مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ مثلثات**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

۱ هر گاه $(۱+\tan\alpha)(۱+\cot\alpha)=۴$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\sin\alpha+\cos\alpha$ کدام است؟

۱) فقط $-\sqrt{۳}$ **۲)** $\sqrt{۳}$ یا $-\sqrt{۳}$ **۳)** فقط $-\sqrt{۲}$ **۴)** $\sqrt{۲}$ یا $-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم $\tan\alpha\cot\alpha=۱$، پس:

$$(۱+\tan\alpha)(۱+\cot\alpha)=۴ \Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha+۲=۴$$

$$\Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha=۲$$

همچنین $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. بنابراین:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۲ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=۲ \xrightarrow{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱}$$

$$\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=۲ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$$

از طرفی:

$$A=\sin\alpha+\cos\alpha \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

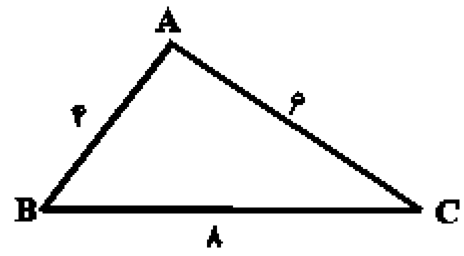
$$A^۲=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow A^۲=۱+۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow A^۲=۱+۲\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow A^۲=۲ \Rightarrow A=\pm\sqrt{۲}$$

با توجه به این‌که انتهای کمان α در ناحیه سوم می‌باشد و در ناحیه سوم هم $\sin\alpha$ و هم $\cos\alpha$ منفی هستند، بنابرین، فقط $A=-\sqrt{۲}$ قابل قبول می‌باشد.

۲ در مثلث روبه‌رو، حاصل $۲\cos\hat{B} + ۳\cos\hat{C}$ کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

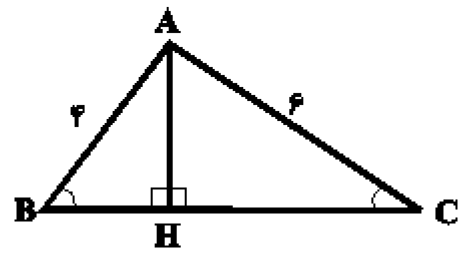
۳) ۲/۵

۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



$$\cos\hat{B} = \frac{BH}{۴}, \cos\hat{C} = \frac{CH}{۶}$$

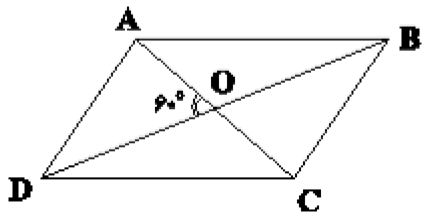
$$\Rightarrow ۲\cos\hat{B} + ۳\cos\hat{C} = ۲(\frac{BH}{۴}) + ۳(\frac{CH}{۶}) = \frac{BH}{۲} + \frac{CH}{۲}$$

$$= \frac{BH+CH}{۲} = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۳) مساحت متوازی‌الاضلاعی که یکی از قطرهای آن ۳ برابر دیگری است، برابر $۴۸\sqrt{۳}$ می‌باشد. اگر زاویه بین دو قطر ۶۰° باشد، اندازه قطر بزرگ‌تر چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۴



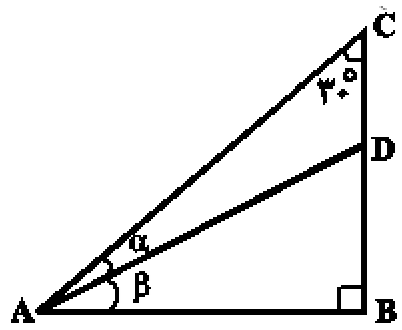
$BD = ۳AC$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = ۴S_{\overset{\Delta}{AOD}} = ۴ \times \frac{۱}{۲} \times AO \times DO \times \sin ۶۰^\circ$$
$$= ۲ \times \frac{AC}{۲} \times \frac{BD}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴۸\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{AC \times ۳AC \times \sqrt{۳}}{۴} = ۴۸\sqrt{۳}$$

$\Rightarrow AC = ۸, BD = ۲۴$

نکته: قطرهای متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع را به چهار مثلث هم مساحت، تقسیم می‌کنند.

