



۱ دو ضلع مستطیل ABCD روی نمودار تابع $y = |x - 1|$ قرار دارد. اگر مختصات رأس A به صورت $A(2, 2)$ باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

(۲) $\frac{5}{2}$
(۴) ۱

(۱) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲

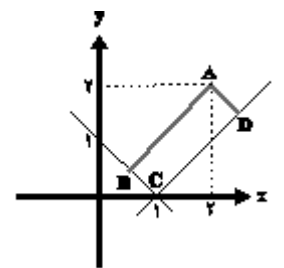
پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ضابطه‌های تابع $y = |x - 1|$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$y = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1; & x < 1 \\ x - 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

که نمودار آن به همراه نقطه A در شکل زیر رسم شده است:



واضح است که طول اضلاع مستطیل برابر است با فاصله نقطه A از شاخه‌های نمودار تابع $y = |x - 1|$. پس داریم:

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{3}{2} \begin{cases} AB = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ AD = \frac{|2 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

۲) در مثلث ABC با رئوس $A(1, 5)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(3, -4)$ ، فاصله بین پای ارتفاع AH و نقطه میانی ضلع AB کدام است؟

(۴) $\frac{4}{\sqrt{29}}$

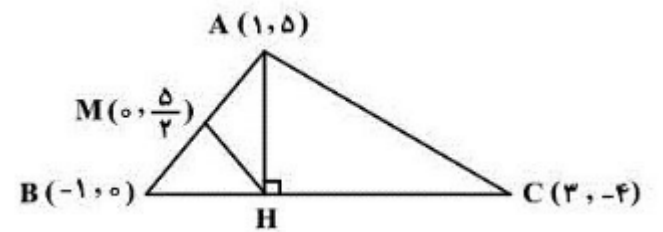
(۳) $\frac{2}{\sqrt{29}}$

(۲) $\frac{\sqrt{29}}{4}$

(۱) $\frac{\sqrt{29}}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



شیب ضلع BC: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{3+1} = -1$

معادله BC: $y = -x + h \xrightarrow{B(-1, 0)} 0 = 1 + h \Rightarrow h = -1$

$\Rightarrow BC : y = -x - 1$

معادله ارتفاع AH: $y = \frac{-1}{m_{BC}}x + h' = x + h'$

$\xrightarrow{A(1, 5)} 5 = 1 + h' \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow y = x + 4$

نقطه تلاقی BC و AH: $H(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

وسط ضلع AB: $M(\frac{1-1}{2}, \frac{5+0}{2}) = (0, \frac{5}{2})$

$\Rightarrow MH = \sqrt{(-\frac{5}{2} - 0)^2 + (\frac{3}{2} - \frac{5}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

۳) نقطه $A(-1, 1)$ یک رأس و AB یک ضلع مربع هستند. اگر معادله یک قطر مربع $2x + y + 2 = 0$ باشد، مختصات رأس B کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $(0, 2)$

(۳) $(2, 2)$

(۲) $(1, 0)$

(۱) $(3, -1)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

توجه کنید نقطه A روی قطر داده شده قرار ندارد.

اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم فاصله نقطه A تا قطر برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ خواهد بود. نقطه B را با مختصات مجهول روی قطر مورد نظر فرض می‌کنیم $(\alpha, 2\alpha - 2)$ که فاصله آن تا نقطه A برابر a خواهد بود.

$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+2-2(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Rightarrow a = \sqrt{10}$

$|AB| = a = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$

$5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 10 \Rightarrow 5\alpha(\alpha - 2) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0, 2 \Rightarrow B(0, -2)$ یا $B(2, 2)$

۴) اگر سه ضلع از یک لوزی بر خطوط $d: 2x - y = 6$ ، $d': y - x = 2$ و $d'': 2y = 4x - 4$ منطبق باشند، مساحت این لوزی کدام است؟

$\frac{8\sqrt{2}}{5}$ (۴)

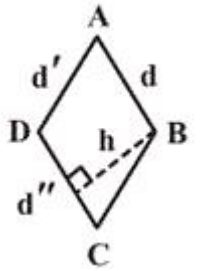
$\frac{16\sqrt{2}}{5}$ (۳)

