۱) خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x-۱)\sqrt{x^۲+۲x+۶}$ در نقطه برخورد آن با محور xها، نمودار تابع را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳-

۲) ۲-

۳) ۱-

۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$f(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱$

طول نقطه برخورد نمودار f با محور xها برابر $x = ۱$ است. حال برای خط مماس بر نمودار در این نقطه داریم:

$$\text{شیب خط مماس} : m = f'(۱) = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)\sqrt{x^۲+۲x+۶}}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \sqrt{x^۲+۲x+۶} = \sqrt{۱+۲+۶} = ۳$$

بنابراین معادله خط مماس موردنظر $y = ۳(x-۱)$ است. این خط را با نمودار تابع قطع می‌دهیم:

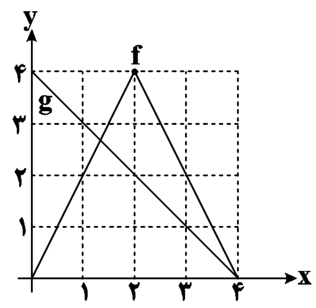
$$(x-۱)\sqrt{x^۲+۲x+۶} = ۳(x-۱) \xrightarrow{x-۱\neq ۰} \sqrt{x^۲+۲x+۶} = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲+۲x+۶ = ۹ \Rightarrow x^۲+۲x-۳ = (x+۳)(x-۱) = ۰$$

$$\xrightarrow{x\neq ۱} x+۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳$$

طول نقطه دیگر برخورد ۳- است.

۲) نمودار توابع f و g در شکل زیر، نشان داده شده‌اند. مشتق تابع $h(x)=\sqrt{f(g(x))}$ در $x=۱$ کدام است؟



۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$h'(x)=\frac{g'(x)f'(g(x))}{۲\sqrt{f(g(x))}}\xrightarrow{x=۱}h'(۱)=\frac{g'(۱)f'(g(۱))}{۲\sqrt{f(g(۱))}}$$

حال مقادیر لازم را از روی نمودار به‌دست می‌آوریم: $g(۱)=۳$

$f(g(۱))=f(۳)=۲$

$f'(g(۱))=f'(۳)=-۲$

$g'(۱)=-۱$

$$\Rightarrow\ h'(۱)=\frac{-۱\times(-۲)}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳) فاصله دو نقطه روی نمودار تابع $f(x)=\frac{۴x-۲}{۲x+۵}$ که مماس در آن‌ها با خط $۲y-۱۲x=۷$ موازی باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳۷}$ ۲) $۲\sqrt{۳۵}$ ۳) $۲\sqrt{۳۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳۱}$

پاسخ: گزینه ۱

شیب خط داده شده برابر ۶ است و از طرفی مماس بر نمودار آن دو نقطه با این خط موازی است، پس مشتق تابع در آن دو نقطه برابر ۶ است و داریم:

$$f'(x)=۶\Rightarrow f'(x)=\frac{۴(۲x+۵)-۲(۴x-۲)}{(۲x+۵)^۲}=\frac{۲۴}{(۲x+۵)^۲}$$

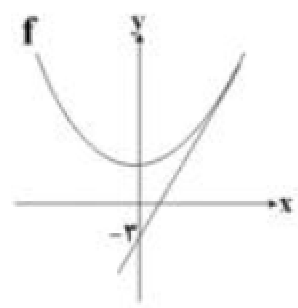
$$\Rightarrow\frac{۲۴}{(۲x+۵)^۲}=۶\Rightarrow(۲x+۵)^۲=۴\Rightarrow ۲x+۵=\pm۲$$

$$\begin{cases}x=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f\left(-\frac{۳}{۲}\right)=-۴\Rightarrow A\left(-\frac{۳}{۲},-۴\right)\\ x=-\frac{۷}{۲}\Rightarrow f\left(-\frac{۷}{۲}\right)=۸\Rightarrow B\left(-\frac{۷}{۲},۸\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ فاصله دو نقطه A و B : $AB=\sqrt{\left(-\frac{۷}{۲}+\frac{۳}{۲}\right)^۲+(۸+۴)^۲}$

