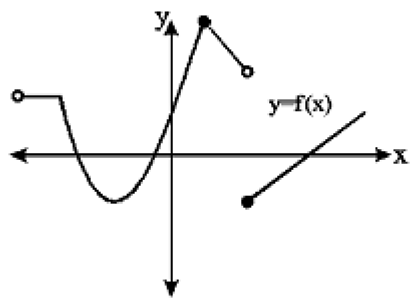
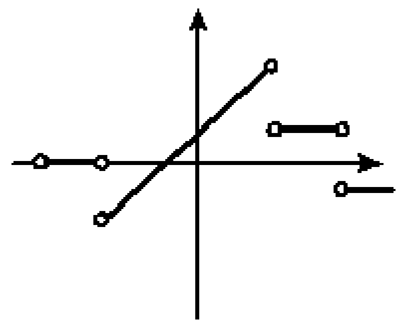
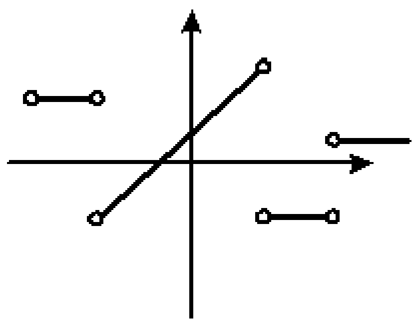
۱) با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f' باشد؟



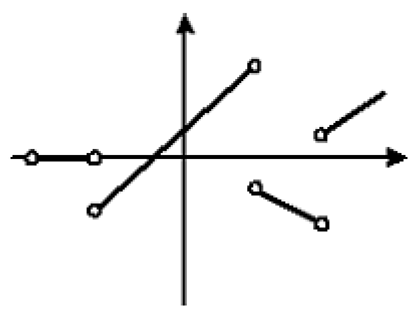
۱)



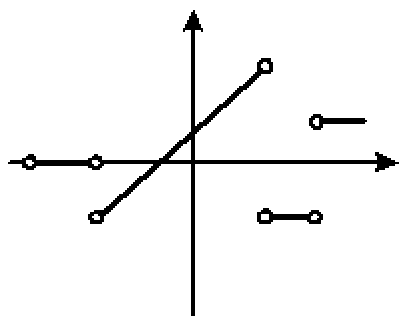
۲)



۳)



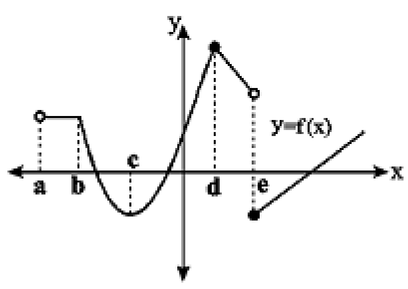
۴)



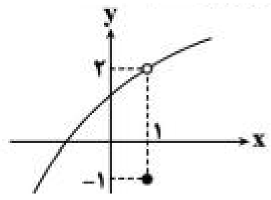
پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

در نقاط $\{b, d, e\}$ مشتق نداریم. در نقطهٔ $\{c\}$ مشتق باید صفر باشد. طول نقطهٔ c منفی است. در بازهٔ a تا b مشتق صفر است، چون شیب صفر است. در بازهٔ b تا c تابع نزولی و $f' < 0$، در بازهٔ c تا d تابع صعودی و $f' > 0$ است. در بازه d تا e تابع نزولی و $f' < 0$ و در بازهٔ $(e, +\infty)$ تابع صعودی و $f' > 0$ است. در بازه‌های d تا e و e تا $+\infty$ تابع خطی است لذا f' ثابت است.



۲) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f است. اگر داشته باشیم: $g(x) = (x^۲ - ۱)f(x)$، آن‌گاه حاصل $g'(۱)$ کدام است؟



۱) -۲
۲) صفر
۳) ۴
۴) مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

مقدار $g'(۱)$ را از دو روش محاسبه می‌کنیم:

روش اول: تعریف مشتق

$$g'(۱) = \lim_{x\to ۱} \frac{g(x)-g(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x^۲-۱)f(x)-۰}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)f(x)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(x+۱).\lim_{x\to ۱} f(x) = ۲ \times ۲ = ۴$$

روش دوم: می‌توانیم از عامل صفرشونده $x^۲ - ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق گرفته و در حد مابقی عوامل ضرب کنیم. داریم:

$$g'(۱) = ((\underbrace{x^۲ - ۱}_{\text{عامل صفرشونده}})f(x))' = \underbrace{۲x}_{\text{مشتق عامل صفرشونده}} \times \lim_{x\to ۱} f(x) = ۲ \times ۲ = ۴$$

③ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{۲}{|x|}$ در نقطه $(۱,۲)$، نمودار را در نقطه دیگری قطع می‌کند. عرض این نقطه کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}+۲$ **۲)** $۲\sqrt{۲}-۲$ **۳)** $\sqrt{۲}+۲$ **۴)** $۲-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

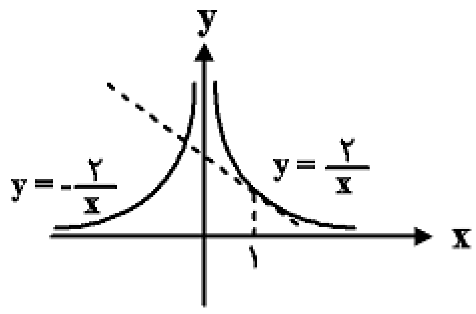
گزینهٔ «۱»

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه (۱,۲) را می‌نویسیم.

$x > ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{۲}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{۲}{x^۲} \Rightarrow$ شیب مماس $= f'(۱) = -۲$

و معادله خط مماس به صورت زیر درمی‌آید:

معادله مماس : $y - ۲ = -۲(x - ۱) \Rightarrow y = -۲x + ۴$



حال باید نقطه تقاطع خط بالا با نمودار تابع f را به دست آوریم.

$-\frac{۲}{x} = -۲x + ۴ \Rightarrow -۲ = -۲x^۲ + ۴x$

$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ + \sqrt{۲} & \text{غ ق ق} \\ x = ۱ - \sqrt{۲} \end{cases}$

پس طول نقطهٔ برخورد $۱ - \sqrt{۲}$ است و عرض آن برابر است با:

$f(۱ - \sqrt{۲}) = \frac{۲}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۲(\sqrt{۲}+۱)}{۲-۱} = ۲\sqrt{۲} + ۲$

۴) اگر $f(x) = (|x|-1)(|x-1|-1)$ باشد، دامنه تابع f' کدام است؟

۱) R
۲) $R-\{0\}$
۳) $R-\{1\}$
۴) $R-\{0,1\}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ی «۱»

اگر $x \neq 0$ و $x \neq 1$ باشد، توابع $g(x) = |x|-1$ و $h(x) = |x-1|-1$ مشتق‌پذیرند، پس تابع $f = gh$ نیز مشتق‌پذیر است، اما چون در $x = 0$ تابع h و در $x = 1$ تابع g نقش عامل صفرکننده را دارند، تابع f در این دو نقطه نیز مشتق‌پذیر خواهد بود و دامنه f'، R است.

نکته بالا را با کمک تعریف مشتق نشان می‌دهیم.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(|x|-1)(|x-1|-1)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{(|x|-1)(-x+1-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(|x|-1)(-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -(|x|-1) = 1$$

f در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{(|x|-1)(|x-1|-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(|x-1|-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} (|x-1|-1) = -1$$

f در $x = 1$ مشتق پذیر است.

۵) حدود a کدام باشد تا تابع $f(x) = \sqrt[3]{ax+a-2}$ روی بازه $[1,3]$ مشتق‌پذیر باشد؟

۱) $R-(0,\frac{1}{2})$
۲) $[0,1]$
۳) $R-[\frac{1}{2},1]$
۴) $[-\frac{1}{2},1]$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

تابع $y = \sqrt[3]{k(x-x_0)}$ فقط در $x = x_0$ مشتق‌ناپذیر است. پس برای اینکه تابع f روی بازه $[1,3]$ مشتق‌پذیر باشد، لازم است که ریشه عبارت $ax+a-2$ یعنی $\frac{2-a}{a}$ خارج از بازه مذکور باشد:

$$\begin{cases} \frac{2-a}{a} < 1 \Rightarrow \frac{2-2a}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \ \text{Ä}\ a > 1 & (1) \\ \frac{2-a}{a} > 3 \Rightarrow \frac{2-4a}{a} > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

از اجتماع جواب‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$a \in (-\infty,\frac{1}{2}) \cup (1,+\infty) = R-[\frac{1}{2},1]$$

دقت کنید که به ازای $a = 0$ هم تابع ثابت $y = \sqrt[3]{-2}$ روی R مشتق‌پذیر است.

