



۱) بازه  $(2, a+1)$ ، دقیقاً شامل ۵ عدد صحیح فرد است. حدود  $a$  کدام است؟

۴)  $6 \leq a < 7$

۳)  $10 < a \leq 12$

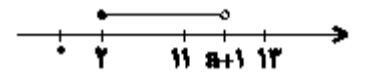
۲)  $6 < a \leq 7$

۱)  $10 \leq a < 12$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چون بازه از ۲ شروع می‌شود، فقط اعداد فرد ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ در این بازه قرار می‌گیرند. بنابراین:  $11 < a + 1 \leq 13 \Rightarrow 10 < a \leq 12$



۲) اگر  $A = (\frac{2m-4}{5}, +\infty)$  و  $B = (-\infty, \frac{m-3}{2})$  باشد، به ازای چند مقدار طبیعی  $m$  مجموعه  $A \cap B$  متناهی است؟

۴) هیچ مقدار

۳) ۷

۲) ۵

۱) ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اشتراک دو بازه باز تنها زمانی متناهی است که شامل هیچ عضوی نباشد یا به عبارتی تهی باشد. لذا اشتراک دو بازه باید تهی باشد.

$$\frac{2m-4}{5} \geq \frac{m-3}{2} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر ۱۰}} 4m - 8 \geq 5m - 18 \Rightarrow m \leq 7$$

پس به ازای مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ از  $m$ ، اشتراک  $A$  و  $B$  متناهی می‌باشد.

۳) چند مورد از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

الف) مجموعه اعداد صحیح زوج (ب) بازه  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$

ج) مجموعه اعداد اول غیر فرد (د) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان

ه) مجموعه تمام دایره‌ها به شعاع ۲ واحد

۴) ۱

۳) ۴

۲) ۳

۱) ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

موارد ج و د، مجموعه‌های متناهی و موارد الف و ب و ه مجموعه‌های نامتناهی هستند.

۴) اگر  $A = [-4, 2]$ ،  $B = [-5, 1]$  و  $C = [-2, 0]$  باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر، بازه  $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$  را نشان می‌دهد؟

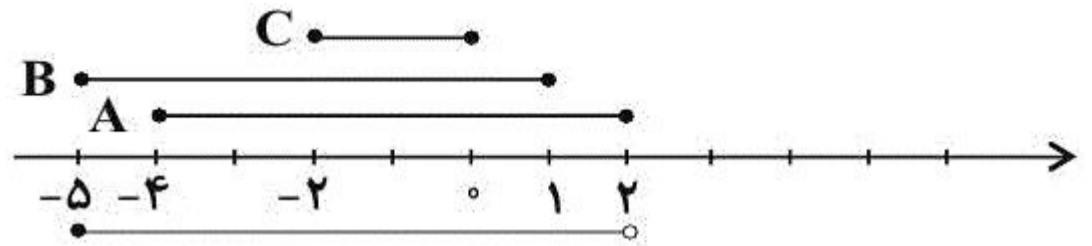
(۴)  $(B \cup A) - C'$

(۳)  $(B - C) \cap A$

(۲)  $(A' \cap C') - B$

(۱)  $(A - B) \cup C'$

پاسخ: گزینه ۲



۱)  $(A - B) \cup C' = (1, 2] \cup ((-\infty, -2) \cup (0, +\infty)) = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

۲)  $(A' \cap C') - B = (A \cup C)' - B = A' - B = A' \cap B' = (A \cup B)' = (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

۳)  $(B - C) \cap A = ([-5, -2) \cup (0, 1]) \cap [-4, 2] = [-4, -2) \cup (0, 1]$

۴)  $(B \cup A) - C' = [-5, 2] - ((-\infty, -2) \cup (0, +\infty)) = [-2, 0]$

۵) اگر  $A = (-3, 10] - (5, 10)$  و  $B = (-4, 4) \cup (4, 5)$ ، آن‌گاه  $A - B$  شامل چند عدد طبیعی است؟

