نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۱ هندسه مختصاتی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۱/۳۰

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

۱) معادلات اضلاع مثلث ABC هستند. معادلهٔ خطی که ارتفاع AH بر آن منطبق است از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟ $AB : 3x+y=2$، $AC : 2x+y=-1$ و $BC : x+2y=1$

۱) $(2 , 8)$ **۲)** $(-3 , 6)$ **۳)** $(3 , 5)$ **۴)** $(-5 , 4)$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

ابتدا نقطهٔ A را پیدا می‌کنیم:

$AB : 3x + y = 2$

$AC : 2x + y = -1 \Rightarrow x = 3 , y = -7 \Rightarrow A(3, -7)$

$BC : x + 2y = 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow AH$ شیب خط $= 2$

معادلهٔ ارتفاع AH: $y - (-7) = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 13$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(-5, 4)$ در معادلهٔ خط AH صدق می‌کند.

۲) خطوط موازی و غیرمنطبق $D : 3x + 4y = 7$ و D' بر دایرهٔ C به شعاع ۲ مماس‌اند. عرض از مبدأ خط D' کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{7}{3}$ **۲)** $\frac{7}{3}$
۳) $-\frac{13}{4}$ **۴)** $-\frac{13}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

چون خط D' موازی خط D است، معادله آن را به صورت $D' : 3x + 4y + k = 0$ در نظر می‌گیریم.

از طرفی فاصلهٔ دو خط نیز برابر قطر دایره است:

$$2R = 4 = \frac{|k+7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|k+7|}{5} \Rightarrow |k + 7| = 20$$

$$\Rightarrow k + 7 = \pm 20 \Rightarrow k = -27 \text{ یا } K = 13$$

عرض از مبدأ D' برابر $-\frac{k}{4}$ است. بنابراین این مقدار می‌تواند $-\frac{13}{4}$ یا $\frac{27}{4}$ باشد.

③ دو ضلع مستطیل ABCD روی نمودار تابع $y = |x - ۱|$ قرار دارد. اگر مختصات رأس A به صورت $A(۲,۲)$ باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۲
۴) ۱

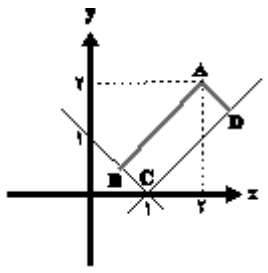
پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ضابطه‌های تابع $y = |x - ۱|$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$y = |x - ۱| = \begin{cases} -x + ۱; x < ۱ \\ x - ۱; x \geq ۱ \end{cases}$$

که نمودار آن به همراه نقطهٔ A در شکل زیر رسم شده است:



واضح است که طول اضلاع مستطیل برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ A از شاخه‌های نمودار تابع $y = |x - ۱|$. پس داریم:

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD = \frac{۳}{۲} \quad \begin{cases} AB = \frac{|۲ + ۲ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \\ AD = \frac{|۲ - ۲ + ۱|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

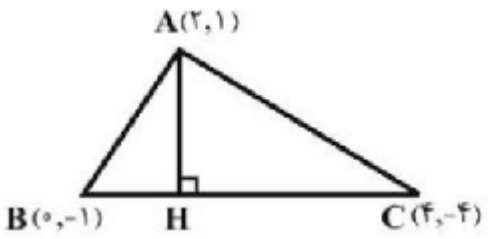
④ نقاط $A(۲,۱)$ و $B(۰,-۱)$ و $C(۴,-۴)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر مختصات پای ارتفاع وارد بر ضلع BC به‌صورت (a,b) باشد، حاصل $۲۵(a+b)$ کدام است؟

۱) -۲۳ **۲)** -۳۱

۳) -۱۷ **۴)** -۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»