$\frac{16\sqrt{10}}{5}$ (۲)

$\frac{8\sqrt{10}}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خطوط d و d'' موازیند، پس شکل به صورت زیر است:



$$\begin{cases} d: 2x - y = 6 \\ d': y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 8, y = 10 \Rightarrow A(8, 10)$$

$$\begin{cases} d': y - x = 2 \\ d'': 2y - 4x = -4 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 6 \Rightarrow D(4, 6)$$

طول ضلع لوزی: $AD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} d: 2x - y - 6 = 0 \\ d'': 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ارتفاع: } h = \frac{|-2 - (-6)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

مساحت لوزی = $4\sqrt{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$

۵) عرض از مبدأ خطی با شیب مثبت که نیمساز زاویه بین دو خط $2x + y = 1$ و $x - 2y = 2$ باشد، کدام است؟

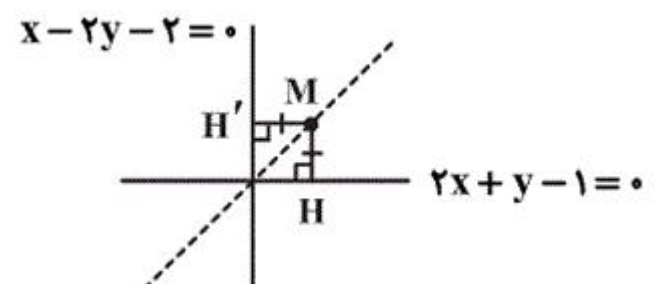
-۳ (۴)

۳ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



هر دو خط متقاطع یک نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی دارند و می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز دو خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. پس فرض می‌کنیم $M(x, y)$ روی نیمساز دو خط متقاطع باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x-2y-2|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow |2x + y - 1| = |x - 2y - 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = x - 2y - 2 \\ 2x + y - 1 = -x + 2y + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & m_1 = -\frac{1}{3} < 0 \quad \times \\ 3x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3x - 3 & m_2 = 3 > 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

پس خط مطلوب $y = 3x - 3$ است و عرض از مبدأ آن -۳ است.

۶ در مثلث ABC با رئوس $A(1, 1)$ ، $B(2, -1)$ و $C(6, 2)$ ، فاصله ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟

۳ (۴)

۲/۷ (۳)

۲/۴ (۲)

۲/۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا معادله عمودمنصف BC را می‌نویسیم:

$$M = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+2}{2} \right) = \left(4, \frac{1}{2} \right) \text{ نقطه وسط B و C}$$

$$m_{BC} = \frac{-1-2}{2-6} = \frac{3}{4} \Rightarrow m' = -\frac{4}{3}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x - 4) \xrightarrow{\times 6} 6y - 3 = -8x + 32 \Rightarrow 8x + 6y - 35 = 0$$

فاصله ارتفاع از عمودمنصف برابر با فاصله نقطه A از خط عمودمنصف است:

$$\frac{|8(1)+6(1)-35|}{\sqrt{64+36}} = \frac{2}{5}$$

۷ معادله یکی از خطوطی که بر خط به معادله $3x + 4y + 3 = 0$ عمود بوده و فاصله مبدأ مختصات از آن برابر $\frac{2}{5}$ باشد، کدام است؟

$$3y + 4x - 2 = 0 \quad (۲)$$

$$4x - 3y + 3 = 0 \quad (۴)$$

$$3y - 4x - 2 = 0 \quad (۱)$$

$$4x - 3y - 3 = 0 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$3x + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 4y = -3x - 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

شیب خط برابر $-\frac{3}{4}$ است و شیب خطی که بر این خط عمود باشد به صورت مقابل به دست می‌آید: $m \times m' = -1 \Rightarrow (-\frac{3}{4}) \times m' = -1$

$$\Rightarrow m' = \frac{4}{3} \xrightarrow{y=m'x+b'} y = \frac{4}{3}x + b'$$

$$\Rightarrow 3y - 4x - b = 0, O(0, 0) \Rightarrow d = \frac{|3(0) - 4(0) - b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-b|}{5}$$

$$\xrightarrow{d=\frac{2}{5}} \frac{|-b|}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow |-b| = 2 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x - 2 = 0 \\ 3y - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