۴) در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ به مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم مساحت یک مثلث از فرمول $S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ به دست می‌آید که θ، زاویه بین دو ضلع a و b است. حال با توجه به این نکته داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{۱}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲}AC.AD.\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}AB.AD.\sin\beta} = \frac{۱}{۲}$$

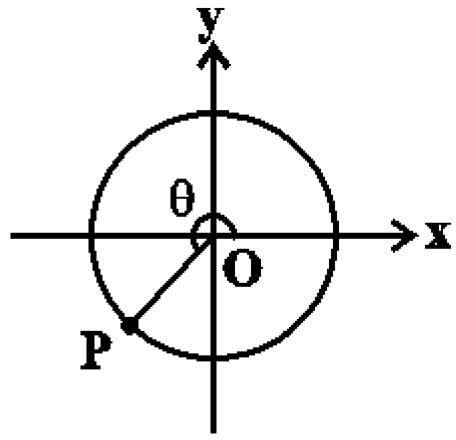
$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} . \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{۱}{۲} . \frac{AB}{AC}$$

از طرفی با توجه به شکل داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۵) اگر θ زاویه بین OP و جهت مثبت محورxها مطابق شکل زیر باشد و $P(-\frac{۱}{۳},-\frac{\sqrt{۸}}{۳})$، حاصل $\sin^۲\theta+\tan^۲\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸۱}{۹}$

۲) $\frac{۷۵}{۹}$

۳) $\frac{۷۹}{۹}$

۴) $\frac{۸۰}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به رابطه زیر می‌توان نتیجه گرفت که نقطه P روی دایره مثلثاتی (شعاع دایره واحد است.) قرار دارد.

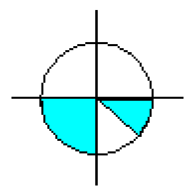
$$(-\frac{۱}{۳})^۲+(-\frac{\sqrt{۸}}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}=\frac{۹}{۹}=۱$$

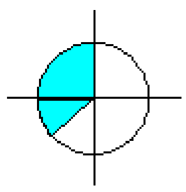
$$\Rightarrow \sin\theta=y=-\frac{\sqrt{۸}}{۳}\Rightarrow \sin^۲\theta=\frac{۸}{۹}$$

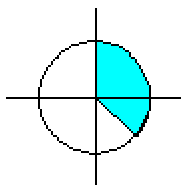
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{-\sqrt{۸}}{۳}}{-\frac{۱}{۳}}=\sqrt{۸}\Rightarrow \tan^۲\theta=۸$$

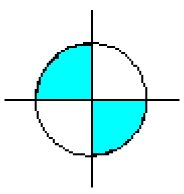
$$\Rightarrow \sin^۲\theta+\tan^۲\theta=\frac{۸}{۹}+۸=\frac{۸+۷۲}{۹}=\frac{۸۰}{۹}$$

۶) اگر $\tan\theta<\sin\theta$ باشد، آن‌گاه محدوده‌های قابل قبول انتهای کمان θ در کدام شکل به‌درستی رسم شده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۴

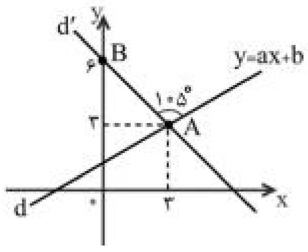
$$\tan\theta<\sin\theta\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}<\sin\theta\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta<۰$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}<۰\Rightarrow \frac{\sin\theta(۱-\cos\theta)}{\cos\theta}<۰$$

$$\Rightarrow \tan\theta(۱-\cos\theta)<۰$$

از آن‌جا که $-۱\le\cos\theta\le۱$ است، بنابراین $۱-\cos\theta\ge۰$ است. بنابراین اگر $\tan\theta(۱-\cos\theta)$ مقداری منفی باشد، باید $\tan\theta<۰$ باشد. این یعنی انتهای کمان θدر ربع دوم یا ربع چهارم است.

