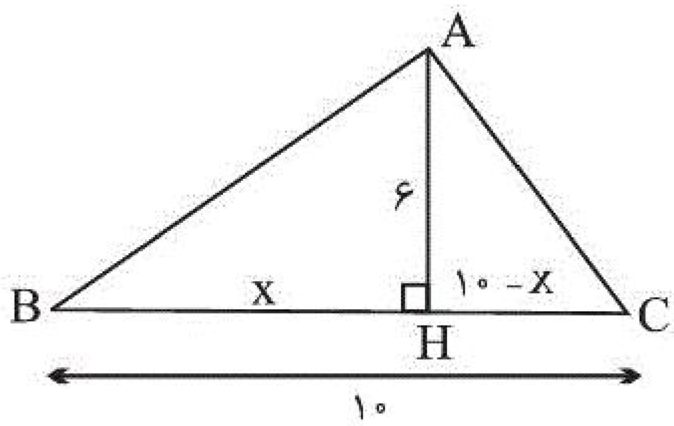
۳) ۹

۴) $۹\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

مطابق شکل، داریم:



$$\begin{cases} \tan\hat{B} = \frac{۶}{x} \\ \tan\hat{C} = \frac{۶}{۱۰ - x} \end{cases}$$

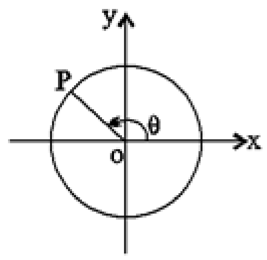
$$۲\cot\hat{B} = ۳\cot\hat{C} \Rightarrow ۲ \times \frac{x}{۶} = ۳ \times \frac{(۱۰-x)}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۳۰ - ۳x \Rightarrow x = ۶$$

رابطهٔ فیثاغورس در $A\overset{\triangle}{B}H$: $AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲}$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{۶^{۲} + ۶^{۲}} = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$$

④ مطابق شکل زیر، نقطه $P(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}, b)$ روی دایره مثلثاتی در ربع دوم با زاویه θ قرار دارد. حاصل $\tan\theta - \cot\theta$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۱-

---

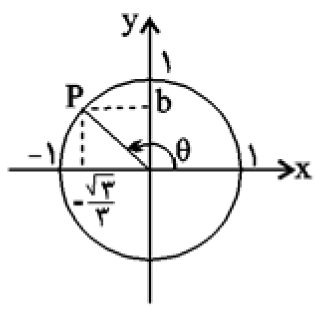
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به نقطه $P(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}, b)$ داریم:

$$x_p^۲ + y_p^۲ = ۱ \Rightarrow (-\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ + b^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow b^۲ = \frac{۶}{۹} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$



$$\tan\theta - \cot\theta = \frac{y_p}{x_p} - \frac{x_p}{y_p} = \frac{\frac{\sqrt{۶}}{۳}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}} - \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۶}}{۳}}$$

$$= -\sqrt{۲} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{-۲+۱}{\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵) خط $۳y+۴x-۱=۰$ با جهت مثبت محورxها، زاویه θ می‌سازد. حاصل $\sin\theta-\cos\theta$ چقدر است؟ $(۰<\theta<۱۸۰^\circ)$

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲- ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۴-

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$\tan\theta$ همان شیب خط است. پس شیب خط را با استاندارد کردن معادله خط می‌یابیم.

$$۳y+۴x-۱=۰ \Rightarrow y=\frac{-۴}{۳}x+\frac{۱}{۳} \Rightarrow \text{شیب}=\tan\theta=\frac{-۴}{۳}$$

از این‌که تانژانتθ، منفی شده است نتیجه می‌گیریم که $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$ است، پس $\sin\theta>۰$ و $\cos\theta<۰$ خواهد بود.