کافی است معادلات ضلع BC و ارتفاع AH را نوشته و قطع بدهیم تا مختصات نقطهٔ H بدست آید:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-۴-(-۱)}{۴-۰} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\text{معادلهٔ ضلع BC} : y + ۱ = -\frac{۳}{۴}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{-۳}{۴}x - ۱$$

$$\text{شیب ارتفاع AH} = -\frac{۱}{m_{BC}} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \text{معادله ارتفاع AH} \quad (x - ۲) = \frac{۴}{۳} - ۱$$

$$\Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۸}{۳} + ۱ \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۵}{۳}$$

معادلهٔ دو خط را با هم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = -\frac{۳}{۴}x - ۱ \\ y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۵}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{قطع}} -\frac{۳}{۴}x - ۱ = \frac{۴}{۳}x - \frac{۵}{۳}$$

$$x_H = \frac{۸}{۲۵} \xrightarrow{y=-\frac{۳}{۴}x-۱} y_H = -\frac{۶}{۲۵} - ۱ = -\frac{۳۱}{۲۵}$$

پس مختصات نقطهٔ H به صورت $H(\frac{۸}{۲۵}, -\frac{۳۱}{۲۵})$ است.

$$\Rightarrow ۲۵(a+b) = ۲۵(\frac{۸}{۲۵} - \frac{۳۱}{۲۵}) = ۲۵(-\frac{۲۳}{۲۵}) = -۲۳$$

⑤ اگر نقاط $A(۲,۳)$، $B(۵,-۱)$ و $C(۱,۱)$ رأس‌های یک مثلث باشند، معادلهٔ خطی که میانهٔ AM روی آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y = -۳x + ۹$ **۲)** $y = -\frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۲}$

۳) $y = -۳x + ۳$ **۴)** $y = -\frac{۳}{۲}x + ۶$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC را به‌دست می‌آوریم، سپس معادلهٔ خط گذرنده از A و M را می‌نویسیم:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{۵+۱}{۲} \\ \frac{۱-۱}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$m_{AM} = \frac{۰-۳}{۳-۲} = -۳$$

$$y - ۰ = -۳(x - ۳) \Rightarrow y = -۳x + ۹$$

۹۱. **نقاط $M(-۱,-۲)$، $N(۳,۴)$ و $P(-۲,-۴)$ به‌ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB، AC و BC از مثلث ABC هستند. معادلهٔ خطی که ضلع AC روی آن قرار دارد، کدام است؟**

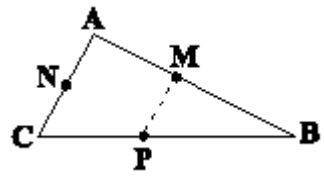
۱) $۲y - x = ۵$
۲) $y - ۲x = -۲$
۳) $۲y + x = -۵$
۴) $y + ۲x = ۵$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با توجه به عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که خط MP موازی ضلع AC است، پس شیب‌های برابر دارند. پس:

$$m_{AC} = m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{-۴-(-۲)}{-۲-(-۱)} = \frac{-۲}{-۱} = ۲$$



همچنین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ N گذشته و شیب آن برابر ۲ است، برابر است با:

$$y - y_N = m(x - x_N) \Rightarrow y - ۴ = ۲(x - ۳)$$
$$\Rightarrow y - ۴ = ۲x - ۶ \Rightarrow y - ۲x = -۲$$

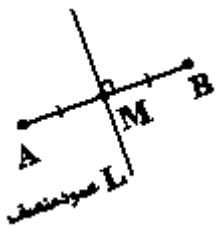
۹۲. نقاط $A(-۵,-۲)$ و $B(۳,۶)$ دو سر یک پاره‌خط می‌باشند. کدام‌یک از نقاط زیر از دو سر پاره‌خط AB به فاصلهٔ یکسان قرار دارد؟

۱) $(۳,۵)$
۲) $(-۲,-۱)$
۳) $(۷,-۵)$
۴) $(-۳,۴)$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

نکتهٔ مهم: تمامی نقاط موجود روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره‌خط به فاصله یکسان قرار دارند.



$$m_{AB} = \frac{۶-(-۲)}{۳-(-۵)} = ۱ \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m_L = -۱$$

$$x_M = \frac{-۵ + ۳}{۲} = -۱$$
$$y_M = \frac{-۲ + ۶}{۲} = ۲$$

معادلهٔ خط L : $y - ۲ = -۱(x + ۱) \Rightarrow y = -x + ۱$

با توجه به گزینه‌ها تنها مختصات نقطهٔ $(-۳,۴)$ در این خط صدق می‌کند.