۸ اضلاع مثلث ABC روی خطوط $5x - 3y = 2$ ، $3x + 5y = 8$ و $x - y = 1$ قرار دارند. مختصات محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کدام است؟

(۰, ۱) (۴)

(۱, ۱) (۳)

(-۱, ۱) (۲)

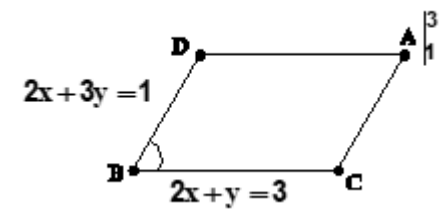
(۱, ۰) (۱)

پاسخ: گزینه ۳

چون دو خط $3x + 5y = 8$ و $5x - 3y = 2$ بر هم عمودند، مثلث حاصل قائم‌الزاویه است، لذا محل تلاقی سه ارتفاع روی رأس قائمه یعنی محل تلاقی همین دو خط است.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=1 \Rightarrow (1, 1)$$

۹ در متوازی‌الاضلاع شکل فرضی زیر، عرض نقطه D کدام است؟



- (۱) -۳
- (۲) ۱
- (۳) ۰
- (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

برای به دست آوردن عرض نقطه D باید معادله خط AD را به دست آوریم و از تلاقی آن با خط BD عرض نقطه تلاقی را حساب کنیم. چون خط BC با AD موازی است لذا شیب‌های برابر دارند، پس برای نوشتن معادله خط AD داریم:

$$m_{AD} = -2 \text{ : شیب خط } AD \Rightarrow \text{شیب خط } BC = -2$$

معادله خط AD با شیب $m = -2$ و گذرنده از نقطه $A \left(\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right)$:

$$y - 1 = -2(x - 3) \Rightarrow y + 2x = 7$$

حال از دستگاه معادلات زیر عرض نقطه تلاقی D را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 3y + 2x = 1 \end{cases}$$

$$2y = -6 \Rightarrow y = -3$$

۱۰) اگر نقطه $(۱, ۳)$ یکی از رئوس لوزی ABCD و $y = ۳x + ۵$ و $۲x - ۵y - ۱ = ۰$ معادلات دو ضلع آن باشند، محیط این لوزی کدام است؟

(۲) $\frac{۲۶\sqrt{۱۰}}{۵}$

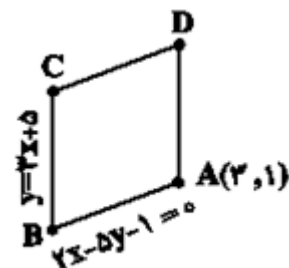
(۴) ۲۰

(۱) $۴\sqrt{۲۹}$

(۳) $۴\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

معادلات خطوط داده شده با هم موازی نیستند و چون نقطه $(۱, ۳)$ در معادله $۲x - ۵y - ۱ = ۰$ صدق می‌کند، اما در معادله $y = ۳x + ۵$ جواب نمی‌دهد در نتیجه می‌توان شکل را به صورت زیر در نظر گرفت:



از تلاقی دو خط می‌توان مختصات نقطه B را به دست آورد.

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2x - 5y - 1 = 0 \Rightarrow 2x - 15x - 25 - 1 = 0 \Rightarrow -13x = 26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_B = -2, \quad y_B = -1 \Rightarrow B(-2, -1)$$

طول ضلع $|AB|$ برابر است با: $|AB| = \sqrt{۲۵ + ۴} = \sqrt{۲۹}$

در نتیجه محیط این لوزی برابر است با: $P = ۴|AB| = ۴\sqrt{۲۹}$

۱۱) نقطه A واقع بر خط $y = ۲x - ۱$ ، کم‌ترین فاصله را از مبدأ مختصات دارد. طول نقطه تصویر A بر محور xها کدام است؟

(۲) $-۰/۲$

(۴) $\frac{۳}{۲}$

(۱) -۱

(۳) $۰/۴$

پاسخ: گزینه ۳

نقطه مورد نظر را به صورت $(a, ۲a - ۱)$ در نظر می‌گیریم که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{a^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{5a^2 - 4a + 1}$$

کم‌ترین مقدار عبارت فوق معادل کم‌ترین مقدار سهمی $۵a^2 - 4a + ۱$ می‌باشد که به ازای طول رأس سهمی به دست می‌آید:

$$a = +\frac{۴}{۲(۵)} = ۰/۴$$

بنابراین نقطه مورد نظر $(۰/۴, -۰/۲)$ و طول تصویر آن روی محور xها $۰/۴$ است.