(۴) صفر

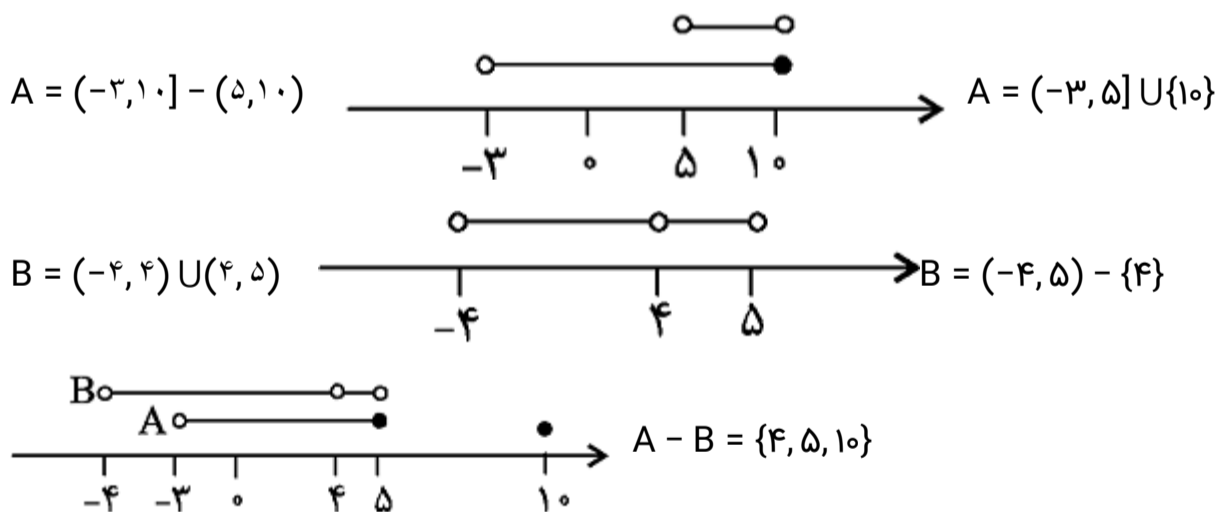
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



۶ اگر  $(-\infty, 4b] \cap (a, 8] = (-3, 2]$  باشد، حاصل  $[\frac{a}{3} - 1, 4b) \cap [a + 2, 16b^2)$  کدام است؟

(-1, 2] (۴)

(1, 2] (۳)

[-1, 2) (۲)

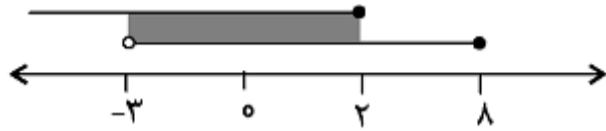
(-1, 2) (۱)

پاسخ: گزینه ۲

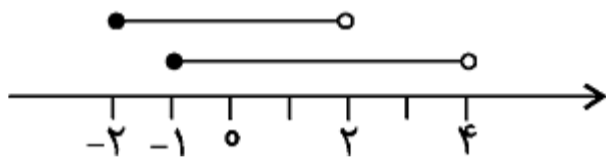
گزینه «۲»

$$(-\infty, 4b] \cap (a, 8] = (a, 4b] = (-3, 2]$$

$$a = -3, 4b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$



$$[\frac{a}{3} - 1, 4b) \cap [a + 2, 16b^2) = [-2, 2) \cap [-1, 4) = [-1, 2)$$



۷ اگر  $A = \{x \in \mathbb{Z} | x < -2 \text{ یا } x > 2\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 > 10\}$  باشد، کدام مجموعه متناهی است؟ (Z مجموعه مرجع است.)

$B' \cup A$  (۴)

$B - A'$  (۳)

$A' \cap B'$  (۲)

$A - B$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{\pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots\} \Rightarrow A' = \{0, \pm 1, \pm 2\}$$

$$B = \{4, 5, 6, \dots\} \Rightarrow B' = \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0, -4, -5, \dots\}$$

۱)  $A - B = \{\dots, -5, -4, -3, 3\} \Rightarrow$  نامتناهی

۲)  $A' \cap B' = \{0, \pm 1, \pm 2\} \Rightarrow$  متناهی

۳)  $B - A' = B \cap A = \{4, 5, 6, \dots\} = B \Rightarrow$  نامتناهی

۴)  $B' \cup A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\} \Rightarrow$  نامتناهی