۷) با توجه به خطوط d و d' در شکل زیر، حاصل b(a+۱) کدام است؟



۱) ۶-

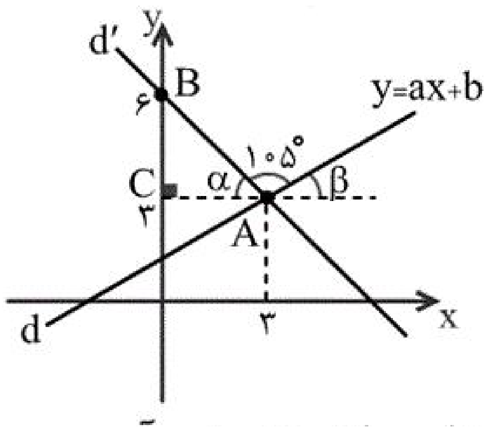
۲) $\frac{۱۵}{۴}$

۳) ۲

۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۳} = ۱ \xrightarrow{\text{حاده است } \alpha} \alpha = ۴۵^\circ$

زاویه‌ای را که خط d با جهت مثبت محورxها می‌سازد به دست می‌آوریم:

$\alpha + ۱۰۵^\circ + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha=۴۵^\circ} \beta = ۳۰^\circ$

شیب خط d برابر است با:

$m_d = \tan\beta = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

خط d :$y = ax + b$ از نقطه (۳ , ۳) عبور می‌کند، پس:

$۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۳ + b \Rightarrow b = ۳ - \sqrt{۳}$

$\Rightarrow b(a+۱) = (۳ - \sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۱) = ۲$

۸) اگر $180^\circ < \alpha < 225^\circ$، حاصل عبارت زیر به ساده‌ترین شکل ممکن کدام است؟

$$\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}}$$

۱) $\sin\alpha+\cos\alpha$ ۲) $-\sin\alpha-\cos\alpha$ ۳) $\sin\alpha-\cos\alpha$ ۴) $-\sin\alpha+\cos\alpha$

پاسخ: گزینه ۲

$$A=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}}=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}=\sqrt{1+2|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha\cos\alpha>0]{\alpha\ \text{در ناحیه سوم است}}\sqrt{1+2(\sin\alpha\cos\alpha)}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|\underset{\sin\alpha<0,\ \cos\alpha<0}{=}-\sin\alpha-\cos\alpha$$

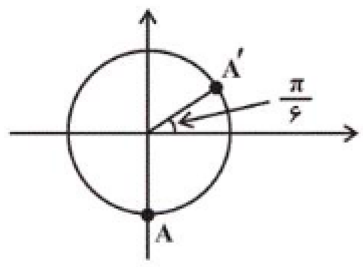
۹) نقطهٔ $A(0\ ,\ -1)$ روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ $\frac{14\pi}{3}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطهٔ A' برسد. حاصل‌ضرب طول و عرض نقطهٔ A' کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

نقطهٔ $A(0\ ,\ -1)$ انتهای کمان زاویهٔ مربوط به $\theta=\frac{-\pi}{2}$ روی دایرهٔ مثلثاتی است. زاویهٔ نهایی دوران یافته برابر است با:

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{14\pi}{3}=\frac{25\pi}{6}=4\pi+\frac{\pi}{6}$$



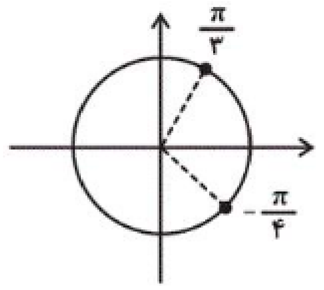
$$\begin{cases} x_{A'}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{A'}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow x_{A'}y_{A'}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

⑩ اگر $-\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۳}$ و $\cos x = \frac{۱-m}{۲}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۲})$ ۲) $[۰ , \frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-۱ , ۰]$ ۴) $[۰ , ۱]$

پاسخ: گزینه ۳

مطابق دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$-\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳} \le \cos x \le ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \frac{۱-m}{۲} \le ۱ \Rightarrow ۱ \le ۱-m \le ۲$$
$$\Rightarrow -۱ \le m \le ۰$$

⑪ اگر $\sin(\alpha+\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan(\alpha+\frac{۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) ± ۳ ۲) $\pm\sqrt{۵}$ ۳) $\pm ۲\sqrt{۲}$ ۴) $\pm ۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\tan(\alpha+۲\pi-\frac{\pi}{۶}) = \tan(\alpha-\frac{\pi}{۶}) = \tan(\alpha+\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۲})$$
$$= -\cot(\alpha+\frac{\pi}{۳})$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$۱+\cot^۲(\alpha+\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{\sin^۲(\alpha+\frac{\pi}{۳})} = \frac{۱}{\frac{۱}{۹}} = ۹$$
$$\Rightarrow \cot^۲(\alpha+\frac{\pi}{۳}) = ۸ \Rightarrow \cot(\alpha+\frac{\pi}{۳}) = \pm ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow -\cot(\alpha+\frac{\pi}{۳}) = \pm ۲\sqrt{۲}$$

