۱) اگر $f(x)=\begin{cases}2x^3; x<1\\ x^2-1; x\geq 1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^3-1; x\leq 1\\ 3x^2; x>1\end{cases}$ باشد، مقدار $(fg)'(1)$ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۶   ۳) ۱۲   ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»

ضابطه تابع fg به صورت زیر است:

$$(fg)(x)=\begin{cases}2x^3(x^3-1); x<1\\ 0; x=1\\ 3x^2(x^2-1); x>1\end{cases}$$

پس fg در $x=1$ پیوسته است.

$$\Rightarrow\begin{cases}(fg)'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^3(x^3-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}2x^3(x^2+x+1)=6\\ (fg)'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x^2(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}3x^2(x+1)=6\end{cases}$$

پس $(fg)'(1)=6$ است.

۲) در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2}$، حاصل $\lim_{h\to0^-}\frac{f(-1)-f(-1+h)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{-5}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2}=|x+1|+\sqrt[3]{x^2}$$

حد خواسته شده برابر $-f'_-(-1)$ است:

$$x\to(-1)^-: f(x)=-x-1+\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow f'(x)=-1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

درنتیجه:

$$-f'_-(-1)=-(-1-\tfrac{2}{3})=\tfrac{5}{3}$$

۳) اگر $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$ باشد، حاصل $f''(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{5}{4}$

۳) $\frac{7}{2}$

۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با تفکیک کسر عبارت را به صورت $\frac{1}{ax+b}$ تبدیل کرده و از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{(x-2)+(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3} + \frac{2}{(x-2)^3} \Rightarrow f''(4) = \frac{2}{1} + \frac{2}{8} = \frac{9}{4}$$

۴) به ازای چند مقدار صحیح m، خط $(m+2)y = (2m-3)x+n$ موازی یکی از خطوط مماس بر نمودار تابع $y = \sqrt{1+x^2}$ است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای اینکه خط موازی یکی از خطوط مماس بر نمودار باشد، باید شیب خط و مشتق تابع با هم برابر باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow -1 < y' < 1 \\ \text{شیب خط} = \frac{2m-3}{m+2} \end{cases} \Rightarrow -1 < \frac{2m+3}{m+2} < 1$$

حال با حل نامعادله بالا داریم:

$$\begin{cases} \frac{2m-3}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m-5}{m+2} < 0 \Rightarrow m \in (-2,5) \\ \frac{2m-3}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{3m-1}{m+2} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty,-2) \cup (\frac{1}{3},+\infty) \end{cases}$$

با اشتراک جواب‌های بالا، مشخص می‌شود که باید $m \in (\frac{1}{3},5)$ باشد که این بازه شامل ۴ عدد صحیح است.

۵ اگر $f(x) = ۲x - \sqrt{۲x - ۳}$ و $g(x) = \frac{x^۳-۱}{|x-۱|}$ باشد، $(gof)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ **۲)** ۷ **۳)** ۱ **۴)** وجود ندارد

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$(gof)'(۲) = g'(f(۲)) \times f'(۲)$

$$\begin{cases} f'(x) = ۲ - \frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۳}} \Rightarrow f'(۲) = ۱ \\ f(۲) = ۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow (gof)'(۲) = g'(۳)$

در همسایگی $x = ۳$ تابع $g(x)$ به صورت زیر است:

$g(x) = \frac{x^۳-۱}{x-۱}$

$g(x) = \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x-۱} = x^۲ + x + ۱$

بنابراین برای مشتق آن نیز در $x = ۳$ می‌توانیم بنویسیم:

$g'(x) = ۲x + ۱ \Rightarrow g'(۳) = ۷$

۶ یکی از خطوط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^۲ - \frac{۲}{۳}(x-۱)^۳$ بیشترین شیب را دارد. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۱) $-\frac{۱۹}{۱۲}$ **۲)** $\frac{۱۷}{۱۲}$ **۳)** $-\frac{۱۷}{۱۲}$ **۴)** $\frac{۱۹}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$f'(x) = ۲x - ۲(x-۱)^۲ = ۲(x - x^۲ + ۲x - ۱)$

$= -۲(x^۲ - ۳x) - ۲ = -۲(x - \frac{۳}{۲})^۲ + \frac{۵}{۲}$

شیب خط مماس همان f' است و f' در $x = \frac{۳}{۲}$ بیشترین مقدار خود را دارد که این مقدار برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

از طرفی عرض نقطه $x = \frac{۳}{۲}$ نیز برابر $\frac{۱۳}{۶}$ است. پس معادله خط مماس موردنظر به صورت زیر است:

$y - \frac{۱۳}{۶} = \frac{۵}{۲}(x - \frac{۳}{۲}) \Rightarrow y = \frac{۵}{۲}x - \frac{۱۹}{۱۲}$

عرض از مبدأ این خط $-\frac{۱۹}{۱۲}$ است.