حالا $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را می‌یابیم:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow ۱+\left(\frac{-۴}{۳}\right)^۲=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta}=\frac{۲۵}{۹} \xrightarrow{\cos\theta<۰} \cos\theta=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \xrightarrow{\sin\theta>۰} \sin\theta=\sqrt{۱-\cos^۲\theta}$$
$$=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

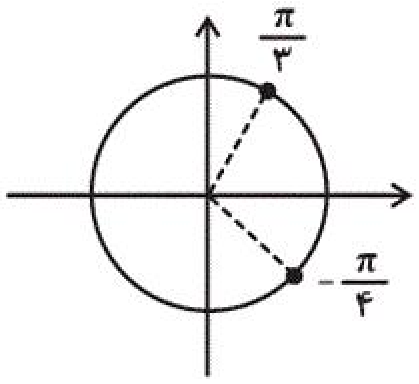
$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{۴}{۵}-\left(-\frac{۳}{۵}\right)=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

۶) اگر $-\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۳}$ و $\cos x=\frac{۱-m}{۲}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۲) $[۰, \frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-۱, ۰]$ ۴) $[۰, ۱]$

پاسخ: گزینه ۳

مطابق دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$-\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳}\le\cos x\le ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\le\frac{۱-m}{۲}\le ۱ \Rightarrow ۱\le ۱-m\le ۲$$
$$\Rightarrow -۱\le m\le ۰$$

۷) اگر $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{۱}{۴}$ و انتهای کمان α در ربع دوم مثلثاتی باشد، حاصل $A = |\sin\alpha - \cos\alpha|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق اتحاد $a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$، داریم:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱})^۳ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha(\underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱})$$

$$= ۱ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha \Rightarrow ۱ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴}$$

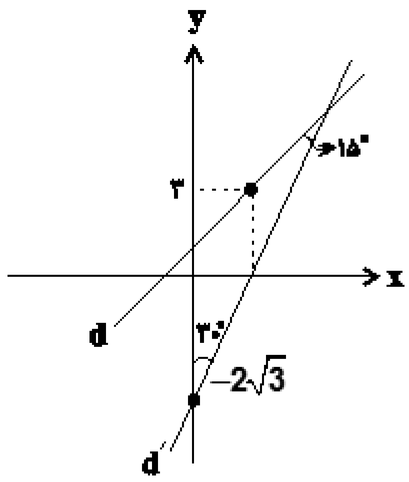
$$\Rightarrow \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴} \Rightarrow |\sin\alpha\cos\alpha| = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha>۰\ ,\ \cos\alpha<۰]{\text{امتهای } \alpha \text{ در ناحیه دوم}} \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{۱}{۲}$$

$$A = |\sin\alpha - \cos\alpha| \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۲ = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۱ - ۲(-\frac{۱}{۲}) = ۲$$

$$\xrightarrow{A>۰} A = \sqrt{۲}$$

⑧ با توجه به شکل مقابل، معادله خط d کدام است؟



۱) $y = x + ۱$

۲) $y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x + ۱$

۳) $y = x + ۲$

۴) $y = \sqrt{۳}x + \frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

در مثلث تشکیل شده حاصل از برخورد خط 'd با محورها داریم:

$$\tan ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{x}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow x = ۲$$

پس خط 'd در نقطه (۲,۰) محور xها را قطع می‌کند.

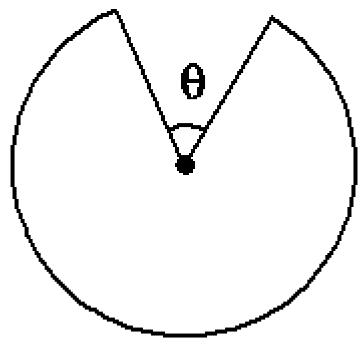
بنابراین نقطه (۲,۳) روی خط d قرار دارد.