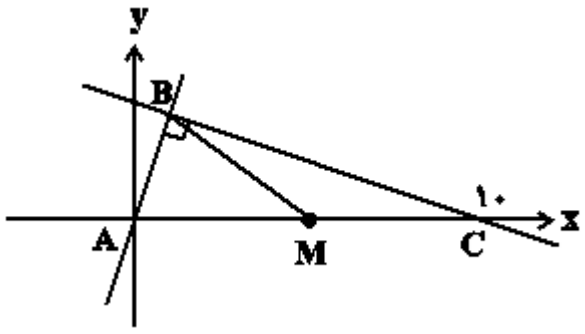
⑧ دو خط AB : $y = ۳x$، BC : $۳y + x = ۱۰$ و محورxها، معادلات اضلاع مثلث ABC هستند. معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟

۱) $y = \frac{۳}{۴}(x + ۵)$
۲) $y = -\frac{۳}{۴}(x + ۵)$
۳) $y = -\frac{۳}{۴}(x - ۵)$
۴) $y = \frac{۳}{۴}(x - ۵)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

ابتدا مثلث را رسم می‌کنیم؛ دقت کنید $AB \perp BC$ است. میانه BM خطی است که از وسط ضلع AC یعنی $M(۵\ ,\ ۰)$ می‌گذرد.



برای محاسبه B دو خط AB و BC را تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y - ۳x = ۰ \\ ۳y + x = ۱۰ \end{cases} \times(۳)$$

$$\Rightarrow \text{مختصات B} \quad y = ۳\ ,\ x = ۱$$

معادله BM: $y - ۰ = \frac{۳-۰}{۱-۵}(x - ۵)$

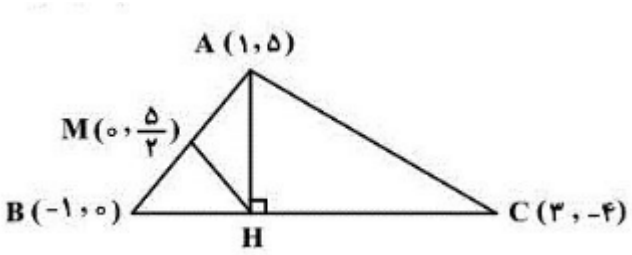
$$y = -\frac{۳}{۴}(x - ۵)$$

⑨ در مثلث ABC با رئوس $A(۵ , ۱)$، $B(-۱ , ۰)$ و $C(۳ , -۴)$، فاصله بین پای ارتفاع AH و نقطه میانی ضلع AB کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$ **۲)** $\frac{\sqrt{۲۹}}{۴}$ **۳)** $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$ **۴)** $\frac{۴}{\sqrt{۲۹}}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-۴}{۳+۱} = -۱$: شیب ضلع BC

معادله BC: $y = -x + h \xrightarrow{B(-۱ , ۰)} ۰ = ۱ + h \Rightarrow h = -۱$

$\Rightarrow BC : y = -x - ۱$

معادله ارتفاع AH: $y = \frac{-۱}{m_{BC}}x + h' = x + h'$

$\xrightarrow{A(۱ , ۵)} ۵ = ۱ + h' \Rightarrow h' = ۴ \Rightarrow y = x + ۴$

نقطه H: $(-\frac{۵}{۲} , \frac{۳}{۲})$ $\xrightarrow{\text{تلاقی AH و BC}}$

وسط ضلع AB: $M(\frac{-۱+۱}{۲} , \frac{۵+۰}{۲}) = (۰ , \frac{۵}{۲})$

$\Rightarrow MH = \sqrt{(-\frac{۵}{۲} - ۰)^{۲} + (\frac{۳}{۲} - \frac{۵}{۲})^{۲}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴} + ۱} = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$