۷) کدام تابع در $x = -1$ خط مماس دارد اما مشتق ندارد؟

۱) $y = \sqrt{x+1}$

۲) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

۳) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

۴) $y = \sqrt[3]{x+1}$

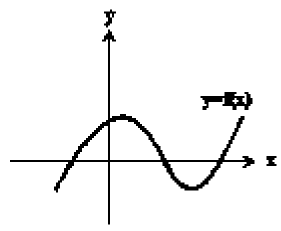
پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$x = -1$ عضو دامنهٔ توابع گزینه‌های «۲» و «۳» نیست، بنابراین این توابع نمی‌توانند خط مماس داشته باشند.

تابع $y = \sqrt{x+1}$ نیز در همسایگی چپ $x = -1$ قابل تعریف نیست. بنابراین ناپیوسته است و خط مماس ندارد.

۸) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. روند تغییر مشتق آن کدام است؟



۱) کاهش- افزایش- کاهش

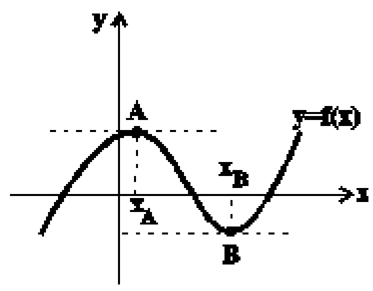
۲) کاهش- افزایش

۳) افزایش- کاهش- افزایش

۴) افزایش- کاهش

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



با توجه به نمودار فوق، شیب نمودار تابع در نقاط A و B برابر صفر است. در نتیجه مشتق تابع f در $x = x_A$ و $x = x_B$ نیز برابر صفر است. اما شیب خطوط مماس بر نمودار تابع f در نقاط بازه‌های $(-\infty, x_A)$ و $(x_B, +\infty)$ مثبت و این مقدار در نقاط بازه (x_A, x_B) منفی است. یعنی مشتق تابع ابتدا کاهش می‌یابد تا در نقطه $x = x_A$ به صفر برسد، مجدداً کاهش می‌یابد زیرا شیب خطوط منفی هستند، سپس افزایش می‌یابد تا در $x = x_B$ مجدداً به مقدار صفر برسد. پس از آن در بازه $(x_B, +\infty)$ مقدار مشتق به صورت مرتب افزایش می‌یابد.

۹) رابطه بین مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=[x^۲]\,|ax+۱|$ در نقطه‌ای با طول صحیح $x=z$ به‌صورت $f'_{+}(z)-f'_{-}(z)=۱$ است. $f'_{-}(z)$ کدام می‌تواند باشد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) -۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون f در $x=z$ هم مشتق چپ دارد و هم مشتق راست، به این معنی است که f در $x=z$ پیوسته است اما چون برابر نیستند، f در $x=z$ مشتق ناپذیر است. این در حالتی ممکن است که $x=z$ ریشه عبارت $ax+۱$ باشد:

$$az+۱=۰ \Rightarrow a=\frac{-۱}{z} \Rightarrow f(x)=\frac{[x^۲]}{|z|}\ |x-z|$$

حال در دو حالت مثبت و منفی z مسئله را بررسی می‌کنیم:

الف) z مثبت باشد: در همسایگی آن می‌توانیم ضابطه‌های f را به‌صورت زیر بنویسیم و داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{z^۲-۱}{z}(x-z) & ;\ x<z\\ \dfrac{z^۲}{z}(x-z) & ;\ x\geq z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_{-}(z)=-\frac{z^۲-۱}{z}\\ f'_{+}(z)=\frac{z^۲}{z}=z\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_{+}(z)-f'_{-}(z)=z+\frac{z^۲-۱}{z}=\frac{۲z^۲-۱}{z}=۱$$

$$\Rightarrow ۲z^۲-z-۱=(۲z+۱)(z-۱)=۰ \Rightarrow z=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=[x^۲]\,|x-۱|\quad,\quad f'_{-}(۱)=۰$$