با توجه به مثلث تشکیل شده حاصل از برخورد دو خط d و 'd با محور xها، زاویه خط d با جهت مثبت محور xها، برابر °۴۵ است. پس:

$$\text{معادله خط d} : y = mx + h \xrightarrow{m=\tan ۴۵° = ۱} y = x + h$$

$$\xrightarrow{(۲,۳)} h = ۱ \Rightarrow y = x + ۱$$

۹) با برش دادن یک دایرهٔ مثلثاتی شکلی شبیه زیر ساخته‌ایم. اگر محیط شکل برابر $\frac{۶+۵\pi}{۳}$ واحد باشد، $\tan\theta$ برابر کدام گزینه است؟

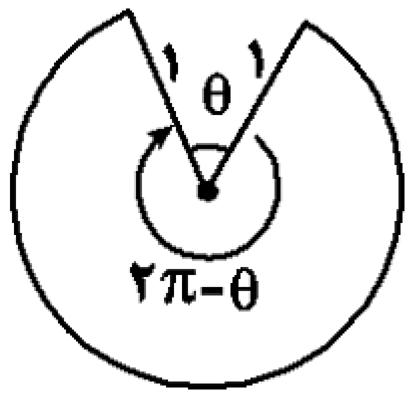


۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$　　۲) $\sqrt{۲}$　　۳) ۱　　۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

می‌دانیم شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر ۱ است. محیط شکل شامل ۲ شعاع و قسمتی از دایره است. بنابراین:



$$۲\pi - \theta + ۱ + ۱ = \frac{۶+۵\pi}{۳} \Rightarrow ۲\pi - \theta = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$$

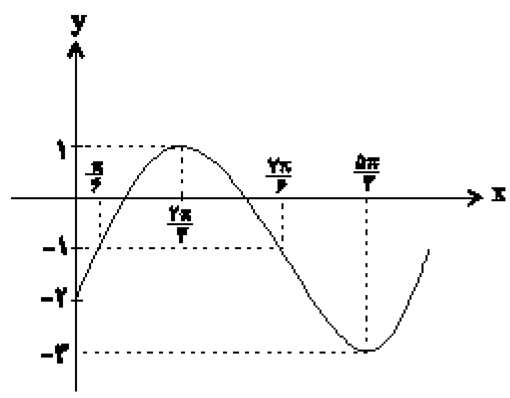
۱۰) تابع $y = ۲\sin(x - \frac{\pi}{۶}) - ۱$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۶}, a)$ یک‌به‌یک است، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$　　۲) π　　۳) $\frac{۲\pi}{۳}$　　۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

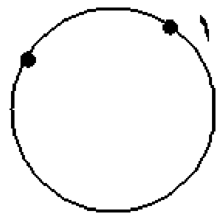
گزینه‌ی «۳»

با رسم تابع $y = ۲\sin(x - \frac{\pi}{۶}) - ۱$ داریم:



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(\frac{\pi}{۶}, \frac{۲\pi}{۳})$ یک به یک است، بنابراین $a = \frac{۲\pi}{۳}$ است.

۱۱) چرخ و فلکی را با ۴۰ کابین درنظر بگیرید. اگر در شروع حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما در کابین ۷ نشسته باشید، بعد از دوران $\frac{۲۳\pi}{۴}$ رادیان، شما در موقعیت کدام کابین هستید؟



۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۲ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

فاصله زاویه ای دو کابین متوالی $= \frac{\pi}{۲۰} = \frac{۲\pi}{۴۰}$

$\frac{۲۳\pi}{۴} = \frac{۲۴\pi-\pi}{۴} = ۶\pi - \frac{\pi}{۴} \equiv -\frac{\pi}{۴}$

کابین دوم←پس باید ۵ کابین به عقب برگردیم. $\Rightarrow \frac{\frac{-\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲۰}} = -۵$

۱۲) اگر $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ} = -\frac{۱۲۷}{۷۳}$، مقدار $\tan ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) ۰/۲۷ ۲) ۰/۳۶
۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۱۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ} = \frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵^\circ)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$

$$= \frac{\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ} = \frac{\frac{\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}} = \frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+۱}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-۱} = \frac{\tan ۱۵^\circ + ۱}{\tan ۱۵^\circ - ۱}$$