۱۲) اگر نقاط $A(۲, ۳)$ ، $B(۶, ۲k-۳)$ و $C(k, -۱)$ رئوس مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) باشند، فاصله پای میانه وارد بر وتر تا مبدأ مختصات چقدر است؟

$\sqrt{۳۷}$ (۴)

$\sqrt{۳۴}$ (۳)

$\sqrt{۲۹}$ (۲)

$\sqrt{۲۶}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که مثلث در رأس A قائمه می‌باشد، پس شیب AB و AC ، قرینه و معکوس همدیگر هستند.

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{۲k-۶}{۴} = \frac{k-۳}{۲} \\ m_{AC} = \frac{۴}{۲-k} \end{cases} \Rightarrow \frac{k-۳}{۲} = \frac{k-۲}{۴} \Rightarrow k = ۴$$

پای میانه وارد بر وتر همان وسط پاره‌خط BC است.

$$\Rightarrow \begin{cases} B(۶, ۵) \\ C(۴, -۱) \end{cases} \Rightarrow \text{وسط پاره‌خط } BC \text{ } (۵, ۲)$$

و در نهایت فاصله این نقطه تا مبدأ برابر است با: $\sqrt{۵^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۲۹}$

۱۳) از برخورد خطوط $y + 2x = 1$, $2y - x = 2$ و $y + 4 = 3x$ با یکدیگر مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

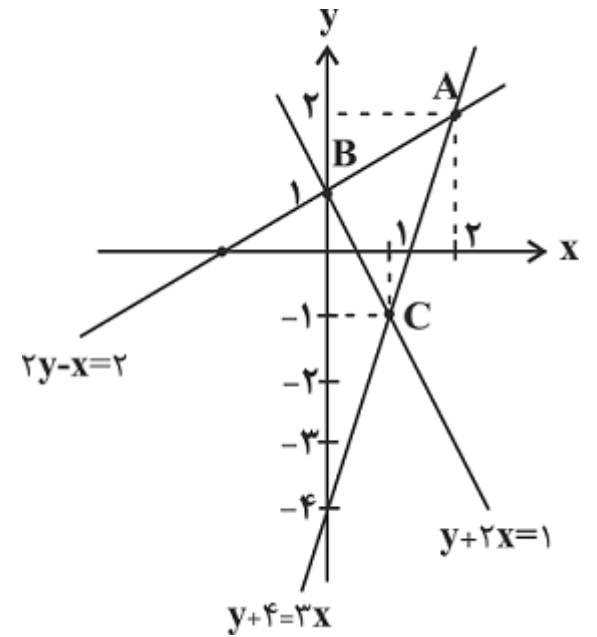
(۳) ۱

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) ۵

پاسخ: گزینه ۲

با رسم سه خط داده شده داریم:



شیب دو خط $2y - x = 2$ و $y + 2x = 1$ قرینه و معکوس یکدیگرند، بنابراین این دو خط بر یکدیگر عمود هستند.

$$\begin{cases} 2y - x = 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2} \\ y + 2x = 1 \Rightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow \text{شیب} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(-2) = -1$$

با توجه به عمود بودن دو خط گفته شده، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مساحت آن، مساحت مثلث مطلوب سوال است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times BC}{2} \quad (*)$$

با توجه به نمودارهای رسم شده، $B(0, 1)$ است و برای بدست آوردن مختصات نقطه A و C داریم:

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 4 = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow 3x - 4 = 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases}$$

حال اندازه دو ضلع AB و BC را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{(*)} S_{ABC} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$$

۱۴) دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-1, 2)$ روی یک دایره قرار دارند. اگر یک قطر آن روی خط $y = 3x - 1$ باشد، مختصات مرکز دایره کدام است؟