ب) z منفی باشد: در همسایگی آن می‌توانیم ضابطه‌های f را به‌صورت زیر بنویسیم و داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{z^۲}{z}(x-z) & ;\ x\leq z\\ -\frac{z^۲-۱}{z}(x-z) & ;\ x>z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_{-}(z)=z\\ f'_{+}(z)=-\frac{z^۲-۱}{z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_{+}(z)-f'_{-}(z)=-\frac{z^۲-۱}{z}-z=\frac{-۲z^۲+۱}{z}=۱$$

$$\Rightarrow ۲z^۲+z-۱=(۲z-۱)(z+۱)=۰ \Rightarrow z=-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=[x^۲]|x+۱|\quad,\quad f'_{-}(-۱)=-۱$$

۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases}[-x]x^{2}+1 & ;x<1\\ x-1 & ;x\geq 1\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-\frac{3}{4}|h|)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) صفر ۴) موجود نیست.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در یک همسایگی $x=1$ ضابطه‌های تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}-x^{2}+1; & x<1\\ x-1; & x\geq 1\end{cases}$$

تابع در x=۱ پیوسته است، بنابراین نیم مماس راست و چپ دارد.

شیب نیم مماس راست برابر شیب خط $y=x-1$ یا همان ۱ است:

$$f'_{+}(1)=1$$

از طرفی طبق رابطه‌ای که بعدها خواهیم دید یا از راه تعریف مشتق به سادگی می‌توان گفت مشتق $y=ax^{2}$ برابر $y'=2ax$ است. پس شیب نیم مماس چپ برابر ۲- است. $f'_{-}(1)=-2$

حال حاصل موردنظر را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+h)-f(1-\frac{3}{4}|h|)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+h)-f(1+\frac{3}{4}h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1+\frac{3}{4}h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+\frac{3}{4}h)-f(1)}{h}$$

$$=f'_{-}(1)-\frac{3}{4}f'_{-}(1)=\frac{1}{4}f'_{-}(1)=-\frac{1}{2}$$

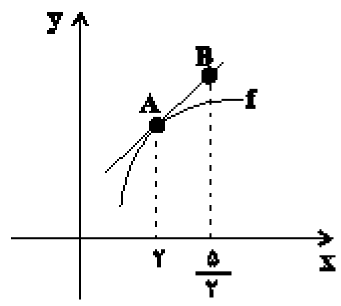
مشابه روش بالا برای حد راست هم داریم:

$$\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(1+h)-f(1-\frac{3}{4}|h|)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(1+h)-f(1-\frac{3}{4}h)}{h}$$

$$=f'_{+}(1)+\frac{3}{4}f'_{-}(1)=-\frac{1}{2}$$

پس حاصل حد مورد نظر برابر $-\frac{1}{2}$ است.

⑪ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f(۲) = ۶$ و $f'(۲) = \frac{۲}{۳}$. عرض نقطه B کدام است؟



۱) $\frac{۱۱}{۶}$

۲) $\frac{۱۹}{۳}$

۳) $\frac{۲۷}{۴}$

۴) $\frac{۱۹}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲

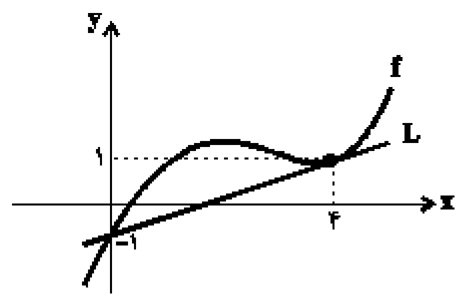
گزینه «۲»

شیب خط گذرا از نقاط $A(۲,۶)$ و B، همان مشتق تابع f در $x = ۲$ یا $f'(۲)$ است.