حال با فرض $x = \tan ۱۵^\circ$، داریم:

$$\frac{x+۱}{x-۱} = -\frac{۱۲۷}{۷۳} \Rightarrow ۷۳x + ۷۳ = -۱۲۷x + ۱۲۷$$
$$\Rightarrow ۲۰۰x = ۵۴ \Rightarrow x = ۰/۲۷$$

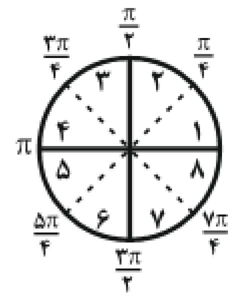
۱۳) اگر $x\in[\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۴}]$ باشد، حاصل عبارت $\frac{|\sin x+\cos x|}{۲}+\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}$ کدام است؟

۱) $\cos x$ ۲) $۲\cos x$ ۳) $-۲\sin x$ ۴) $-\sin x$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

اگر دایره مثلثاتی را به ۸ قسمت تقسیم کنیم، انتهای کمان x در ناحیهٔ هفتم قرار می‌گیرد.



در ناحیهٔ هفتم $\begin{cases}\sin x<۰\\ \cos x<۰\end{cases}$ ، $|\sin x|>|\cos x|\Rightarrow\begin{cases}\sin x-\cos x<۰\\ \sin x+\cos x<۰\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}|\sin x-\cos x|=-\sin x+\cos x\\ |\sin x+\cos x|=-\sin x-\cos x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{-\sin x+\cos x}{۲}+\frac{-\sin x-\cos x}{۲}=-\sin$$

۱۴)

اگر $\cos(\frac{۷\pi}{۲}-x)+\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳x+\cos^۳x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۵۴}$ ۲) $-\frac{۲۳}{۵۴}$ ۳) $\frac{۲۳}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۲۳}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases}\cos(\frac{۷\pi}{۲}-x)=\cos(۴\pi-\frac{\pi}{۲}-x)=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x\\ \sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x\end{cases}$$

$$\Rightarrow-\sin x-\cos x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin x+\cos x=-\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow\sin^۳x+\cos^۳x=(\sin x+\cos x)^۳-۳\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$$

$$\sin^۳x+\cos^۳x=(-\frac{۲}{۳})^۳-۳\sin x\cos x\,(-\frac{۲}{۳})\quad(۱)$$

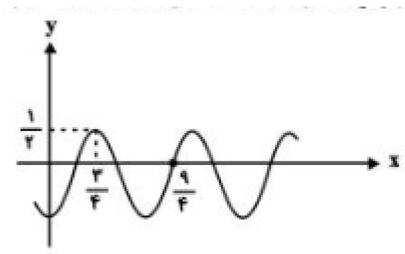
حال حاصل $\sin x.\cos x$ را بدست می‌آوریم:

$$\sin^۲x+\cos^۲x=(\sin x+\cos x)^۲-۲\sin x\cos x$$

$$۱=(-\frac{۲}{۳})^۲-۲\sin x.\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=-\frac{۵}{۱۸}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\sin^۳x+\cos^۳x=-\frac{۸}{۲۷}-۳\,(-\frac{۵}{۱۸})\,(-\frac{۲}{۳})=-\frac{۲۳}{۲۷}$$

⑮ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin b\pi(x-c)$ در شکل زیر رسم شده است . کم‌ترین مقدار مثبت حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین $|a| = \frac{۱}{۲}$ است، یعنی $a \pm \frac{۱}{۲}$. همچنین فاصله طولی $x = \frac{۳\pi}{۴}$ برابر $\frac{۳}{۴}$ دوره تناوب است:

$$\frac{۳T}{۴} = \frac{۹}{۴} - \frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow T = ۲$$

$$T_f = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

اما چون در همسایگی $x = ۰$ تابع صعودی است a و b باید هم‌علامت باشند، بنابراین یکی از حالات $(a - \frac{۱}{۲}, b = ۱)$ یا $(a = -\frac{۱}{۲}, b = -۱)$ رخ می‌دهد. حال با فرض مثبت بودن a و b داریم:

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\sin\pi(x-c)$$

$$f(\frac{۹}{۴}) = \frac{۱}{۲}\sin\pi(\frac{۹}{۴} - c) = \frac{۱}{۲}\sin\pi(۲ + \frac{۱}{۴} - c)$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin\pi(\frac{۱}{۴} - c) = ۰$$

$$= \pi(\frac{۱}{۴} - c) = k'\pi ; k' \in Z$$

$$\Rightarrow c = k' + \frac{۱}{۴}$$

k' باید زوج باشد؛ زیرا اگر فرد باشد نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود که نادرست است:

$$\Rightarrow c = ۲k + \frac{۱}{۴}$$

در نتیجه حاصل $a+b+c$ با توجه به علامت a و b به دو صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} a, b < ۰ : a+b+c = ۲k - \frac{۵}{۴} \\ a, b > ۰ : a+b+c = ۲k + \frac{۷}{۴} \end{cases}$$

کم‌ترین مقدار مثبت $a+b+c$ به ازای $k = ۱$ در رابطه $۲k - \frac{۵}{۴}$ به دست می‌آید که برابر $\frac{۳}{۴}$ خواهد شد.

۱۶) چند نقطه در بازه $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۷})$، عضو دامنه تابع $f(x)=\tan\frac{\pi}{x}$ نیست؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$D_f=\{x\in R \mid \frac{\pi}{x}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x}\neq k+\frac{۱}{۲}\Rightarrow x\neq\frac{۱}{k+\frac{۱}{۲}}$$

حال با فرض اینکه مقادیر x در بازه $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۷})$ باشند، داریم:

$$-\frac{۲}{۳}<\frac{۱}{k+\frac{۱}{۲}}<-\frac{۱}{۷}\Rightarrow -۷<k+\frac{۱}{۲}<-\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۱۵}{۲}<k<-۲$$

$$\xrightarrow{k\in Z} -۷\leq k\leq -۳$$

بنابراین ۵ نقطه از نقاط بازه $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۷})$ عضو دامنه f نیستند.

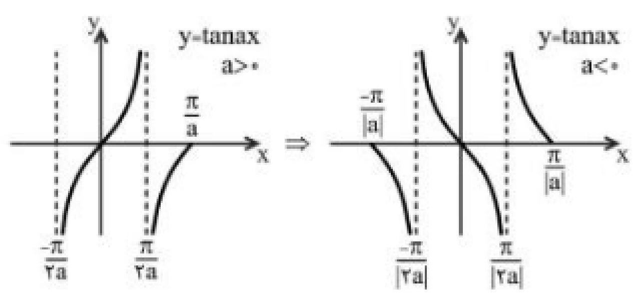
۱۷) تابع $f(x)=\tan ax$ در بازهٔ $(-b\,,\,b)$ اکیداً نزولی است. اگر بزرگترین مقدار b برابر ۲ باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) ۱- ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای آنکه تابع $f(x)=\tan ax$ در بازهٔ $(-b\,,\,b)$ اکیداً نزولی باشد، باید $a<۰$ باشد. برای درک این موضوع به دو نمودار زیر دقت کنید:



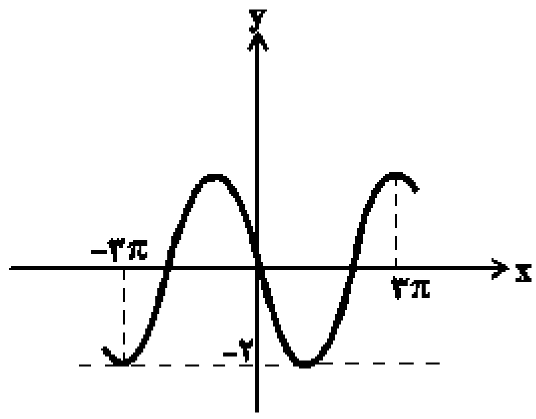
شکل (۲) شکل (۱)