⑫ اگر $A = \cos^۲\frac{۵\pi}{۲۶} + \cos^۲\frac{۶\pi}{۲۶} + \cos^۲\frac{۷\pi}{۲۶} + \cos^۲\frac{۸\pi}{۲۶}$، حاصل $\sin(\frac{۷A\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این‌که دو زاویه $\frac{۵\pi}{۲۶}$ و $\frac{۸\pi}{۲۶}$ متمم هستند، پس داریم:

$$\cos^۲\frac{۵\pi}{۲۶} + \cos^۲\frac{۸\pi}{۲۶} = \cos^۲\frac{۵\pi}{۲۶} + \sin^۲\frac{۵\pi}{۲۶} = ۱$$

و با همین استدلال داریم:

$$\cos^۲\frac{۷\pi}{۲۶} + \cos^۲\frac{۶\pi}{۲۶} = \cos^۲\frac{۷\pi}{۲۶} + \sin^۲\frac{۷\pi}{۲۶} = ۱$$

پس: $A = ۲$

$$\sin\frac{۷A\pi}{۶} = \sin\frac{۱۴\pi}{۶} = \sin\frac{۷\pi}{۳} = \sin(۲\pi+\frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۳) حاصل عبارت $\sin(-\frac{۷\pi}{۶})+۲\tan(\frac{۲۵\pi}{۴})-۳\cos(\frac{۱۲۴\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

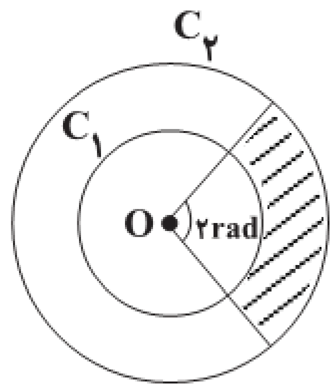
$$\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) = \sin(-\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲۵\pi}{۴} = \tan(۶\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

$$\cos\frac{۱۲۴\pi}{۳} = \cos(۴۱\pi + \frac{\pi}{۳}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = \frac{۱}{۲} + ۲(۱) - ۳(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} + ۲ + \frac{۳}{۲} = ۴$$

۱۴) دو دایره $C_۱(O, r)$ و $C_۲(O, R)$ که $R > r$، مطابق شکل زیر مفروض‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر مساحت دایره $C_۱$ باشد، مساحت دایره $C_۲$ چند برابر مساحت دایره $C_۱$ است؟



۱) $\pi - ۱$
۲) π
۳) $\pi + ۱$
۴) $\pi + ۲$

پاسخ: گزینه ۳

مساحت قطاعی با زاویه θ (برحسب رادیان) در دایره با شعاع r از رابطه $S = \frac{۱}{۲}\theta r^۲$ به دست می‌آید؛ بنابراین مساحت قسمت هاشورخورده در شکل برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}(۲)R^۲ - \frac{۱}{۲}(۲)r^۲ = R^۲ - r^۲$$

از طرفی $S_{C_۱} = \pi r^۲$ است؛ بنابراین داریم:

$$R^۲ - r^۲ = \pi r^۲ \Rightarrow R^۲ = (\pi + ۱)r^۲ \Rightarrow \frac{R^۲}{r^۲} = \pi + ۱$$

اما می‌دانیم که نسبت مساحت دو دایره، با نسبت مربع شعاع آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\frac{S_{C_۲}}{S_{C_۱}} = \frac{R^۲}{r^۲} = \pi + ۱$$

۱۵) دوره تناوب تابع $f(x) = a\sin(\frac{\pi}{۲}(ax+۱)) - \frac{۵}{۳}$ با بیشترین مقدار آن برابر است، کمترین مقدار تابع f کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$