۸) اگر بازه‌های ناتهی  $A = (-x^2, 3)$ ،  $B = (-x^2 + 2, x - 1)$  و  $A \cap B = (-2, y)$  باشند، حاصل  $x + y$  کدام است؟

(۲) صفر

(۴) ۳

(۱) ۳

(۳) -۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

می‌دانیم:  $-x^2 + 2 > -x^2$

در نتیجه ابتدای بازه اشتراک  $A$  و  $B$  برابر با  $-x^2 + 2$  است:

$$-x^2 + 2 = -2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

اگر  $x = -2$  باشد،  $B = \emptyset$  و  $B = (-2, -3)$  می‌شود، در نتیجه  $x = 2$  قابل قبول است:

$$A = (-4, 3), B = (-2, 1) \Rightarrow A \cap B = (-2, 1) = (-2, y)$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x + y = 3$$

۹) اگر  $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{11-n})$  ( $1 \leq n \leq 10$ ) و  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = (a, b)$  باشد،  $b - a$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{10}$

(۳)  $\frac{1}{5}$

(۲)  $\frac{11}{10}$

(۱) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$A_1 = (-1, \frac{1}{10}) \quad A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{9}) \quad \dots \quad A_{10} = (-\frac{1}{10}, 1)$$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = (a, b)$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{1}{10} - (-\frac{1}{10}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

۱۰) اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  داشته باشیم به طوری که  $n(A) = 3$ ،  $n(B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 7$  باشد، آن‌گاه متمم مجموعه  $B' \cup A$  چند عضو دارد؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 7 = 3 + 5 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

متمم مجموعه  $B' \cup A$  به صورت  $(B' \cup A)'$  است که برابر با  $(B')' \cap A'$  یا  $B \cap A'$  است. همچنین  $B \cap A' = B - A$  است. پس:

$$n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 5 - 1 = 4$$

۱۱) اگر  $A = \{a \mid -a \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{1 - b \mid -b \in \mathbb{W}\}$  باشد و مجموعه را مجموعه مرجع فرض کنیم، مجموعه  $A' \cap B'$  کدام است؟

$\emptyset$  (۴)

$\{0\}$  (۳)

$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$  (۲)

$\mathbb{W}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$A = \{\dots, -3, -2, -1\} \Rightarrow A' = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow B' = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

$$A' \cap B' = \{0\}$$

۱۲) اگر  $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$  و  $B = \{3, 7, 1, 10, 11\}$  و مجموعه مرجع اعداد طبیعی باشد، آنگاه  $(A' \cap B')' - (B' - A')$  چند عضو دارد؟

بی شمار (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

طبق نتیجه کار در کلاس ۶ صفحه ۹ داریم:

$$(A' \cap B')' = A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 9, 10, 11\}$$

$$B' - A' = B' \cap A = A \cap B' = A - B = \{2, 9\}$$

$$(A \cup B) - (A - B) = \{1, 3, 7, 10, 11\}$$

۱۳) اگر برای سه مجموعه  $A, B, C$  داشته باشیم:  $A \subset B \subset C$ ، آنگاه مجموعه  $C - (A \cup B)'$  با کدام مجموعه زیر برابر است؟

$C - B$  (۴)

$C$  (۳)

$B$  (۲)

$A$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نکات:

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases} \quad (۱)$$

$$A - B = A \cap B' \quad (۲) \quad (A')' = A \quad (۳)$$

$$\Rightarrow C - (A \cup B)' \stackrel{(۱)}{=} C - B' \stackrel{(۲)}{=} C \cap (B')' \stackrel{(۳)}{=} C \cap B = B$$

۱۴) اگر  $n(U) = ۱۲۰$ ،  $n(B' - A') = ۵۰$ ،  $n(B - A) = ۳۰$  و  $n(A) = \frac{۳}{۴}n(B)$  باشد، آنگاه  $n(A' \cap B') - n(A \cap B)$  کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۰ (۳)

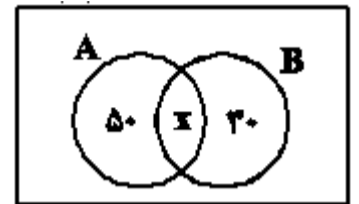
۳۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