۶) در تابع $f(x)=\sqrt{x^۴+۲x^۳+x^۲}$، حاصل $f'_+(۰)-f'_-(-۱)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$f(x)=\sqrt{x^۴+۲x^۳+x^۲}=\sqrt{x^۲(x^۲+۲x+۱)}=\sqrt{x^۲(x+۱)^۲}$$
$$=|x(x+۱)|$$

$$\xrightarrow{f'_+(۰)} f(x)=x^۲+x\Rightarrow f'(x)=۲x+۱\Rightarrow f'_+(۰)=۱$$

$$\xrightarrow{f'_-(-۱)} f(x)=x^۲+x\Rightarrow f'(x)=۲x+۱\Rightarrow f'_-(-۱)=-۱$$

$$f'_+(۰)-f'_-(-۱)=۱-(-۱)=۱+۱=۲$$

۷) در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}$ و دامنهٔ $[۰,۸]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند، این خط مماس، محورyها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۲
۲) -۱/۵
۳) -۱
۴) -۰/۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

ابتدا شیب پاره‌خط واصل بین ابتدا و انتهای تابع را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}\ ,\ D_f=[۰\ ,\ ۸]$$

$$\begin{cases} f(۰)=\dfrac{۰-۵}{۰+۱}=-۵ \rightarrow A(۰\ ,\ -۵) \\ f(۸)=\dfrac{۳۲-۵}{۸+۱}=۳ \rightarrow B(۸\ ,\ ۳)\end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB}=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس یا همان مشتق تابع برابر با ۱ است، بنابراین:

$$f'(x)=\frac{۴\times۱-(-۵)(۱)}{(x+۱)^۲}=\frac{۹}{(x+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۱\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۹\Rightarrow|x+۱|=۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+۱=۳\Rightarrow x=۲\rightarrow y=\frac{۸-۵}{۲+۱}=۱ \\ x+۱=-۳\Rightarrow x=-۴ : \text{در دامنه تابع قرار ندارد}\end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ تماس به صورت $(۲\ ,\ ۱)$ است و معادلهٔ خط مماس برابر است با: $y-۱=۱\times(x-۲)\Rightarrow y=x-۱$

در تقاطع با محورyها، $x=۰$ است، لذا: $\xrightarrow{x=۰} y=-۱$

۸) در تابع خطی f ، حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(f(۱))}{x-۲}$ برابر ۱- است. عرض از مبدأ تابع f برابر کدام گزینه است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

تابع f خطی است، پس در همهٔ نقاط مشتق‌پذیر و پیوسته بوده و مقدار مشتق آن در تمام نقاط، مقداری ثابت و برابر شیب خط است.

می‌دانیم: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

از مقایسهٔ این رابطه با صورت سؤال متوجه می‌شویم که: $f(۱) = ۲$

$y - y_{\circ} = m(x - x_{\circ}) \Rightarrow y - ۲ = -۱(x - ۱)$

$\Rightarrow y - ۲ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۳$

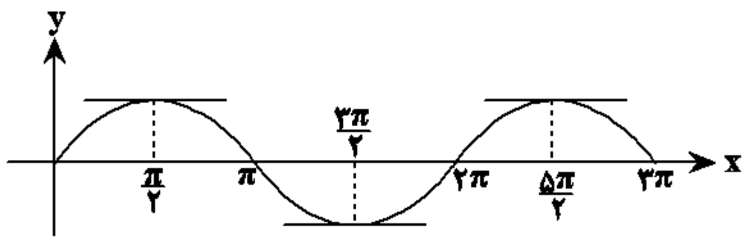
۹) اگر $f(x) = \sin x$ باشد، معادلهٔ $f'(x) = f'(\frac{\pi}{۲})$ در بازهٔ $(\circ, ۳\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

همان‌طور که می‌بینید در سه نقطه مقدار مشتق تابع $f(x)$ برابر $f'(\frac{\pi}{۲}) = \circ$ است.