$$=\sqrt{۴+۱۴۴}=\sqrt{۱۴۸}=۲\sqrt{۳۷}$$

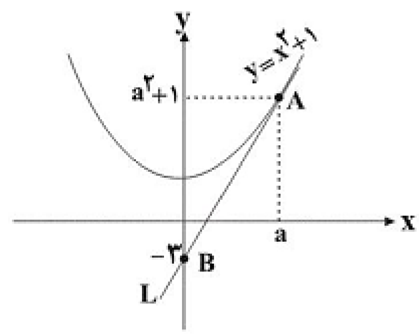
۴) در شکل زیر خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ رسم شده است. شیب این خط مماس کدام است؟



۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



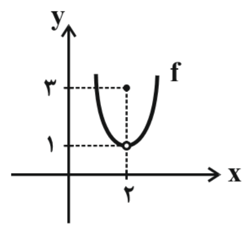
$$A\left|\begin{matrix} a \\ a^۲+۱ \end{matrix}\right. \Rightarrow m_L = f'(a) = ۲a \Rightarrow L: y - a^۲ - ۱ = ۲a(x-a)$$

$$\xrightarrow{B\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۳ \end{matrix}\right.} -۳ - a^۲ - ۱ = -۲a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۲ \end{cases}$$

با توجه به شکل، شیب خط مماس مثبت است، پس:

$$m_L = ۲a \Rightarrow m = ۴$$

⑤ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $g(x) = \frac{۴-x^۲}{f(x)}$ باشد، مقدار $g'(۲)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) -۴

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) وجود ندارد

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تابع در $x = ۲$ پیوسته است و $g(۲) = ۰$ است. داریم:

$$g'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۴-x^۲}{f(x)}}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)f(x)} = \lim_{x\to ۲} \frac{-(x+۲)}{f(x)} = -\frac{۴}{۱} = -۴$$

⑥ اگر $f(x) = \frac{|x-۲|+x[x]}{\sqrt{x}+[x]}$باشد، حاصل $f'_+(۱) - f'_-(۱)$ کدام است؟([ ] نماد جز صحیح است.)

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تابع f دراِ $x = ۱$ پیوسته است، پس نیم مماس چپ و نیم مماس راست دارد. حال در یک همسایگی $x = ۱$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x+۲x\surd۲x\surd+۱;;x<۱x\geq۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x\surd-۱۲x\surd(۲-x)x; & x < ۱ \\ \frac{-\frac{۱}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+۱)^{۲}} ; & x > ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_-(۱) = -\frac{۳}{۲} \\ f'_+(۱) = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow f_+(۱) - f'_-(۱) = -\frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۴}$$

⑦ اگر $f(x) = \begin{cases} |x^۲ - ۴| & ; \quad x \geq ۱ \\ [x] & : \quad -۱ \leq x < ۱ \\ x^۳ & ; \quad x < -۱ \end{cases}$ باشد، دامنه f' کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $R - \{۲, -۲, ۱, ۰, -۱\}$ **۲)** $R - \{۲, ۱, ۰, -۱\}$ **۳)** $R - \{۲, ۱, ۰\}$ **۴)** $R - \{۲, -۲, ۱, ۰\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق تابع مشتق‌پذیر نیست. اگر $x \geq ۱$ باشد، داریم: $y = |x^۲ - ۴| = |(x-۲)(x+۲)|$

از بین ریشه‌های داخل قدرمطلق فقط $x = ۲$ قابل قبول است، چرا که $x = -۲$ در فاصله $x \geq ۱$ نیست.