از نمودار ون استفاده می‌کنیم و تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص می‌کنیم.

$$n(U) = ۱۲۰$$



$$n(A) = \frac{۳}{۴}n(B) \Rightarrow ۵۰ + x = \frac{۳}{۴}(x + ۳۰) \Rightarrow ۱۰۰ + ۲x = ۳x + ۹۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

$$\begin{aligned} n(A' \cap B') - n(A \cap B) &= n((A \cup B)') - n(A \cap B) \\ &= n(U) - n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) = ۱۲۰ - ۶۰ - ۴۰ = ۲۰ \end{aligned}$$

۱۵) در یک نظرسنجی از ۵۰ نفر از اعضای یک باشگاه، مشخص شد که ۴۰ نفر برای گرم کردن از تردمیل و ۳۶ نفر از دوچرخه ثابت استفاده می‌کنند. ۴ نفر هم از این دو دستگاه استفاده نمی‌کنند. چند نفر از اعضای نظرسنجی شده، فقط از یکی از این دو دستگاه برای گرم کردن استفاده می‌کنند؟

۱۵ (۴)

۳۰ (۳)

۱۰ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

تردمیل: A

دوچرخه ثابت: B

$$\begin{aligned} n(U) &= ۵۰ \\ n(A) &= ۴۰ \\ n(B) &= ۳۶ \\ n((A \cup B)') &= ۴ \Rightarrow n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) = ۴ \\ &\Rightarrow ۵۰ - ۴۰ - ۳۶ + n(A \cap B) = ۴ \Rightarrow n(A \cap B) = ۳۰ \\ &\Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - ۲n(A \cap B) = ۱۶ \end{aligned}$$

۱۶) اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U بوده و  $n(A) = 9$ ،  $n(A') = 6$  و  $n(B - A) = 3$  باشد، آن‌گاه مجموعه  $A' \cap B'$  چند عضوی است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

می‌دانیم که A و A' دو مجموعه مجزا هستند و  $A' \cup A = U$ .

$$n(U) = n(A) + n(A') = 9 + 6 = 15$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)} n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$

$$= 9 + 3 = 12$$

می‌دانیم که  $(A \cup B)$  و  $(A \cup B)'$  دو مجموعه مجزا و متمم هم‌اند.

$$n(U) = n((A \cup B)') + n(A \cup B) \Rightarrow 15 = n((A \cup B)') + 12$$

$$\Rightarrow n((A \cup B)') = 3 \xrightarrow{(A \cup B)' = A' \cap B'} n(A' \cap B') = 3$$

۱۷)  $\frac{2}{5}$  از دبیران مدرسه A با  $\frac{1}{3}$  از دبیران مدرسه B مشترک هستند. اگر تعداد کل دبیران این دو مدرسه ۴۵ نفر باشد، در این صورت چه تعداد از این دبیران این دو مدرسه فقط در یک مدرسه تدریس می‌کنند؟

۳۵ (۴)

۱۰ (۳)

۱۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به آنچه که در صورت سوال مطرح شده است، داریم:

$$\frac{2}{5}n(A) = \frac{1}{3}n(B) = n(A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} n(A) = \frac{5}{2}n(A \cap B) \\ n(B) = 3n(A \cap B) \end{cases}$$

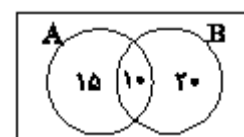
تعداد کل دبیران این دو مدرسه ۴۵ نفر می‌باشد، پس:

$$n(A \cup B) = 45 \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 45$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}n(A \cap B) + 3n(A \cap B) - n(A \cap B) = 45 \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(A) = \frac{5}{2} \times 10 = 25 \\ n(B) = 3 \times 10 = 30 \end{cases}$$

طبق نمودار و نیز، تعداد دبیرانی که فقط در یک مدرسه تدریس می‌کنند  $15 + 20 = 35$  است.