(۴) $(\frac{5}{4}, \frac{21}{4})$

(۳) $(\frac{3}{4}, \frac{-11}{4})$

(۲) $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$

(۱) $(\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$

پاسخ: گزینه ۱

مرکز دایره روی عمود منصف وتر AB قرار دارد، بنابراین مرکز دایره محل برخورد عمود منصف AB و خط $y = 3x - 1$ است.

$$m_{AB} = \frac{5-2}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow AB \text{ عمود منصف شیب } = -1$$

$$M \text{ وسط } AB : (\frac{2-1}{2}, \frac{5+2}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$$

$$y - \frac{7}{2} = -1(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = -x + 4$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 = -x + 4 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$y = 3x - 1 \Rightarrow y = 3(\frac{5}{4}) - 1 = \frac{11}{4} \text{ مرکز دایره } : (\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$$

۱۵) دو خط $2x + 3y = 5$ و $4x + 6y = 2k$ بر یک دایره مماس اند. اگر مساحت دایره $\frac{16\pi}{13}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۱۰

(۲) ۱۳

(۱) ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

$$4x + 6y = 2k \xrightarrow{\div 2} 2x + 3y = k$$

دو خط مماس بر دایره شیب‌های برابر دارند و موازی‌اند، بنابراین فاصله دو خط موازی برابر قطر دایره است.

$$S = \frac{16\pi}{13} = \pi R^2 \Rightarrow \frac{16}{13} = R^2 \xrightarrow{R>0} R = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \text{طول قطر} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

$$d = \frac{|k-5|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|k-5|}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow |k-5| = 8 \Rightarrow \begin{cases} k-5 = 8 \Rightarrow k = 13 \\ k-5 = -8 \Rightarrow k = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } = 13 - 3 = 10$$

۱۶) دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع ABCD روی دو خط $4x + ky = 2$ و $8x + 6y = 6$ قرار دارند. اگر نقاط A و B محل‌های برخورد خط $8x + 6y = 6$ با محورهای مختصات باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{13}{10}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$8x + 6y = 6 \Rightarrow m = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$4x + ky = 2 \Rightarrow m' = -\frac{4}{k}$$

دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع با هم موازیند، پس:

$$m = m' \Rightarrow k = 3$$

$$\xrightarrow{x=0} 8x + 6y = 6 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{y=0} 8x + 6y = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

فاصله دو خط موازی برابر اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AB است. بنابراین:

$$8x + 6y = 6 \xrightarrow{\div 2} 4x + 3y = 3, 4x + 3y = 2$$

$$\Rightarrow h = \frac{|3-2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت متوازی الاضلاع} = h \times AB = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۷) در مستطیل ABCD داریم $A(6, -22)$, $B(2006, 178)$ و $D(8, y)$ محیط مستطیل چند برابر $\sqrt{101}$ است؟

۴۰۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۲۰۲ (۲)

۴۰۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

شیب خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB} = \frac{178 - (-22)}{2006 - 6} = \frac{1}{10}$$

خط AD بر خط AB عمود است، بنابراین شیب آن (-10) است. پس:

$$m_{AD} = \frac{y - (-22)}{8 - 6} = -10 \Rightarrow y = -10(2) - 22 = -42$$

$$\Rightarrow D(8, -42)$$

$$AB = \sqrt{(2006 - 6)^2 + (178 + 22)^2} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$= \sqrt{2000^2 + 200^2} = 200\sqrt{101}$$

$$AD = \sqrt{(8 - 6)^2 + (-42 + 22)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 20^2} = 2\sqrt{101}$$

$$\text{محیط} = 2(AB + AD) = 404\sqrt{101}$$

۱۸) اگر خطوط $(K-1)x - 2y = 6$ و $2x - (K-1)y = 4$ دو ضلع غیرموازی یک مستطیل باشند و مبدأ مختصات یک رأس مستطیل باشد، آن‌گاه مساحت مستطیل کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