تابع در $x = ۱$ ناپیوسته است: $f(۱^+) = |۱ - ۴| = ۳$

در نتیجه در این نقطه نیز ناپیوسته می‌باشد. $f(۱^-) = [۱^-] = ۰$

در $x = ۰$ ضابطه $y = [x]$ نیز ناپیوسته است و مشتق‌ناپذیر است. اگر چه تابع در $x = -۱$ پیوسته است ولی چون در این نقطه مقادیر مشتق چپ و راست متفاوت است، نقطه گوشه می‌باشد و تابع در آن مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(-۱) : [x] \xrightarrow{x=(-۱)^+} [(-۱)^+] = -۱ \xrightarrow{\text{مشتق}} f'_+(-۱) = ۰$$

$$f'_-(-۱) : x^۳ \xrightarrow{\text{مشتق}} ۳x^۲ \xrightarrow{x=-۱} f'_-(-۱) = ۳$$

بنابراین تابع در نقاط $x = ۲$، $x = ۱$، $x = ۰$ و $x = -۱$ مشتق‌پذیر نیست و دامنه f' برابر است با: $R - \{۲, ۱, ۰, -۱\}$

⑧ تابع $f(x)=\begin{cases}[x]x+b & ; \quad x<-1\\ a|x+1|-1 & ; \quad x\geq -1\end{cases}$ در $x=-1$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a-b$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای اینکه تابع در نقطه‌ای خاص مشتق‌پذیر باشد، لازم است ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد. بنابراین f باید در $x=-1$ پیوسته باشد:

$$\text{حد چپ}: \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}([x]x+b)$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}(-2x+b)=b+2$$

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(a|x+1|-1)$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}(a(x+1)-1)=-1$$

چون تابع f در $x=-1$ از راست پیوسته است، برابری حد چپ و راست آن در این نقطه به معنای پیوستگی تابع است. بنابراین داریم:

$$b+2=-1\Rightarrow b=-3 \qquad (1)$$

حال در یک همسایگی $x=-1$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & ; \quad x<-1\\ ax+a-1 & ; \quad x\geq -1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-2 & ; \quad x<-1\\ a & ; \quad x\geq -1\end{cases}$$

حال برای مشتق‌پذیری، کافی است مشتق چپ و راست تابع f را در $x=-1$ برابر قرار دهیم:

$$f'_-(-1)=f'_+(-1)\Rightarrow -2=a \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a-b=-2-(-3)=1$$

⑨ مشتق دوم تابع $f(x)=\sqrt{(x-1)^3(x^2-1)}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $-2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^3(x-1)(x+1)}=\sqrt{(x-1)^4(x+1)}$$

$$=(x-1)^2\sqrt{x+1}$$

$x=1$، ریشه مضاعف تابع f است؛ به این معنی که نمودار f در $x=1$ بر محور xها مماس است. پس برای اینکه $f''(1)$ را حساب کنیم، کافی است ۲ بار از عامل صفرکننده $(x-1)^2$ مشتق بگیریم و $x=1$ را در $\sqrt{x+1}$ جای‌گذاری کنیم. داریم:

$$f''(1)=2\sqrt{x+1}\,\Big|_{x=1}=2\sqrt{2}$$

۱۰) اگر $f(2x) = g(x^2)$ و $g'(x) = \frac{3x}{x-1}$ باشد، مقدار $f''(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x(x + \frac{1}{x+1}) + (x^2 - 1)(1 - \frac{1}{(x+1)^2})$$

$$= 2x^2 + \frac{2x}{x+1} + x^2 - 1 - \frac{x-1}{x+1} = 3x^2 - 1 + \frac{2x-x+1}{x+1} = 3x^2$$

$$\Rightarrow g'(x) = 6x \Rightarrow g'(4) = 24$$

راه حل دوم:

$$g(x) = ((x^2 - 1)f(x))'$$

$$(x^2 - 1)f(x) = (x^2 - 1)(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1})$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$
$$\Rightarrow g(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2 \Rightarrow g'(x) = 6x \Rightarrow g'(4) = 24$$

۱۱) کدام تابع در $x = 0$ ، مشتق ناپذیر است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y = x|x|$ ۲) $y = [x^2]x$ ۳) $y = [x]x$ ۴) $y = [|x|]x$