با توجه به شکل (۲)، بزرگترین مقدارb که به ازای آن تابع f اکیداً نزولی است برابر با $\frac{\pi}{|۲a|}$ است، بنابراین:

$$-\frac{\pi}{۲a}=۲\ \Rightarrow\ a=-\frac{\pi}{۴}\ \Rightarrow\ f(x)=\tan(-\frac{\pi x}{۴})$$

$$\Rightarrow\ f(۱)=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$

۱۸) نمودار زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin(bx+\pi)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\frac{۱۷\pi}{۲})$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$

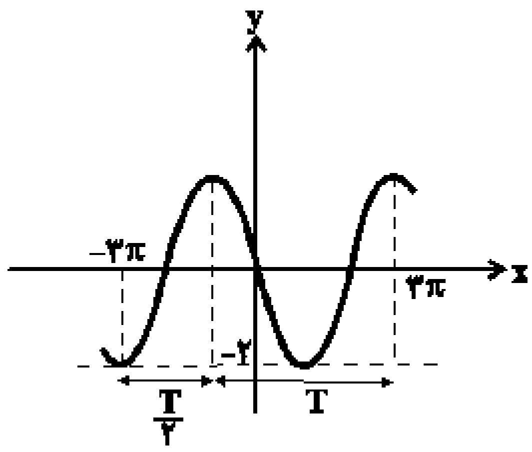
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با ساده کردن ضابطه داده شده داریم:

$$f(x) = a\sin(bx+\pi) = -a\sin bx$$



با توجه به نمودار، ضرایب a و b هم علامت بوده و داریم:

$$\frac{۳}{۲}T = ۶\pi \Rightarrow T = ۴\pi$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

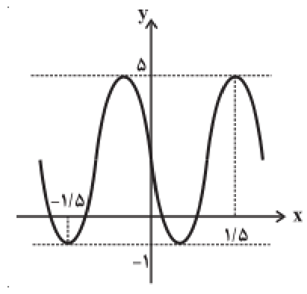
کم‌ترین مقدار تابع برابر ۲- است. بنابراین:

$$\begin{cases} -|a| = -۲ \Rightarrow a = \pm ۲ \\ b = \frac{۱}{۲}, a = ۲ \text{ یا } a = -۲, b = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -۲\sin(\frac{x}{۲})$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱۷\pi}{۲}) = -۲\sin(\frac{۱۷\pi}{۴}) = -۲\sin(۴\pi + \frac{\pi}{۴})$$

$$= -۲\sin(\frac{\pi}{۴}) = -\sqrt{۲}$$

۱۹) اگر نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin(cx)\cos(cx)$ باشد، حاصل $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲\pi}{۳}$

۲) $\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۶}$

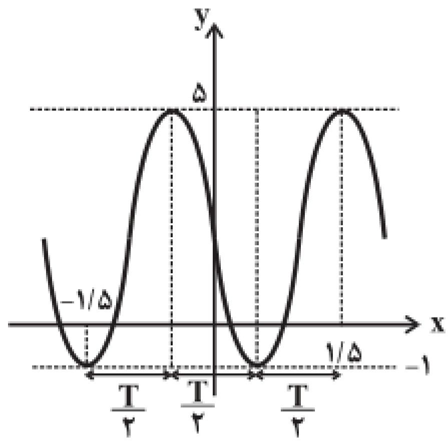
۴) $-\frac{\pi}{۶}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با استفاده از اتحاد $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$ داریم:

$$f(x) = a + \frac{b}{۲}\sin(۲cx)$$



با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} ۱/۵T = ۳ \Rightarrow T = ۲ \\ T = \frac{۲\pi}{|۲c|} \end{cases} \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{۲}$$