۲) $-\frac{۱۱}{۳}$

۳) $-\frac{۱۴}{۳}$

۴) $-\frac{۱۷}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

بیشترین مقدار تابع برابر $|a| - \frac{۵}{۳}$ و دوره تناوب آن برابر $\frac{۲\pi}{\frac{\pi a}{۲}}$ است. پس داریم:

$$|a| - \frac{۵}{۳} = \frac{۴}{a} \Rightarrow ۳a|a| - ۵a = ۱۲$$

$$a > ۰ : ۳a^۲ - ۵a - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (a-۳)(۳a+۴) = ۰ \Rightarrow a = ۳, a = -\frac{۴}{۳}$$

$$a < ۰ : -۳a^۲ - ۵a - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۳a^۲ + ۵a + ۱۲ = ۰, \Delta < ۰$$

پس کمترین مقدار تابع برابر است با:

$$-|a| - \frac{۵}{۳} = -۳ - \frac{۵}{۳} = -\frac{۱۴}{۳}$$

۱۶) تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{۲} - \frac{\pi}{۴})$ روی کدام بازه یکنواست؟

۱) $(-۱, \frac{۱}{۲})$

۲) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$

۳) $(-\frac{۳}{۴}, \frac{۳}{۴})$

۴) $(\frac{۱}{۴}, \frac{۷}{۴})$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

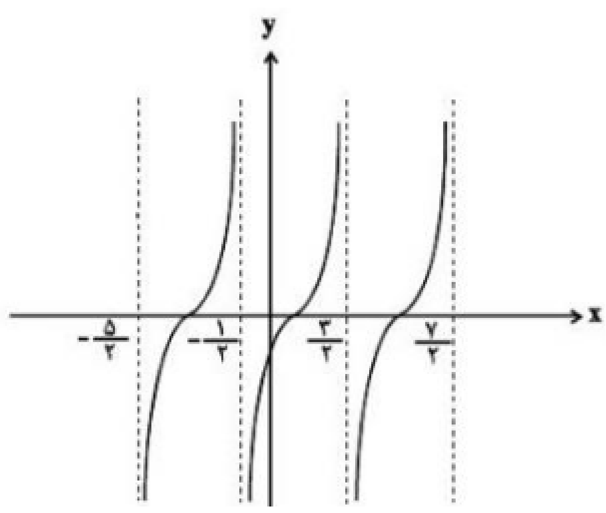
این تابع در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی است، پس دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\pi x}{۲}\frac{\pi}{۴} + (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x - \frac{۱}{۲} \neq ۲k+۱ \Rightarrow x \neq ۲k + \frac{۳}{۲}, k \in Z$$

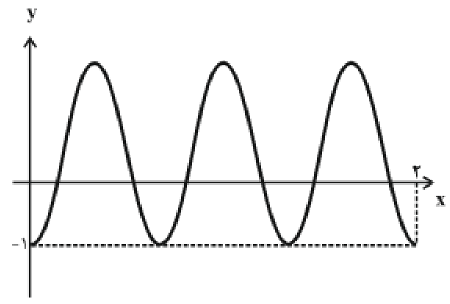
بنابراین بازه موردنظر نباید شامل عددی به صورت $۲k + \frac{۳}{۲}$، $k \in Z$ باشد که بازه $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ چنین است.

$$\begin{cases} k = -۱ \rightarrow ۲k + \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲} \\ k \in ۰ \rightarrow ۲k + \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$y = \tan x$ را $\frac{\pi}{۴}$ واحد به سمت راست منتقل کنید سپس طول نقاط را بر $\frac{\pi}{۲}$ تقسیم کنید. بدین ترتیب نمودار تابع f به دست می‌آید که روی بازه $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ اکیداً صعودی است.



۱۷) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos b\pi x$ را نمایش می‌دهد. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴/۵
۴) ۵/۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

از روی نمودار واضح است که سه برابر دوره تناوب، برابر ۲ شده است. پس داریم:

$$۳T = ۲ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |b| = ۳$$

پس ضابطه تابع می‌تواند به صورت $y = a \pm ۳\cos ۳\pi x$ باشد که چون در سمت راست $x = ۰$ تابع صعودی است، ضابطه $y = a - ۳\cos ۳\pi x$ قابل قبول است.