پاسخ: گزینه ۳

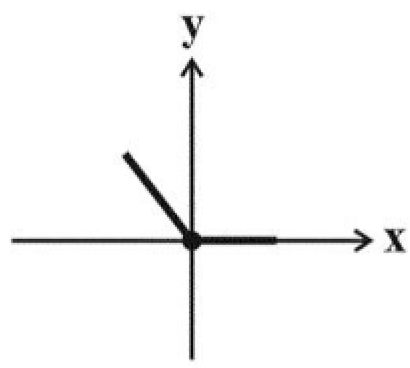
به دلیل حضور عبارت x در ضابطه توابع، هر ۴ تابع در $x = 0$ پیوسته هستند. در یک همسایگی $x = 0$ ، مقادیر $[|x|]$ و $[x^2]$ برابر صفر هستند، بنابراین توابع $y = [x^2]x$ و $y = [|x|]x$ در این همسایگی تابع ثابت صفر و در نتیجه مشتق‌پذیر هستند.

تابع $y = x|x|$ را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x|x| = \begin{cases} -x^2 \ ; & x < 0 \\ x^2 \ ; & x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x \ ; & x < 0 \\ 2x \ ; & x \geqslant 0 \end{cases}$$

واضح است که این تابع نیز در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

اما نمودار تابع $y = [x]x$ ، در همسایگی $x = 0$ به صورت زیر است:



این تابع در $x = 0$ ، مشتق چپ و راست نابرابر دارد، بنابراین در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۱۲) اگر $f(x)=(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱})^۶$ و $g(x)=(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱})^۵$ باشد، حاصل $f'g+g'f$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۲}$

۲) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینه ۴

عبارت خواسته‌شده، مشتق تابع fg است:

$$\Rightarrow (fg)(x)=(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱})^۶(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱})^۵$$

$$=((\sqrt{x+۲})^۲-(\sqrt{x+۱})^۲)^۵(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱})$$

$$=۱(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱})$$

$$\Rightarrow (fg)'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۰)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}$$

۱۳) خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x\sqrt{x+۴}$ در نقطه $x=۰$، از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۲)$

۲) $(-\frac{۱}{۲},۱)$

۳) $(\frac{۱}{۲},-۱)$

۴) $(-\frac{۱}{۲},-۱)$

پاسخ: گزینه ۴

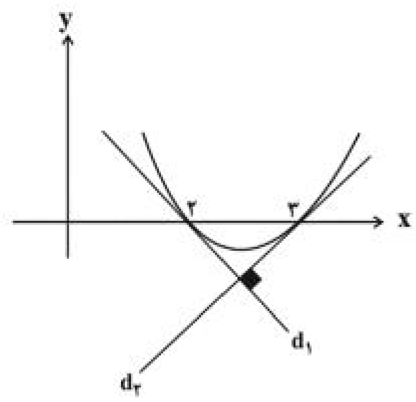
شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=۰$ برابر $f'(۰)$ است. پس داریم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x\sqrt{x+۴}-۰}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰}\sqrt{x+۴}=۲$$

از طرف دیگر خط مماس از نقطه $(۰,۰)$ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $y=۲x$ است و این خط از نقطه $(-\frac{۱}{۲},-۱)$ نیز می‌گذرد.

۱۴) در شکل زیر، خطوط عمود بر هم d_1 و d_2 در $x = ۲$ و $x = ۳$ مماس روی محور xها بر نمودار تابع f هستند. اگر $\lim_{x\to ۳} \frac{x-۳}{f(x)} = ۳$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{x^۳-۸}$کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۳۶}$

۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۸}$

۴) $-\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

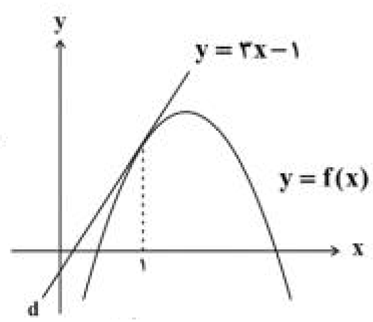
$\lim_{x\to ۳} \frac{x-۳}{f(x)} = \frac{۱}{\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)}{x-۳}} = \frac{۱}{f'(۳)} = ۳ \Rightarrow f'(۳) = \frac{۱}{۳}$

یعنی شیب خط d_2 برابر $\frac{۱}{۳}$ است. حال چون خط d_1 بر خط d_2 عمود است، شیب d_1 یا به عبارت دیگر، مشتق تابع f در $x = ۲$ برابر -۳ است.