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{y_B - ۶}{\frac{۵}{۲} - ۲}$$

$$\Rightarrow ۳y_B - ۱۸ = ۱ \Rightarrow y_B = \frac{۱۹}{۳}$$

⑫ مطابق شکل، خط L در نقطه $x = ۴$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x\to ۴} \frac{x - ۴f(x)}{۱ - (f(x))^۲}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۱

۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

شیب خط L همان $f'(۴)$ است. داریم:

$$m_L = \frac{۱-(-۱)}{۴-۰} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{x - ۴f(x)}{۱-(f(x))^۲} = \lim_{x\to ۴} \frac{x - ۴ + ۴ - ۴f(x)}{(۱+f(x))(۱-f(x))}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{۱}{۱+f(x)} \times \lim_{x\to ۴} \left[\frac{x-۴}{۱-f(x)} + \frac{۴(۱-f(x))}{۱-f(x)}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[-\frac{۱}{f'(۴)} + ۴\right] = \frac{۱}{۲}(-۲+۴) = ۱$$

⑬ مشتق راست تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - \sqrt{۲x^۲ - ۱}}$ در $x = ۱$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) ۲   ۳) -۲   ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f'_+(۱) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۲-\sqrt{۲x^۲-۱}}-۰}{x-۱} \xrightarrow[\text{مزدوجصورت}]{\text{ب صورت و مخرج در}}$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۲-\sqrt{۲x^۲-۱}}}{x-۱} \times \frac{\sqrt{x^۲+\sqrt{۲x^۲-۱}}}{\sqrt{x^۲+\sqrt{۲x^۲-۱}}} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۴-۲x^۲+۱}}{(x-۱)\times\sqrt{۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{(x^۲-۱)^۲}}{(x-۱)(\sqrt{۲})} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|x^۲-۱|}{(x-۱)\times\sqrt{۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

دقت کنید که در همسایگی راست $x = ۱$، عبارت $x^۲ - ۱$ مقداری مثبت دارد.

⑭ اگر $f(x) = \frac{x^۲+x+۱}{x+۱}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = ۲xf(x) + (x^۲ - ۱)f'(x)$ در $x = ۴$ کدام است؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۸   ۳) ۲۴   ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

$$f(x) = \frac{x^۲+x+۱}{x+۱} = \frac{x^۲+x}{x+۱} + \frac{۱}{x+۱} = x + \frac{۱}{x+۱}$$

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow g(x) = ۲x(x + \frac{۱}{x+۱}) + (x^۲ - ۱)(۱ - \frac{۱}{(x+۱)^۲})$$

$$= ۲x^۲ + \frac{۲x}{x+۱} + x^۲ - ۱ - \frac{x-۱}{x+۱} = ۳x^۲ - ۱ + \frac{۲x-x+۱}{x+۱} = ۳x^۲$$

$$\Rightarrow g'(x) = ۶x \Rightarrow g'(۴) = ۲۴$$

راه حل دوم:

$$g(x) = ((x^۲ - ۱)f(x))'$$

$$(x^۲ - ۱)f(x) = (x^۲ - ۱)(\frac{x^۲ + x + ۱}{x + ۱})$$
$$= (x - ۱)(x^۲ + x + ۱) = x^۳ - ۱$$
$$\Rightarrow g(x) = (x^۳ - ۱)' = ۳x^۲ \Rightarrow g'(x) = ۶x \Rightarrow g'(۴) = ۲۴$$

⑮ نمودارهای توابع $f(x) = \frac{x}{x+k}$ و f' ، هیچ نقطه مشترکی ندارند. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x}{x+k} \Rightarrow f'(x) = \frac{k}{(x+k)^{۲}}; D_f = D_{f'} = R - \{-k\}$$

معادله $f(x) = f'(x)$ نباید در دامنه‌هایشان جواب قابل قبول داشته باشد. داریم:

$$\frac{x}{x+k} = \frac{k}{(x+k)^{۲}}$$
$$\xrightarrow{x \neq -k} x(x+k)^{۲} - k(x+k) = ۰ \Rightarrow (x+k)(x^{۲} + kx - k) = ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲} + kx - k = ۰$$

برای اینکه شرط مسئله برقرار باشد، یعنی معادله فوق نباید جواب داشته باشد، کافی است Δی معادله فوق منفی باشد یا $x = -k$ جواب مضاعف آن باشد:

$$\begin{cases} \Delta = k^{۲} + ۴k < ۰ \Rightarrow -۴ < k < ۰ & (۱) \\ x = -k : k^{۲} - k^{۲} - k = -k = ۰ \Rightarrow k = ۰ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} k \in (-۴, ۰]$$

پس به ازای اعداد صحیح ۳-، ۲-، ۱- و صفر، نمودارهای f و f' نقطه برخورد نخواهند داشت.