۱۸) اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر با  $(BU\emptyset)'\ U(BUU)'$  برابر است؟

$\emptyset$  (۴)

$B$  (۳)

$B'$  (۲)

$U$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

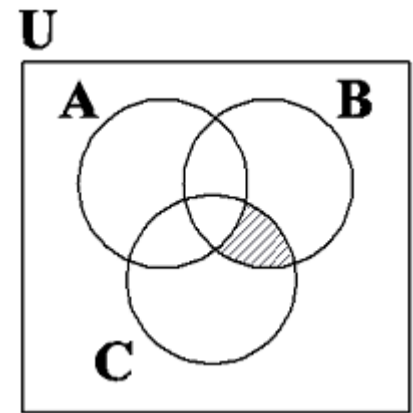
توجه کنید که  $BU\emptyset = B$   $BUU = U$   $\emptyset' = U$   $U' = \emptyset$  است. پس:

$$(BUU)'\ U(BU\emptyset)' = (BU\emptyset)'\ U(BUU)'$$

$$= B'\ UU' = B'\ U\emptyset = B'$$



۱۹) در نمودار ون زیر، قسمت هاشور خورده، بیانگر کدام مجموعه است؟ ( U مجموعه مرجع است.)



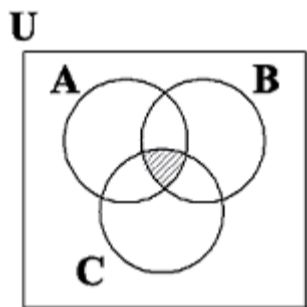
- (۱)  $(A \cap C) - B'$   
 (۲)  $(B' - A') \cup (B' - C')$   
 (۳)  $(A \cup (B \cup C))'$   
 (۴)  $A' \cap (B - C')$

پاسخ: گزینه ۴

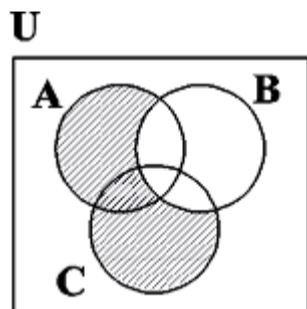
گزینه «۴»

نمودار ون گزینه‌های ۱ تا ۳ به صورت زیر است:

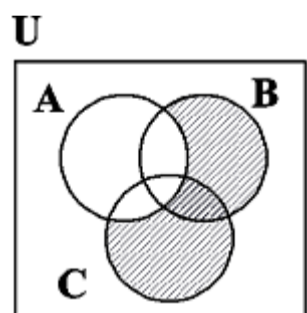
۱)  $(A \cap C) - B' = A \cap C \cap B$



۲)  $(B' - A') \cup (B' - C') = (B' \cap A) \cup (B' \cap C) = (A - B) \cup (C - B)$



۳)  $(A \cup (B \cup C))' = A' \cap (B \cup C) = (B \cup C) - A$



۲۰) در یک دوره مسابقات ورزشی، ۱۵۰ ورزشکار شرکت کرده‌اند که هر ورزشکار می‌تواند در یک یا چند رشته ورزشی شرکت کند. اگر ۴۰ نفر در رشته کاراته و ۵۰ نفر در رشته تکواندو و ۷۶ نفر فقط در یکی از این دو رشته شرکت کرده باشند، در این صورت چند نفر در این دو رشته ورزشی شرکت نکرده‌اند؟

۶۷ (۴)

۶۰ (۳)

۹۰ (۲)

۹۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

A: رشته کاراته

B: رشته تکواندو

$$n(U) = 150$$

$$n(A) = 40$$

$$n(B) = 50$$

$$n(A - B) + n(B - A) = 76 \Rightarrow n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = 76$$

$$\Rightarrow 40 + 50 - 2n(A \cap B) = 76 \Rightarrow n(A \cap B) = 7$$

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] = 150 - (40 + 50 - 7) = 67$$

۲۱) اگر  $A = [-3, 10]$  و  $B = (-3, +\infty)$  باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر، متناهی است؟

$B' - A'$  (۲)

$B' - A$  (۴)

$A' - B'$  (۱)

$A - B'$  (۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$۱) A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A = [10, +\infty)$$

$$۲) B' - A' = B' \cap A = A \cap B' = A - B = \{-3\}$$

$$۳) A - B' = A \cap B = (-3, 10)$$

$$۴) B' - A = B' \cap A' = (B \cup A)' = (-\infty, -3)$$

۲۲) با توجه به دو مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 1\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\}$ ، حاصل  $B - A$  کدام است؟