⑩ نقطه $A(-۱ , ۱)$ یک رأس و AB یک ضلع مربع هستند. اگر معادله یک قطر مربع $y + ۲ = ۲x$ باشد، مختصات رأس B کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۳ , -۱)$ **۲)** $(۱ , ۰)$ **۳)** $(۲ , ۲)$ **۴)** $(۲ , ۰)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

توجه کنید نقطه A روی قطر داده شده قرار ندارد.

اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم فاصله نقطه A تا قطر برابر $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ خواهد بود. نقطه B را با مختصات مجهول روی قطر مورد نظر فرض می‌کنیم $(\alpha , ۲\alpha - ۲)$ که فاصله آن تا نقطه A برابر a خواهد بود.

$$\frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{|۱+۲-۲(-۱)|}{\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}}} \Rightarrow a = \sqrt{۱۰}$$

$$|AB| = a = \sqrt{(\alpha + ۱)^{۲} + (۲\alpha - ۳)^{۲}} = \sqrt{۱۰}$$

$$۵\alpha^{۲} - ۱۰\alpha + ۱۰ = ۱۰ \Rightarrow ۵\alpha(\alpha - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha = ۰ , ۲ \Rightarrow B(۰ , -۲) \text{ یا } B(۲ , ۲)$$

⑪ نقاط $A(۱ , ۰)$، $B(۴ , ۲)$ و $C(۳ , -۳)$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند، در مورد مثلث ABC می‌توان گفت که ...

۱) متساوی‌الساقین است، قائم‌الزاویه نمی‌باشد.

۲) متساوی‌الاضلاع است.

۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۴) قائم‌الزاویه است ولی متساوی الساقین نیست.

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{matrix} A(۱ , ۰) \\ B(۴ , ۲) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(۴-۱)^{۲} + (۲-۰)^{۲}} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

$$\left.\begin{matrix} A(۱ , ۰) \\ C(۳ , -۳) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC = \sqrt{(۳-۱)^{۲} + (-۳-۰)^{۲}} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$\left.\begin{matrix} B(۴ , ۲) \\ C(۳ , -۳) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC = \sqrt{(۳-۴)^{۲} + (-۳-۲)^{۲}} = \sqrt{۱+۲۵} = \sqrt{۲۶}$$

متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow AB = AC = \sqrt{۱۳}$

بررسی شرط قائم‌الزاویه : $AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲}$

در رأس A قائم‌الزاویه است. $\Rightarrow (\sqrt{۱۳})^{۲} + (\sqrt{۱۳})^{۲} = (\sqrt{۲۶})^{۲}$

⑫ خط $۴x + ۳y = ۵$ بر دایره C به مرکز $O(a , ۲)$ مماس است. اگر مساحت دایره $\frac{۹\pi}{۲۵}$ باشد، مقدار صحیح a کدام است؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** -۱ **۴)** ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، شعاع دایره می‌باشد. از طرفی چون مساحت دایره به شعاع r برابر $\pi r^{۲}$ می‌باشد، پس:

$$\pi r^{۲} = \frac{۹\pi}{۲۵} \Rightarrow r^{۲} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow r = \frac{۳}{۵}$$

فاصله مرکز تا خط مماس بر دایره : $\frac{|۴a+۳(۲)-۵|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}} = \frac{۳}{۵}$

$$\Rightarrow \frac{|۴a+۱|}{۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow |۴a+۱| = ۳$$

$$\Rightarrow ۴a+۱ = ۳ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \quad , \quad ۴a+۱ = -۳ \Rightarrow a = -۱$$

پس مقدار صحیح a برابر ۱- می‌باشد.