حال چون کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱- است، داریم:

$$a - ۳ = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow y_{max} = a + ۳ = ۵$$

۱۸) تابع متناوب f با دامنه R و دوره تناوب ۴، در فاصله $[۱,۵)$ به‌صورت $f(x) = \begin{cases} ۲\sin\frac{\pi}{۲}x & ; ۱ \le x < ۳ \\ -۲x + ۴ & ; ۳ \le x < ۵ \end{cases}$ تعریف شده‌است. مقدار $f(۱۰۲/۵)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

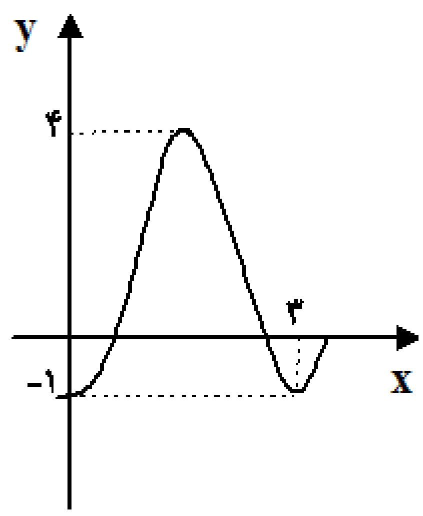
چون تابع f متناوب است، پس داریم:

$$f(x + nT) = f(x) \;,\; n \in Z$$

$$f(۱۰۲/۵) = f(۲/۵ + ۲۵ \times ۴) = f(۲/۵) = f\left(\frac{۵}{۲}\right)$$

$$= ۲\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\sqrt{۲}$$

۱۹ شکل زیر، بخشی از نمودار تابع $y = a\cos(b\pi x) + c$ را نشان می‌دهد، بیش‌ترین مقدار $a + b + c$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

طبق روابط گفته شده در صفحه ۲۷کتاب درسی داریم:

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = ۴ \\ y_{min} = -|a| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲}\ ,\ |a| = \frac{۵}{۲}$$

اما مقدار $a = -\frac{۵}{۲}$ قابل قبول است، زیرا نمودار داده شده قرینه یک نمودار کسینوسی نسبت به محورx هاست.

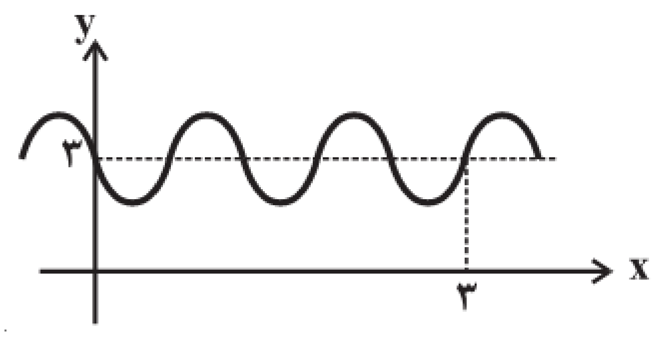
دوره تناوب نمودار هم، مشخص است که برابر با۳ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} = ۳ \Rightarrow |b| = \frac{۲}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۲}{۳}$$

هر دو مقدارbقابل قبول است؛ زیرا نمودار $y = \cos x$نسبت به محورyها متقارن است.

$$\begin{cases} b = -\frac{۲}{۳} : a + b + c = -\frac{۵}{۳} \\ b = \frac{۲}{۳} : a + b + c = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

۲۰) اگر نمودار تابع $f(x) = a + \cos(b\pi x - \frac{\pi}{۲})$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟

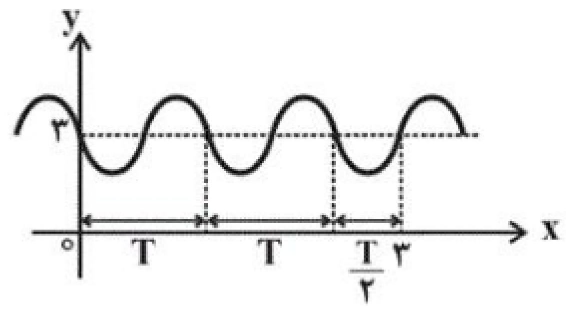


۱) $\frac{۶+\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۶-\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$f(x) = a + \cos(\frac{\pi}{۲} - b\pi x) = a + \sin b\pi x$



مطابق شکل داریم:

$\frac{۵}{۲}T = ۳ \Rightarrow T = \frac{۶}{۵} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۶}{۵}$

$\Rightarrow |b| = \frac{۵}{۳}$

چون در همسایگی $x = ۰$، نمودار تابع بالا فرم نزولی دارد، $b = -\frac{۵}{۳}$ قابل قبول است.