(۲)  $(-3, 0) \cup (0, 2]$

(۴)  $(-3, -1] \cup [1, 2]$

(۱)  $(-3, -2] \cup [1, 2]$

(۳)  $(-3, -1) \cup (1, 2]$

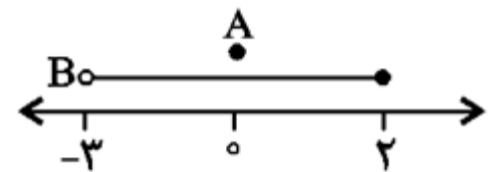
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مجموعه  $A$ ، شامل اعداد صحیح بازه  $(-1, 1)$  است که شامل یک عدد می‌باشد:

$A = \{0\}$

$B - A = (-3, 0) \cup (0, 2]$



۲۳) اگر مجموعه اعداد صحیح، مجموعه مرجع باشد و  $A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  باشند، آن‌گاه  $(A \cup B)' - A$  کدام است؟

(۲)  $\{3, 4, 5\}$

(۴)  $\{6, 7, 8, \dots\}$

(۱)  $\{\dots, -3, -2, -1, 0\} \cup \{6, 7, 8, \dots\}$

(۳)  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

روش اول:

$$(A' \cap B') \subset A', \quad A' - A = A'$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' - A = (A' \cap B') - A = \{3, 4, 5\} - A = \{3, 4, 5\}$$

روش دوم:

با توجه به نتیجه کار در کلاس صفحه ۹ داریم:

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ D - A = D \cap A' \end{cases}$$

$$(A \cup B)' - A = (A' \cap B') - A$$

$$\Rightarrow (A' \cap B') \cap A' = A' \cap B' = \{3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$$

۲۴) در مجموعه  $U = \{1, 2, 3, \dots, 500\}$  چند عدد وجود دارد که نه بر ۲ و نه بر ۵ بخش پذیر نباشد؟

۹۹ (۴)

۱۰۰ (۳)

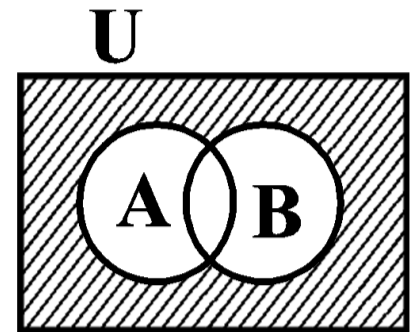
۲۰۰ (۲)

۱۹۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا اعدادی را که بر ۲ و ۵ و یا هر دو بخش پذیر باشند، محاسبه می‌کنیم.



تعداد اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند:  $n(A) = \frac{500}{2} = 250$

تعداد اعدادی که بر ۵ بخش پذیرند:  $n(B) = \frac{500}{5} = 100$

تعداد اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیرند:  $n(A \cap B) = \frac{500}{2 \times 5} = 50$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد اعدادی که بر ۲ یا ۵ یا هر دو بخش پذیرند:  $= 250 + 100 - 50 = 300$

$$n(U) - n(A \cup B) = 500 - 300 = 200$$

بنابراین ۲۰۰ عدد نه بر ۲ و نه بر ۵ بخش پذیر نیستند که در واقع بخش هاشورخورده در نمودارِ وِنِ فوق می‌باشد.

۲۵) از ۱۰۰ دانش‌آموز مدرسه‌ای، ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال هستند و ۵۶ نفر عضو تیم والیبال نیستند. اگر فقط ۱۱ نفر عضو هر دو تیم باشند، چند نفر عضو هیچ‌یک از دو تیم نیستند؟

۲۷ (۴)

۲۵ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر فوتبال A و والیبال B باشد، داریم:

$$n(U) = 100$$

$$n(A) = 40$$

$$n(B') = 56 \Rightarrow n(B) = 100 - 56 = 44$$

$$n(A \cap B) = 11$$

پس تعداد اعضای اجتماع برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 40 + 44 - 11 = 73$$

و  $100 - 73 = 27$  نفر عضو هیچ تیمی نیستند.