۱۰) تابع با ضابطهٔ $f(x) = |ax + ۲x^۲|$ در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر <u>نیست</u>. حاصل $f'(۱/۵)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

تابع در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست، پس $x = ۲$ ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است و عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x = ۲$ صفر می‌شود:

$$a(۲) + ۲(۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = -۴ \Rightarrow f(x) = |۲x^۲ - ۴x|$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۴x & ; x \leq ۰ \text{ یا } x \geq ۲ \\ ۴x - ۲x^۲ & ; ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $f'(۱/۵)$ باید از ضابطهٔ پایینی مشتق بگیریم:

$$f'(x) = ۴ - ۴x \; ; \; ۰ < x < ۲ \Rightarrow f'(۱/۵) = -۲$$

۱۱) اگر $f(x) = \frac{۱}{۲x+۶}$ و $g(x) = \frac{(x+۳)^۲}{x-۱}$، آن‌گاه حاصل $(f''.g + g'.f')(۳)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

عبارت $f''.g + g'.f'$ برابر با $(f'.g)'$ است. لذا باید $(f'.g)'(۳)$ را حساب کنیم.

$$f'(x) = -\frac{۱}{۲(x+۳)^۲} \Rightarrow (f'.g)(x) = -\frac{۱}{۲(x+۳)^۲} \times \frac{(x+۳)^۲}{x-۱}$$

$$= -\frac{۱}{۲(x-۱)} \Rightarrow (f'.g)' = \frac{۱}{۲(x-۱)^۲} \Rightarrow (f'.g)'(۳) = \frac{۱}{۲\times۴} = \frac{۱}{۸}$$

۱۲) اگر $f(x) = \begin{cases} x^{۳} & |x| \geq ۱ \\ ۲x^{۲} - ۱ & |x| < ۱ \end{cases}$، آنگاه حاصل $\lim_{h \to ۰^+} \frac{f(۱-h)-f(۱)}{۲h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} & x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \\ ۲x^{۲} - ۱ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

با فرض $-h = t$، داریم:

$$\lim_{h \to ۰^+} \frac{f(۱-h)-f(۱)}{۲h} = \lim_{t \to ۰^-} \frac{f(۱+t)-f(۱)}{-۲t}$$

$$= -\frac{۱}{۲} \lim_{t \to ۰^-} \frac{f(۱+t)-f(۱)}{t} = -\frac{۱}{۲} f'_-(۱) \qquad (*)$$

برای محاسبهٔ $f'_-(۱)$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$-۱ < x < ۱ \Rightarrow f'(x) = ۴x \Rightarrow f'_-(۱) = ۴ \xrightarrow{(*)}$$

$-۲ = ۴ \times \frac{۱}{۲}- = $ حاصل حد موردنظر

۱۳) اگر $f(x) = ۲x + |x|$ و $g(x) = \frac{۲x-|x|}{۳}$، آنگاه حاصل $(fog)'(۰)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

چون توابع f و g دره $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیستند پس نمی‌توان از فرمول مربوط به مشتق‌گیری تابع fog استفاده کرد. ابتدا باید ضابطهٔ fog را به‌دست آورد:

$$x \geq ۰ \Rightarrow g(x) = \frac{x}{۳} \Rightarrow (fog)(x) = f(\frac{x}{۳}) = \frac{۲x}{۳} + |\frac{x}{۳}| = x$$

$$x < ۰ \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow (fog)(x) = f(x) = ۲x + |x| = ۲x - x = x$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = x \Rightarrow (fog)'(x) = ۱ \Rightarrow (fog)'(۰) = ۱$$

۱۴) معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x^۲ - ۲x}$ در نقطهٔ برخورد این تابع با قسمت مثبت محور طول‌ها کدام است؟

۱) $x = ۲$
۲) $y = ۰$
۳) $y = x - ۲$
۴) در این نقطه خط مماس ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا محل برخورد با محور طول‌ها (قسمت مثبت) را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = ۰ \Rightarrow \sqrt[3]{x^۲ - ۲x} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \quad \text{غ. ق. ق} \\ x = ۲ \end{cases}$$

حالا با استفاده از تعریف، مقدار $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[3]{x^۲-۲x}-۰}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x-۲}}{\sqrt[3]{(x-۲)^۳}} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x-۲)^۲}} = \frac{\sqrt[3]{۲}}{۰^+} = +\infty$$

پس تابع f در $x = ۲$ دارای خط مماس قائم به معادلهٔ $x = ۲$ است.