از طرفی، مقدار a میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع است و داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{۵ + (-۱)}{۲} = ۲ \\ y_{max} = a + \frac{|b|}{۲} \xrightarrow{a=۲} ۲ + \frac{|b|}{۲} = ۵ \Rightarrow |b| = ۶ \end{cases}$$

با توجه به اینکه نمودار تابع در همسایگی $x = ۰$ فرم نزولی دارد، حاصل bc و $\frac{c}{b}$ منفی هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{ac}{b} = a \times \left(-\frac{|c|}{|b|}\right) = ۲ \times \left(-\frac{\frac{\pi}{۲}}{۶}\right) = -\frac{\pi}{۶}$$

۲۰) معادله‌ی $x - \sin ۲x = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۲

۲) ۳

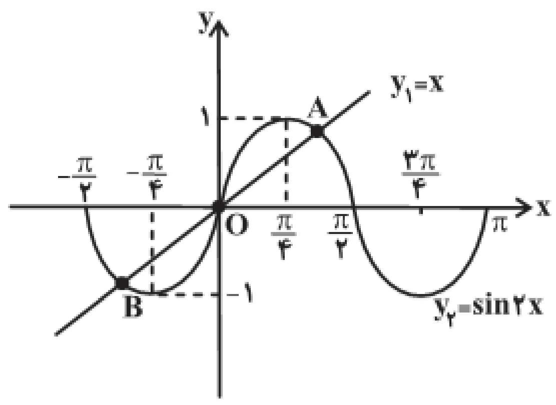
۳) بی‌شمار

۴) هیچ

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

$$x = \sin ۲x \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = x \\ y_۲ = \sin ۲x \end{cases}$$



خط و منحنی در ۳ نقطه‌ی O،A و B هم‌دیگر را قطع می‌کنند.

۲۱) مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin ۲x + \cos ۲x = ۱ - \sin x + \cos x$ در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$

۲) ۲π

۳) $\frac{۱۳\pi}{۶}$

۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$۲ \sin x \cos x + ۱ - ۲\sin^۲ x = ۱ - \sin x + \cos x$$

$$(۲ \sin x - ۱) \cos x - (۲ \sin x - ۱) \sin x = ۰$$

$$\Rightarrow (۲ \sin x - ۱)(\cos x - \sin x) = ۰$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{۰<x<۲\pi} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \\ \cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{۰<x<۲\pi} x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{۶} + \frac{۵\pi}{۶} + \frac{\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۲}$$

۲۲) اگر $f(\sin^2 x - \cos^4 x) = \tan^2 x$، آن‌گاه حاصل $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با توجه به رابطهٔ $\cos^4 x - \sin^2 x = \cos 2x$ داریم:

$$f(\sin^2 x - \cos^4 x) = f(-\cos 2x)$$

از طرفی: $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

در نتیجه:

$$f(-\cos 2x) = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

اگر قرار دهیم $-\cos 2x = t$ آن‌گاه:

$$f(t) = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

۲۳) صورت کلی جواب معادله $\frac{1}{\tan^2 x} + \cos 2x = 1$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

$$\frac{1}{\tan^2 x} + \cos 2x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 x} = 1 - \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^4 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = (2\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) = 0$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x > 0} \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۲۴) جواب کلی معادله $\sin x(1+\sin x)=\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin x+\sin^2 x=\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\sin x \Rightarrow \cos 2x=\sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+(\frac{\pi}{2}-x) \\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ جواب‌های $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود. پس جواب کلی معادله، $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ است.

۲۵) معادله مثلثاتی $\cos 2x=\sin 2x+1$ در بازه $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

$$\cos 2x=\sin 2x+1$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2 x=2\sin x\cos x+1$$

$$\Rightarrow -2\sin^2 x=2\sin x\cos x \Rightarrow -\sin^2 x=\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=0,\ \pi,\ 2\pi \\ -\sin x=\cos x \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\ x=2\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$