⑬ اگر خطوط $y = (k+۲)x + ۳$ و $ky - x - ۵ = ۰$ معادلات قطرهای یک مربع باشند، فاصلهٔ نقطه تلاقی دو قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۵}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $\sqrt{۱۸}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

قطرهای مربع بر هم عمودند، پس شیب قطرها قرینه معکوس هم هستند.

$$\begin{cases} y = (k+۲)x + ۳ \Rightarrow m = k+۲ \\ ky - x - ۵ = ۰ \Rightarrow m' = \frac{۱}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m'm = -۱ \text{ شرط عمود بودن}) \Rightarrow \frac{k+۲}{k} = -۱$$

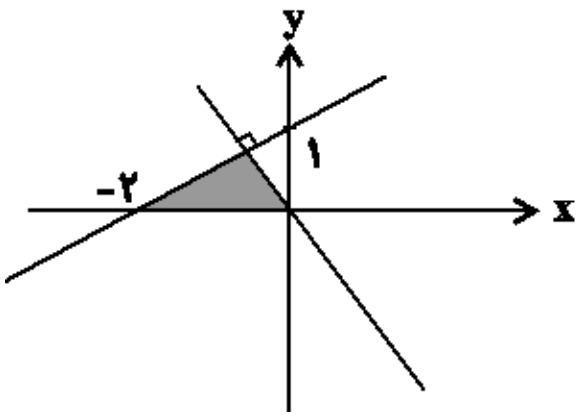
$$\Rightarrow k + ۲ = -k \Rightarrow k = -۱$$

حال با معلوم بودن K ، معادلات دو خط را نوشته و آن‌ها را با هم تلاقی می‌دهیم.

$$k = -۱ \Rightarrow \begin{cases} y = x + ۳ \\ -y - x - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = -۴, y = -۱$$

$$A\begin{vmatrix} -۴ \\ -۱ \end{vmatrix}, O\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} \Rightarrow AO = \sqrt{(-۴)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

(۱۴) در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟

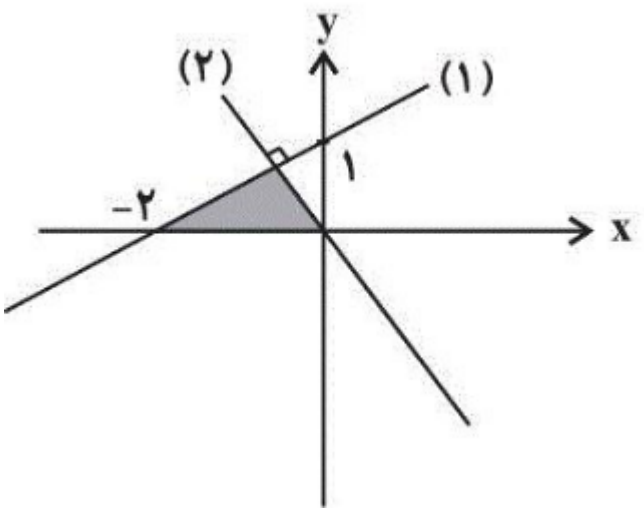


۱) ۰/۶
۲) ۰/۸
۳) ۱
۴) ۱/۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

برای به‌دست آوردن مساحت مثلث هاشورخورده ابتدا باید عرض نقطهٔ برخورد دو خط را به‌دست آوریم تا ارتفاع مثلث مشخص شود. نقاط $(۰,۱)$ و $(-۲,۰)$ روی خط (۱) قرار دارند. معادلهٔ خط (۱) عبارت است از:



$$\text{شیب خط (۱)} : m = \frac{۱-۰}{۰-(-۲)} = \frac{۱}{۲}$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \xrightarrow{(۰,۱)} y - ۱ = \frac{۱}{۲}(x - ۰)$$

$$\text{معادلهٔ خط (۱)} : y_۱ = \frac{۱}{۲}x + ۱$$

دو خط (۱) و (۲) برهم عمودند، لذا شیب‌خط (۲) قرینهٔ معکوس شیب‌خط (۱) است. همچنین خط (۲) از مبدأ مختصات می‌گذرد، لذا معادلهٔ آن عبارت است از: $y_۲ = -۲x$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تقاطع دو خط}} y_۱ = y_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x + ۱ = -۲x$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x + ۲x = -۱ \Rightarrow \frac{۵}{۲}x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۲}{۵}$$