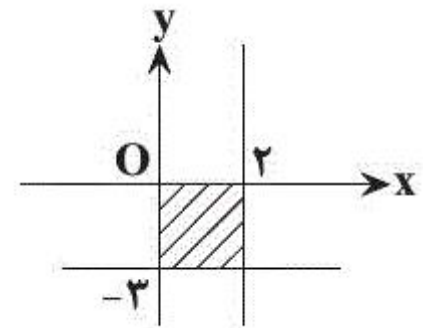
۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

شیب دو ضلع را به دست می‌آوریم برای دو خط عمود غیرموازی با محورهای مختصات باید $m_1 m_2 = -1$ باشد. $m_1 = \frac{2}{k-1}$, $m_2 = \frac{k-1}{2}$
 دو خط بر هم عمود نمی‌شوند مگر آنکه $K = 1$ باشد که در نتیجه $y = -3$ و $x = 2$ معادله دو ضلع مستطیل خواهند شد. از طرفی مبدأ مختصات یک رأس مستطیل است، بنابراین داریم:

$6 = 2 \times 3$: مساحت مستطیل



۱۹) دایره‌ای که مرکز آن روی خط $y = x - 1$ قرار دارد، بر دو خط $y = \frac{-3}{4}x$ و $3x + 4y = 6$ مماس است. فاصله مرکز دایره تا مبدأ مختصات کدام است؟

۲ (۴)

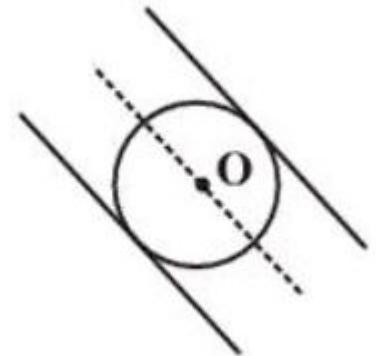
$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مرکز دایره روی خط $y = x - 1$ است، پس مختصات آن را به صورت $O(d, d - 1)$ در نظر می‌گیریم. از طرفی مرکز دایره روی خط وسط دو خط موازی قرار دارد:



$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \Rightarrow 4y + 3x = 0 \\ 3x + 4y = 6 \Rightarrow 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

معادله خط وسط
 $\longrightarrow 4y + 3x = \frac{0+6}{2} \Rightarrow 4y + 3x = 3$

حال مختصات مرکز دایره را در معادله خط وسط قرار می‌دهیم:

$$4y + 3x = 3 \xrightarrow{O(d, d-1)} 4(d-1) + 3d = 3$$

$$\Rightarrow 4d - 4 + 3d = 3 \Rightarrow 7d = 7 \Rightarrow d = 1 \xrightarrow{O(d, d-1)} O(1, 0)$$

پس فاصله مرکز دایره تا مبدأ مختصات برابر ۱ است.

۲۰) اگر معادله دو قطر یک مربع به صورت $(a+1)y+x=5$ و $y-2ax=b$ و نقطه $A(-2, 1)$ یک رأس این مربع باشد، مساحت این مربع کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دو قطر مربع بر هم عمودند، پس:

$$\left. \begin{aligned} (a+1)y+x=5 &\Rightarrow m=\frac{-1}{a+1} \\ y-2ax=b &\Rightarrow m'=-2a \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow mm'=-1 \Rightarrow \frac{-1}{a+1} \times -2a = -1 \Rightarrow a+1=2a \Rightarrow a=1$$

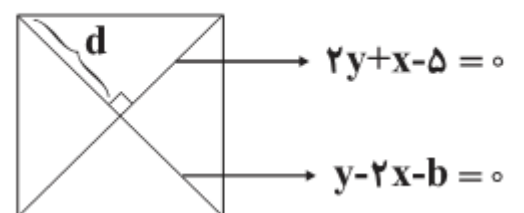
با جای گذاری $a=1$ ، معادله دو قطر به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{cases} 2y+x-5=0 \\ y-2x-b=0 \end{cases}$$

رأس $A(-2, 1)$ در معادله $2y+x-5=0$ صدق نمی کند، پس روی قطر دیگر یعنی $y-2x-b=0$ قرار دارد.

$$1-2(-2)-b=0 \Rightarrow b=5$$

$A(-2, 1)$



فاصله $A(-2, 1)$ را از قطر $2y+x-5=0$ حساب می کنیم:

$$\text{فاصله} = d = \frac{|2(1)+(-2)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5}$$