$f'(۲) = -۳$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{x^۳-۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{(x^۲+۲x+۴)(x-۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x^۲+۲x+۴} \times \lim \frac{f(x)}{x-۲}$$
$$= \frac{۱}{۱۲} f'(۲) = -\frac{۱}{۴}$$

۱۵) خط d در نقطه $x = ۱$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{(f(x))^۳-۴f(x)}{x-۱}$ کدام است؟



۱) ۲۴

۲) ۱۲

۳) ۴۸

۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f^۳(x)-۴f(x)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)(f(x)+۲)(f(x)-۲)}{x-۱}$$
$$= \lim_{x\to ۱} (f(x)(f(x)+۲)) \times \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-۲}{x-۱} = ۲ \times ۴ \times f'(۱)$$
$$= ۸ \times ۳ = ۲۴$$

۱۶) اگر $D_f \in (۰,۱)$؛ $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}$ مفروض باشند، ضابطه تابع $y=f'(x).g'(f(x))$ کدام است؟

۱) $(۱-x)^{\frac{۳}{۲}}$
۲) $(۱-x)^{-\frac{۳}{۲}}$
۳) $\frac{۱}{۲}(۱-x)^{\frac{۳}{۲}}$
۴) $\frac{۱}{۲}(۱-x)^{-\frac{۳}{۲}}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

می‌دانیم:

$$f'(x).g'(f(x))=(gof)'(x)$$

پس $(gof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(gof)(x)=\frac{\frac{۱}{\sqrt{x}}}{\sqrt{(\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲-۱}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{-x+۱}{x}}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{-x+۱}}{\sqrt{x}}}=\frac{۱}{\sqrt{-x+۱}}$$

از تابع gofمشتق می‌گیریم:

$$y=(gof)'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{-x+۱}}}{-x+۱}=\frac{۱}{۲(-x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{۲}(۱-x)^{-\frac{۳}{۲}}$$

۱۷) اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^۲+۳h}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۳}}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=f(\sqrt{۱+x})$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^۲+۳h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h+۳}\times\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{۱}{۳}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x}{\sqrt{۱+x^۳}}(۱)$$

$$g'(x)=(f(\sqrt{۱+x}))'=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}f'(\sqrt{۱+x})$$

$$\Rightarrow g'(۳)=\frac{۱}{۴}f'(۲)\xrightarrow{(۱)}g'(۳)=\frac{۱}{۲}$$

۱۸) اگر $f(x)=\frac{x^۲-۴}{\cos \pi x}[x-۳]$ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴
۲) ۴-
۳) ۸
۴) ۸-

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-f'_-(۲)$$

$$-f'_-(۲)=-\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-\lim_{x\to ۲^-}\frac{\frac{x^۲-۴}{\cos \pi x}[x-۳]-۰}{x-۲}$$

$$=-\lim_{x\to ۲^-}\frac{\frac{(x-۲)(x+۲)}{\cos \pi x}[۲^- -۳]}{x-۲}=-(\frac{۴}{\cos ۲\pi}(-۲))=۸$$

۱۹) اگر تابع g در R تعریف شده و مشتق‌پذیر بوده و $f'(x)g(x) = x^{۲} + g'(x)f(x)$ و $f(x) = x\sqrt{x}$ باشد، حاصل $(\frac{g}{f})'(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

طبق اطلاعات صورت سؤال داریم: $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = x^{۲}$

چون صحبت از مشتق در $x = ۲$ است به جای x، ۲ را قرار می‌دهیم:

$$f'(۲)g(۲) - g'(۲)f(۲) = ۲^{۲} = ۴$$

حال سراغ مطلوب تست می رویم:

$$(\frac{g}{f})'(۲) = \frac{g'(۲)f(۲)-f'(۲)g(۲)}{(f(۲))^{۲}} = \frac{-۴}{(۲\sqrt{۲})^{۲}} = \frac{-۴}{۸} = -\frac{۱}{۲}$$