عرض نقطهٔ برخورد دو خط = ارتفاع مثلث هاشورخورده

$$\Rightarrow y = -۲ \times (-\frac{۲}{۵}) = \frac{۴}{۵}$$

$$\text{مساحت مثلث هاشورخورده} : S = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \frac{۴}{۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

⑮ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۱ , ۰)$ و $(۰ , ۳)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به صورت $x - y = ۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادلهٔ $x - y = ۲$، قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را بصورت $\omega(\beta + ۲ , \beta)$ در نظر بگیریم. فاصلهٔ مرکز دایره از هر نقطهٔ دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطهٔ $A(۰,۱)$ و $B(۳ , ۰)$ بر این دایره واقعند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + ۲ - ۰)^{۲} + (\beta - ۱)^{۲}} = \sqrt{(\beta + ۲ - ۳)^{۲} + (\beta - ۰)^{۲}}$$
$$\Rightarrow (\beta + ۲)^{۲} + (\beta - ۱)^{۲} = (\beta - ۱)^{۲} + \beta^{۲} \Rightarrow (\beta + ۲)^{۲} = \beta^{۲}$$
$$\Rightarrow \beta^{۲} + ۴\beta + ۴ = \beta^{۲} \Rightarrow ۴\beta + ۴ = ۰ \Rightarrow \beta = -۱$$

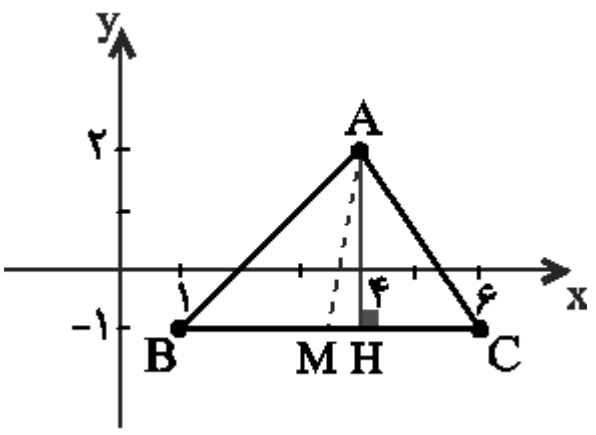
$$\Rightarrow R = \sqrt{(-۱ + ۲)^{۲} + (-۱ - ۱)^{۲}} = \sqrt{۵}$$

⑯ نقاط $A(۴ , ۲)$، $B(۱ , -۱)$ و $C(۶ , -۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر AH، ارتفاع و AM، میانه وارد بر ضلع BC باشند، طول MH چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»



با توجه به شکل، از آنجا که نقاط B و C هم‌عرض هستند و روی یک خط افقی قرار دارند، مختصات پای ارتفاع H به‌صورت $H(۴ , -۱)$ است.