$f(۰) = a = ۳ \Rightarrow f(x) = ۳ - \sin\frac{۵\pi}{۳}x$

$\Rightarrow f(ab) = f(-۵) = ۳ + \sin\frac{۲۵\pi}{۳} = ۳ + \sin(۸\pi + \frac{\pi}{۳}) = ۳ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$= \frac{۶+\sqrt{۳}}{۲}$

۲۱) جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = 1 - \sin 2x$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. کدام شکل هندسی درست می‌شود؟

۱) ۶ضلعی　　۲) مثلث قائم‌الزاویه　　۳) مربع　　۴) مستطیل

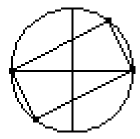
پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - \cos x) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi & k \in Z \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} & k \in Z \\ 0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & k \in Z \end{cases}$$



پس جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ بوده و بر روی دایره مثلثاتی یک مستطیل تشکیل می‌دهد.

۲۲) مجموع جواب‌های متمایز معادلهٔ $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$　　۲) $\frac{3\pi}{2}$　　۳) π　　۴) 2π

پاسخ: گزینه ۲

گزینه«۲»

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$$\xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع ریشه ها $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

(۲۳) مجموع طول نقاطی که به ازای آن‌ها تابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{۴})$ با دامنهٔ $[\frac{-۹\pi}{۲}, \frac{۴\pi}{۳}]$ دارای حداقل مقدار ممکن می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{-۱۳\pi}{۶}$ ۲) $\frac{-۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{-۹\pi}{۴}$ ۴) $\frac{-۱۵\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

می‌دانیم که حداقل مقدار تابع $y = \sin\theta$ برابر با (-۱) است و در نقاطی به طول‌های $\theta = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$ به‌دست می‌آید، بنابراین برای اینکه بتوانیم راحت‌تر به جواب‌ها برسیم، مخرج همهٔ کسرها را با ۱۲ می‌نویسیم:

$$x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \xrightarrow{-\frac{۹\pi}{۲} \le x \le \frac{۴\pi}{۳}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲۴k\pi + ۱۵\pi}{۱۲}, \frac{-۵۴\pi}{۱۲} \le x \le \frac{۱۶\pi}{۱۲}$$

K	-۳	-۲	-۱	۰	۱
π	$\frac{-۵۷\pi}{۱۲}$	$-\frac{۳۳\pi}{۱۲}$	$\frac{-۹\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۳۹\pi}{۱۲}$

$$= \frac{-۳۳\pi}{۱۲} + \frac{-۹\pi}{۱۲} + \frac{۱۵\pi}{۱۲} = \frac{-۲۷\pi}{۱۲} = \frac{-۹\pi}{۴}$$

(۲۴) معادلهٔ $\frac{\tan\frac{x}{۲} + \cot\frac{x}{۲}}{\cos x \cos ۲x} = ۸$ چند جواب در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\tan\frac{x}{۲} + \cot\frac{x}{۲}}{\cos x \cos ۲x} = ۸ \Rightarrow \frac{\frac{۲}{\sin x}}{\cos x \cos ۲x} = ۸$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\sin x \cos x \cos ۲x} = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x} = ۸$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{\sin ۲x \cos ۲x} = ۸ \Rightarrow \frac{۴}{\frac{۱}{۲}\sin ۴x} = ۸ \Rightarrow \frac{۸}{\sin ۴x} = ۸$$

$$\xrightarrow{\sin ۴x \neq ۰} \sin ۴x = ۱ \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \xrightarrow{x \in [۰, \pi]} x = \frac{\pi}{۸}, \frac{۵\pi}{۸}$$

۲۵ مجموعه‌ی جواب کلی معادله‌ی $2\sin^2(\frac{\pi}{2}+x)-\sin x+1=0$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $2k\pi$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$2\sin^2(\frac{\pi}{2}+x)-\sin x+1=0$$

$$2\cos^2 x-\sin x+1=0$$

$$2(1-\sin^2 x)-\sin x+1=0$$

$$2\sin^2 x+\sin x-3=0 \xleftarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} 2-2\sin^2 x-\sin x+1=0$$

$$\begin{cases} \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \sin x=-\frac{3}{2} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$