۲۰) نقطه $M(x,y)$ روی نمودار تابع $y = \sqrt{۷x+۴}$ در حال حرکت است. اگر d فاصله نقطه M از مبدأ مختصات باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر d نسبت به x در نقطه $x = ۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۲۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

$$d = \sqrt{x^{۲} + (\sqrt{۷x+۴})^{۲}} = \sqrt{x^{۲} + ۷x + ۴}$$

$\Rightarrow$ آهنگ لحظه‌ای تغییر d $= d' = \frac{۲x+۷}{۲\sqrt{x^{۲}+۷x+۴}}$

$$\xrightarrow{x=۵} d' = \frac{۱۰+۷}{۲\sqrt{۲۵+۳۵+۴}} = \frac{۱۷}{۱۶}$$

۲۱) اگر $f(x) = [x]|x^{۲} - x - ۲|$ باشد، حاصل $f'_{+}(-۲) - f'_{-}(۲)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

برای مشتق‌گیری یک طرفه در چنین توابعی، کافی است در همسایگی نقطه موردنظر، مقدار عبارت جزء صحیح و علامت عبارت قدرمطلقی را تعیین کنیم و از تابع به‌دست آمده مشتق بگیریم. بنابراین در این سؤال داریم:

$$x \to (-۲)^{+} : f(x) = -۲x^{۲} + ۲x + ۴$$
$$\Rightarrow f'_{+}(-۲) = -۴x + ۲|_{x=-۲} = ۱۰$$

$$x \to ۲^{-} : f(x) = -x^{۲} + x + ۲ \Rightarrow f'_{-}(۲) = -۲x + ۱\Big|_{x=۲} = -۳$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-۲) - f'_{-}(۲) = ۱۰ - (-۳) = ۱۳$$

۲۲) در مورد تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f'(۰)=۰$ ۲) $f'(۰)=+\infty$ ۳) $f'_+(۰)=+\infty$ ۴) $f'_+(۰)=-\infty$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} ۲-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۲ \\ \text{و} \\ \sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲-x}\leq \sqrt{۲} \Rightarrow ۲-x\leq ۲ \Rightarrow x\geq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=[۰,۲]$$

پس تنها مشتق راست f در $x=۰$ قابل محاسبه است. در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}=+\infty$$

۲۳) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}-۶x$ باشد، خط مماس نمودار تابع gof در چند نقطه موازی محور طول‌ها است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

برای آنکه خط مماس بر منحنی $gof(x)$ موازی محور طول‌ها باشد، باید شیب آن برابر صفر باشد. بنابراین معادله $(gof)'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$(gof)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))=۰$$

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \\ g'(x)=x^۲-x-۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times(f^۲-f-۶)=۰ \xrightarrow{f=\sqrt{x}} \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-\sqrt{x}-۶)=۰$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x}-۶=۰ \Rightarrow x-۶=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان۲}} x^۲-۱۲x+۳۶=x$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۹ \\ x=۴ \ \text{غ.ق} \end{cases}$$

$x=۴$ در معادله صدق نمی‌کند.

۲۴) اگر $f(x)=\sqrt{\frac{x[x]}{|1-x|}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ کدام است؟ ([ ]: علامت جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۳

واضح است که حد خواسته شده همان $f'_+(2)$ است. حالا با توجه به این‌که تابع داده شده در $x=2$ پیوستگی راست دارد، پس برای محاسبه $f'_+(2)$ ابتدا $f(x)$ را ساده نموده و سپس $f'(x)$ را در همسایگی راست نقطه $x=2$ حساب کرده و در مرحله آخر $f'_+(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to 2^+ \Rightarrow \begin{cases}[x]=2\\ |1-x|=x-1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-1}}=\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{2x}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'_+(2)=-\frac{1}{2}$$

۲۵) اگر $\frac{f(x)}{2}=x-|x|$ و $g(x)=2x+2|x|$ باشند، مشتق تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۲

$$(fog)(x)=f(g(x))=2(2x+2|x|-|2x+2|x||)=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$(fog)(x)=0 \Rightarrow (fog)'(x)=0$$