⑯ اگر تابع $f(x)$ در R مشتق دوم داشته باشد و بدانیم $\lim_{h\to ۰} \frac{f'(h+۴)-۲}{h} = ۴$، در این‌صورت مشتق دوم تابع $y = f(x^{۲})$ در نقطه $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۶۴ **۲)** ۲۰ **۳)** ۶۸ **۴)** ۷۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

از حد داده شده می‌توان برداشت کرد که چون ابهام «$\frac{۰}{۰}$» رخ می‌دهد، پس $f'(۴) = ۲$ و همچنین داریم: $f''(۴) = ۴$. حال از y دو بار مشتق می‌گیریم:

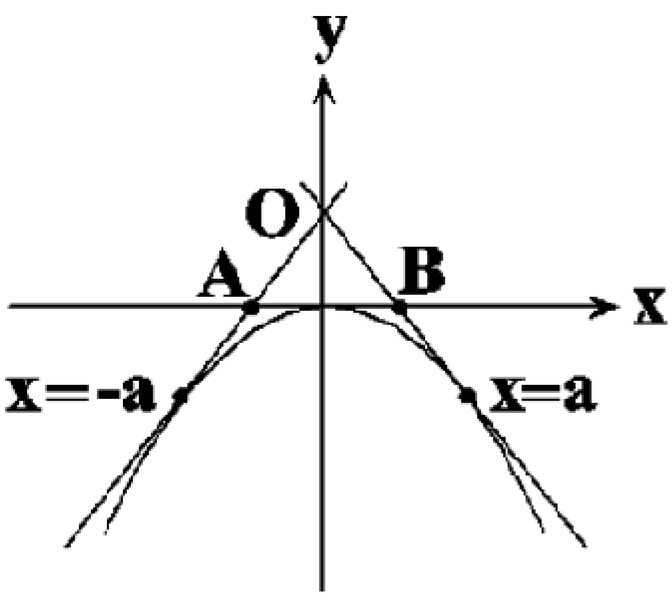
$$y = f(x^{۲}) \Rightarrow y' = ۲xf'(x^{۲})$$

$$\Rightarrow y'' = ۲f'(x^{۲}) + ۴x^{۲}f''(x^{۲})$$

اکنون به جای x مقدار ۲ را قرار می‌دهیم:

$$y'' = ۲f'(۴) + ۱۶f''(۴) = ۲ \times ۲ + ۱۶ \times ۴ = ۶۸$$

۱۷) مطابق شکل زیر، اگر خطوط مماس بر تابع $f(x) = -x^2$ در نقاط $x = a$ و $x = -a$ ترسیم شوند، مثلث OAB به‌وجود می‌آید. مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) $\frac{a^2}{2}$
۲) a^2
۳) a^3
۴) $\frac{a^3}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا معادله خط مماس با شیب منفی را می‌نویسیم:

این خط از نقطه $(a, f(a))$ یا $(a, -a^2)$ می‌گذرد و شیب آن برابر با $f'(a)$ است.

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(a) = -2a$

$y - (-a^2) = -2a(x - a) \Rightarrow y = -2ax + a^2 \xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} x = \frac{a}{2}$

برای خط با شیب مثبت می‌دانیم که از $(-a, f(a))$ یا $(-a, -a^2)$ می‌گذرد و شیب آن برابر با $f'(-a)$ است.

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(-a) = 2a$

$y - (-a^2) = 2a(x + a) \Rightarrow y = 2ax + a^2 \xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} x = -\frac{a}{2}$

ارتفاع مثلث OAB برابر عرض از مبدأ این خطوط یعنی a^2 و قاعده آن برابر a است:

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(a^2)(a) = \frac{a^3}{2}$

۱۸) در تابع $y = f(x)$، با افزایش x از ۲ به $۲ + h$ مقدار تابع به‌اندازه $۳h - h^۲$ زیاد می‌شود. شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

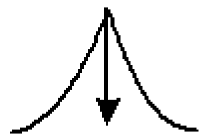
طبق صورت سؤال داریم: $f(۲ + h) - f(۲) = ۳h - h^۲$

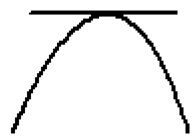
پس: $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = ۳ - h$