۱۵) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = ۳x + \frac{۲}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[۱,۴]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $-۳\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt[3]{۹}$
۴) $\sqrt[3]{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[۱,۴]$:

$$\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{(۱۲+\frac{۲}{۲})-(۳+۲)}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$x = \alpha \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'(\alpha) = ۳ - \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}}$$

$$\Rightarrow ۳ - \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}} = ۳ - \frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sqrt{\alpha^۳} = ۳$$

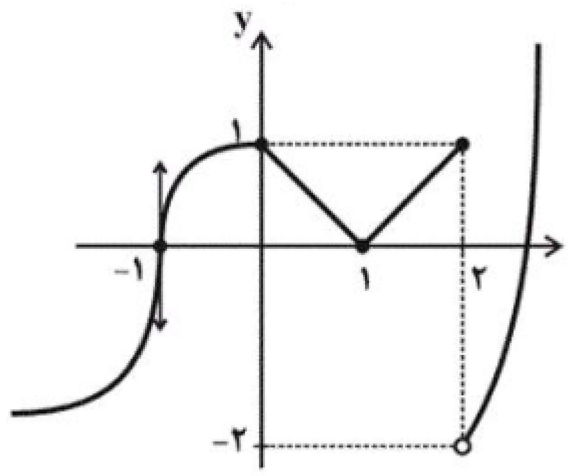
$$\alpha^۳ = ۹ \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{۹}$$

۱۶) تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x+۱} & ;x < ۰ \\ |x-۱| & ;۰ \le x \le ۲ \\ x^۲ - ۶ & ;x > ۲ \end{cases}$ چند نقطه مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) ۲ ‏‏ ۲) ۳ ‏‏ ۳) ۴ ‏‏ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع f را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:



تابع در $x = -۱$ دارای مماس قائم است. پس در این نقطه مشتق ندارد. همچنین در نقاط گوشه‌ای $x = ۰$ و $x = ۱$ و نقطه ناپیوسته $x = ۲$ نیز مشتق‌ناپذیر است. (در $x = ۲$ ناپیوسته است پس مشتق‌ناپذیر است.) پس تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f برابر ۴ است.

۱۷) اگر $f(x) = \frac{x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+x+۱}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = (x^۳-۱)f'(x) + ۳x^۲f(x)$ در $x = ۱$ کدام است؟

۱) ۴ ‏‏ ۲) ۱۲ ‏‏ ۳) ۱۴ ‏‏ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

$$g'(x) = ۳x^۲f'(x) + (x^۳-۱)f''(x) + ۶xf(x) + ۳x^۲f'(x)$$

$$g'(۱) = ۳f'(۱) + ۰ + ۶f(۱) + ۳f'(۱) = ۶f(۱) + ۶f'(۱)$$

از طرف دیگر $f(۱) = \frac{۴}{۳}$ و $f'(x) = \frac{(۳x^۲+۲x+۱)(x^۲+x+۱)-(۲x+۱)(x^۳+x^۲+x+۱)}{(x^۲+x+۱)^۲}$

$$= \frac{۶\times۳-۳\times۴}{۳^۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g'(۱) = ۶\times\frac{۴}{۳} + ۶\times\frac{۲}{۳} = ۱۲$$

راه حل دوم:

$$g(x) = \left((x^۳-۱)f(x)\right)'$$

$$(x^۳-۱)f(x) = (x-۱)(x^۲+x+۱)\times\frac{x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+x+۱} = x^۴-۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۴x^۳ \Rightarrow g'(x) = ۱۲x^۲ \Rightarrow g'(۱) = ۱۲$$

۱۸) اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}-x$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۱}+x$ باشد، حاصل $\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۲x$ ۳) $-۲x$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا حاصل $\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}=\frac{f.g'+f'.g}{gg'}$$

با توجه به اینکه داریم:

$$(f.g)'=f'.g+g'.f$$

ابتدا $f.g$ را تشکیل داده و مشتق می‌گیریم:

$$(f.g)(x)=\left(\sqrt{x^۲-۱}-x\right)\left(\sqrt{x^۲+۱}-x\right)=x^۲+۱-x^۲=۱$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}=۰$$

۱۹) نمودار تابع $f(x)=۲x^۳+Kx+\frac{۱}{۲}$ بر محورهٔ xها مماس است. مقدار K کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۵ ۳) -۰/۷۵ ۴) -۱/۵

پاسخ: گزینه ۴

در نقطه‌ای به طول x که منحنی بر محور xها مماس است، داریم:

$$f'(x)=f(x)=۰$$

$$f'(x)=۶x^۲+K=۰\Rightarrow K=-۶x^۲(*)$$

$$\xrightarrow{f(x)=0\quad \text{جایگذاری در معادله}} ۲x^۳-۶x^۳+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow -۴x^۳=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{(*)}K=-۶x^۲=-۶\left(\frac{۱}{۴}\right)=-\frac{۳}{۲}$$

۲۰) اگر تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲-h)}{۲h}=۳$ باشد، مشتق $f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$ در $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲

۳) -۶ ۴) -۱۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲-h)}{۲h}=\frac{۳-(-۱)}{۲}f'(۲)=۲f'(۲)=۳$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\frac{۳}{۲}$$

$$\left(f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\right)'=\frac{-۱}{۲\sqrt{x^۳}}f'\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\right)'\Bigg|_{x=\frac{۱}{۴}}=-۴f'(۲)=(-۴)\left(\frac{۳}{۲}\right)=-۶$$

۲۱) اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر روی R باشند به‌طوریکه $f(x^۲-۳x)=g(\frac{۲x}{x^۲+۱})$ و $g'(۱)=۳$، آن‌گاه حاصل $f'(-۲)$ کدام است؟

۱) ۱-
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

از طرفین رابطه، مشتق می‌گیریم:

$$f(x^۲-۳x)=g(\frac{۲x}{x^۲+۱})$$

$$\Rightarrow (۲x-۳)\times f'(x^۲-۳x)=\frac{۲(x^۲+۱)-۲x(۲x)}{(x^۲+۱)^۲}\times g'(\frac{۲x}{x^۲+۱})$$

$$\xrightarrow{x=۱}(-۱)\times f'(-۲)=\frac{۲\times۲-۴}{۴}\times g'(۱)\Rightarrow f'(-۲)=۰$$

۲۲) اگر $\lim_{x\to۰}\frac{f(x+h)-f(-x+h)}{x}=۲h^۲$ باشد، حاصل $\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{h}=(m-n)f'(x_۰)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۰}\frac{f(h+x)-f(h-x)}{x}=۲f'(h)=۲h^۲\Rightarrow f'(h)=h^۲$$

$$\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x^۲-۹}=\lim_{x\to۳}\frac{۱}{x+۳}\left(\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\right)$$

$$=\frac{۱}{۶}f'(۳)=\frac{۱}{۶}\times۹=\frac{۳}{۲}$$

۲۳) مجموع مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) صفر　　۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: $\boxed{\text{گزینه ۳}}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x-0}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

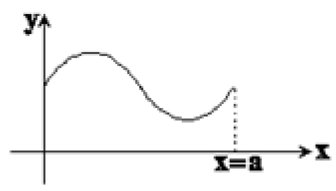
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

و به طور مشابه داریم:

$$f'_-(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f'_+(0)+f'_-(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

۲۴) درشکل مقابل با افزایش مقادیر x از $x=0$ تا $x=a$، مقدار مشتق تابع چگونه تغییر می‌کند؟

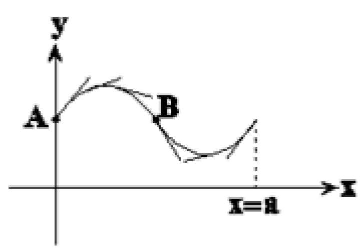


۱) افزایش – کاهش
۲) افزایش – کاهش – افزایش
۳) کاهش – افزایش
۴) کاهش – افزایش – کاهش

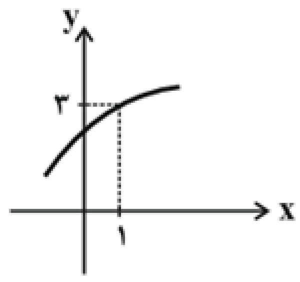
پاسخ: $\boxed{\text{گزینه ۳}}$

گزینه «۳»

با توجه به شکل، مقدار مشتق تابع $y=f(x)$ که همان شیب خط مماس برنمودار است، از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



۲۵ نمودار تابع f به‌صورت زیر می‌باشد. اگر $\lim_{x\to۱} \frac{f^{۲}(x)-۴f(x)+۳}{x-۱} = ۱۰$ باشد، مشتق تابع $y = f(۳x)$ به ازای $x = \frac{۱}{۳}$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to۱} \frac{f^{۲}(x)-۴f(x)+۳}{x-۱} = \lim_{x\to۱} \frac{(f(x)-۳)(f(x)-۱)}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to۱} \frac{(f(x)-f(۱))(f(x)-۱)}{x-۱}$$

$$= f'(۱) \times \lim_{x\to۱} (f(x)-۱) = ۲f'(۱)$$

$$\Rightarrow ۲f'(۱) = ۱۰ \Rightarrow f'(۱) = ۵$$

$$y = f(۳x) \Rightarrow y' = ۳f'(۳x) \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} y' = ۳f'(۱) = ۳ \times ۵ = ۱۵$$