پس مساحت مربع برابر است با:

$$S = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

۲۱) نقطه $P(4m, 11)$ روی عمودمنصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, m)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد. m کدام می تواند باشد؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

طبق تعریف عمودمنصف، باید فاصله نقطه P از نقاط A و B یکسان باشد.

$$|AP| = |BP|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(4m-0)^2 + (11-m)^2} = \sqrt{(4m-6)^2 + (11-15)^2}$$

$$\Rightarrow 16m^2 + (11)^2 - 22m + m^2 = 16m^2 - 48m + 36 + 16$$

$$\Rightarrow m^2 + 26m + 69 = 0 \Rightarrow (m+3)(m+23) = 0 \Rightarrow m = -3 \quad \text{یا} \quad -23$$

۲۲) طول وتری که خط $y = 2x - 6$ در دایره‌ای به مرکز $(2, 3)$ و شعاع ۳ ایجاد می‌کند، کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳)

۸ (۲)

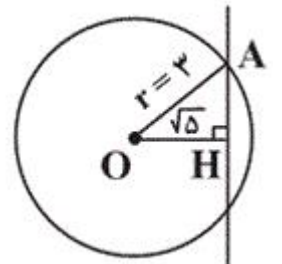
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا باید فاصله نقطه $(2, 3)$ را از خط $y = 2x - 6$ به دست آوریم:

$$OH = \frac{|3 - 2(2) + 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

چون $\sqrt{5} < 3$ ، بنابراین خط در دایره وتر ایجاد می‌کند. با توجه به شکل، اندازه AH را با استفاده از فیثاغورس به دست می‌آوریم:

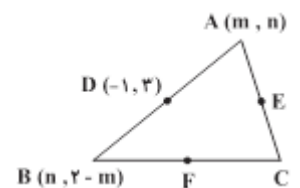


$$AH^2 = OA^2 - OH^2$$

$$AH^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 \Rightarrow AH = 2$$

طول وتر مورد نظر $2AH = 4$ است.

۲۳) در شکل زیر، نقاط D, E و F وسط‌های اضلاع مثلث ABC می‌باشند. با توجه به مقادیر مشخص شده، طول EF کدام است؟



$4\sqrt{2}$ (۱)

۴ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

از آنجایی که نقطه D وسط AB است، داریم:

$$A + B = 2D \Rightarrow \begin{cases} m + n = 2(-1) \\ n + 2 - m = 2(2) \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = 1$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} A(m, n) = A(-3, 1) \\ B(n, 2 - m) = B(1, 5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

از طرفی می‌دانیم در یک مثلث طول پاره‌خط واصل بین وسط‌های دو ضلع برابر با نصف طول ضلع دیگر مثلث است، به عبارتی:

$$EF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow EF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۲۴) معادله قطرهای یک دایره $mx + (m - 1)y = m + 2$ است. اگر این دایره بر خط $3x - 4y - 2 = 0$ مماس باشد، شعاع دایره کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

معادله قطرهای دایره:

$$mx + (m - 1)y = m + 2$$

$$\begin{cases} m = 0 \Rightarrow -y = 2 \\ m = 1 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره } C(3, -2)$$

فاصله مرکز دایره از خط $3x - 4y - 2 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|9 + 8 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

۲۵) شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(1, 2)$ و $(3, 0)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارد، کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

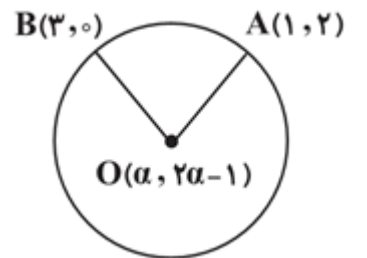
$\sqrt{10}$ (۳)

۳ (۲)

$\sqrt{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر مرکز دایره باشد، فاصله آن از هر دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ یکسان و برابر با شعاع دایره است. بنابراین داریم:



$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha + 4\alpha^2 + 9 - 12\alpha = \alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha^2 + 1 - 4\alpha$$

$$\Rightarrow -14\alpha = -10\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow O(0, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}$$