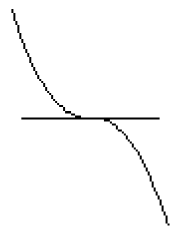
و شیب خط مماس در $x = ۲$ برابر است با:

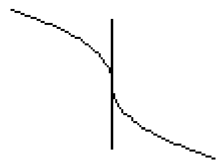
$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = \lim_{h\to ۰} (۳ - h) = ۳$$

۱۹) نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt[۳]{x}}{x-۱}$ در حوالی $x = ۰$ چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینه ۴

مشتق تابع در $x = ۰$ را با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌کنیم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{\sqrt[۳]{x}}{x-۱} - ۰}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}(x-۱)} = -\infty$$

چون مشتق تابع مقداری منفی دارد، پس تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است (رد گزینه‌های «۱» و «۲»). از طرفی چون مشتق ∞ شده، خط مماس عمودی است، در نتیجه گزینه «۴» صحیح است.

۲۰) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه $x = 1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع در نقطه $x = 1$ با نمو ۰/۴۴ یعنی آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله $[1 , 1/44]$. بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1} = \frac{\frac{1/44-1}{\sqrt{1/44}} - \frac{1-1}{1}}{0/44}$$

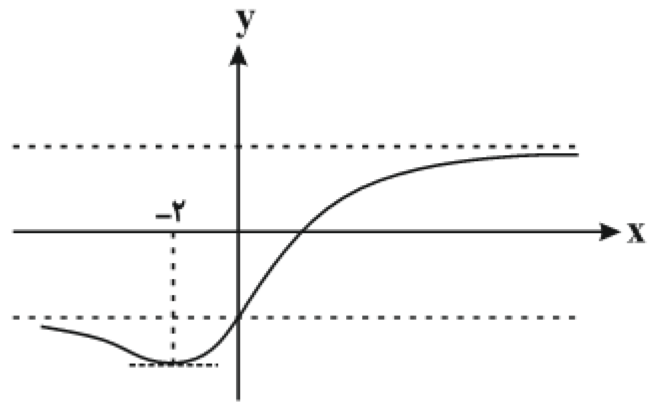
$$= \frac{\frac{0/44}{1/2}}{0/44} = \frac{1}{1/2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

حال آهنگ لحظه‌ای (مشتق) تابع را در $x = 1$ محاسبه می‌کنیم. چون در تابع f، $x - 1$ عامل صفر شونده است، پس برای محاسبه مشتق تنها از عامل صفر شونده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

۲۱) شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-۲}{\sqrt{x^۲+b}}$ را نمایش می‌دهد. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۱,۴)$
۲) $(-۱,۴)$
۳) $(۲,۱)$
۴) $(-۲,۱)$

پاسخ: گزینه ۱

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که تابع دارای دو خط مجانب افقی بوده و مقدار $f(x)$ در $x=۰$ برابر حد تابع در $-\infty$ است. پس:

$$\begin{cases} f(۰)=-\frac{۲}{\sqrt{b}} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^۲}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax}{|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax}{-x}=-a \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a=-\frac{۲}{\sqrt{b}} \Rightarrow a=\frac{۲}{\sqrt{b}} \xrightarrow{\text{b باید مثبت باشد}} a>۰$$

لذا از مثبت بودن a و b نتیجه می‌گیریم که گزینه‌های یک یا سه پاسخ صحیح است. از طرفی تابع در $x=-۲$ مشتق‌پذیر بوده و دارای می‌نیمم نسبی است، یعنی $f'(-۲)=۰$.

$$f'(x)=\frac{a\sqrt{x^۲+b}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+b}}(ax-۲)}{x^۲+b}=\frac{ax^۲+ab-ax^۲+۲x}{(x^۲+b)\sqrt{x^۲+b}}$$

$$\Rightarrow f'(-۲)=۰ \Rightarrow ab+۲(-۲)=۰ \Rightarrow ab=۴$$

$$\begin{cases} ab=۴ \\ a=\frac{۲}{\sqrt{b}} \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(۱,۴)$$

۲۲) اگر $f(x)=\sqrt{۳-\sqrt{۹-x^۴}}$ باشد، مقدار $f''(۰)$ کدام است

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$
۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\frac{\sqrt{۳-\sqrt{۹-x^۴}}\sqrt{۳+\sqrt{۹-x^۴}}}{\sqrt{۳+\sqrt{۹-x^۴}}}=\frac{\sqrt{۹-۹+x^۴}}{\sqrt{۳+\sqrt{۹-x^۴}}}$$

$$f(x)=\frac{x^۲}{\sqrt{۳+\sqrt{۹-x^۴}}}$$

چون $f(x)$ دارای عامل $x^۲$ است، پس $f(۰)=f'(۰)=۰$ می‌باشد، بنابراین برای محاسبه‌ی f'' در نقطه‌ی $x=۰$ کافی است از $x^۲$ دو بار مشتق گرفته و $x=۰$ را جایگذاری کنیم.

$$f''(۰)=\frac{۲}{\sqrt{۳+\sqrt{۹-(۰)^۴}}}=\frac{۲}{\sqrt{۳+۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۶}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۲۳) اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & , x\geq ۰\\ -۳x+[x] & , x<۰\end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۳+۲h)-f^۳(۳-h)}{h^۲-h}$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) ۳۲۴
۲) ۳۲۴-
۳) ۱۰۸
۴) ۱۰۸-

پاسخ: گزینه ۲

$$A=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳+۲h)-f(۳-h)}{h}\times\frac{f^۲(۳+۲h)+f(۳+۲h)f(۳-h)+f^۲(۳-h)}{h-۱}\right)$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳+۲h)-f(۳-h)}{h}\right)\times\left(\frac{f^۲(۳)+f^۲(۳)+f^۲(۳)}{-۱}\right)$$

$$=\left[۲\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+۲h)-f(۳)}{۲h}+\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-h)-f(۳)}{-h}\right]\times(-۳f^۲(۳))$$

$$=۳f'(۳).(-۳f^۲(۳))$$

$$f(۳)=(۳)^۲-۲(۳)=۳$$

برای xهای مثبت $\Rightarrow f'(x)=۲x-۲\Rightarrow f'(۳)=۲(۳)-۲=۴$

$$۳f'(۳).(-۳.f^۲(۳))=۳(۴).(-۳(۳)^۲)=-۳۲۴$$

۲۴) دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۵x - a|x - ۱|$ و $g(x) = ۲x + |x^۲ - ۱|$ مفروضند. تابع fog به‌ازای کدام مقدار a در نقطه‌ای به طول ۱ مشتق‌پذیر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $-\frac{۳}{۵}$
۳) ۵
۴) هیچ مقدارa

پاسخ: گزینه ۳

تابع fog عبارت است از:

$$f(g(x)) = ۵(۲x + |x^۲ - ۱|) - a|۲x + |x^۲ - ۱| - ۱|$$

در همسایگی نقطه‌ی $x = ۱$ عبارت $۲x + |x^۲ - ۱| - ۱$ مثبت است، لذا:

$$|۲x + |x^۲ - ۱| - ۱| = ۲x + |x^۲ - ۱| - ۱$$

پس:

$$fog = ۱۰x + ۵|x^۲ - ۱| - a(۲x - ۱ + |x^۲ - ۱|)$$

برای مشتق‌پذیری این تابع در $x = ۱$ لازم و کافی است که $۵|x^۲ - ۱| - a|x^۲ - ۱|$ یا $(۵ - a)|x^۲ - ۱|$ مشتق‌پذیر باشد. بنابراین:

$$۵ - a = ۰ \Rightarrow a = ۵$$

۲۵) چند نقطه روی نمودار تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x-۴}$ وجود دارد به‌طوری که مماس‌های مرسوم در این نقاط بر خط Dبه معادله‌ی $۴x - ۵y + ۱ = ۰$عمود باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم چنین نقطه‌ای وجود دارد می‌بایست شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط قرنیه و معکوس شیب خط D باشد، همچنین می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی در $x = x_۰$ برابر مشتق تابع در این نقطه است، لذا داریم: $f'(x) = \frac{-۱}{m_D}$

$$\begin{cases} D:\ ۴x - ۵y + ۱ = ۰ \Rightarrow m_D = \frac{۴}{۵} \\ f(x) = \frac{x+۱}{x-۴} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۵}{(x-۴)^۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{-۵}{(x-۴)^۲} = -\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow (x - ۴)^۲ = ۴ \Rightarrow x - ۴ = \pm ۲ \Rightarrow x = ۴ \pm ۲ \Rightarrow x = ۶, ۲$$

بنابراین دو نقطه وجود دارد.