از طرفی M وسط پاره‌خط BC است، بنابراین:

$$M \left| \begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۱+۶}{۲} = \frac{۷}{۲} \\ \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{-۱+(-۱)}{۲} = -۱ \end{array} \right.$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌عرض $H(۴ , -۱)$ و $M(\frac{۷}{۲} , -۱)$ برابر است با:

$$MH = |x_H - x_M| = |۴ - \frac{۷}{۲}| = \frac{۱}{۲}$$

⑰ نقاط $A(۰,۳)$، $B(۲,۰)$ و $C(۱,۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

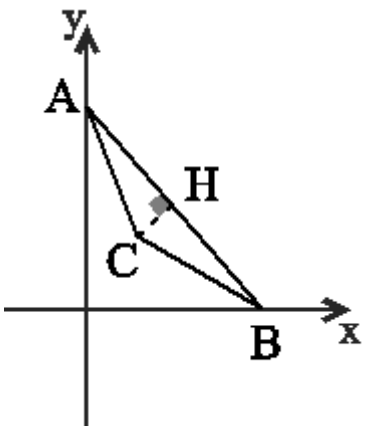
۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

شکلی از مسأله رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، معادلهٔ AB را می‌یابیم. سپس فاصلهٔ نقطهٔ C را از آن به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} A(۰,۳) \\ B(۲,۰) \end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ خط } AB : y - ۰ = \frac{۳-۰}{۰-۲}(x-۲)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}(x-۲) \Rightarrow ۲y = -۳x + ۶$$

فاصلهٔ رأس $C(۱,۱)$ را از این ضلع می‌یابیم:

$$\begin{cases} AB \text{ معادله} : ۲y + ۳x - ۶ = ۰ \\ C(۱,۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{|۲(۱)+۳(۱)-۶|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

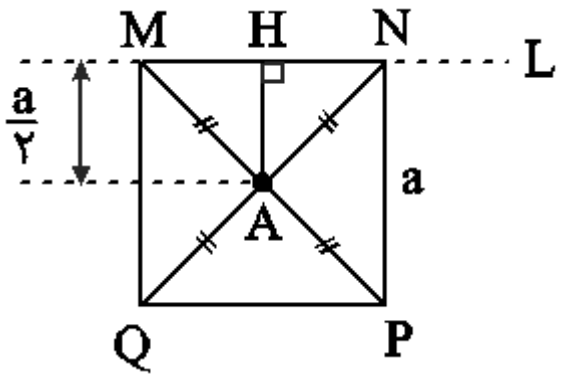
⑱ نقطهٔ $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $۲y - x = ۵$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم. همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود، فاصلهٔ وسط قطر مربع از هر ضلع آن، برابر با نصف طول ضلع مربع است.



پس در این سؤال اگر طول ضلع مربع را a بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} L : ۲y - x - ۵ = ۰ \\ A(۳,-۱) \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{a}{۲} = \frac{|۲y_A - x_A - ۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{|-۲-۳-۵|}{\sqrt{۵}} \Rightarrow a = \frac{۲۰}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مربع} : S = a^۲ = \frac{۴۰۰}{۵} = ۸۰$$

⑲ نقاط$A(-۵,-۲)$ و$B(۳,۶)$ دو سر یک پاره خط می‌باشند. کدام‌یک از نقاط زیر از دو سر پاره خط A وB به فاصلهٔ یکسان قرار دارد؟

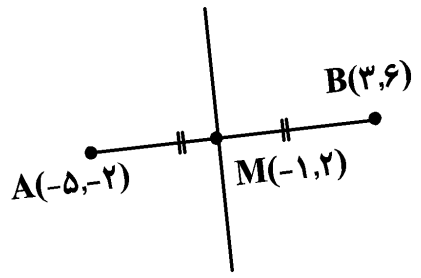
۱) $(\sqrt{۲}+۲,-\sqrt{۲}-۳)$ **۲)** $(۲\sqrt{۲},\sqrt{۲}+۱)$

۳) $(۱-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ **۴)** $(\sqrt{۲}+۳,-\sqrt{۲}-۳)$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

تمامی نقاطی که روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار دارند، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند پس معادلهٔ عمودمنصف را به‌دست می‌آوریم:



$$M(\frac{-۵+۳}{۲}, \frac{-۲+۶}{۲}) = M(-۱, ۲)$$

$$m_{AB} = \frac{۶-(-۲)}{۳-(-۵)} = \frac{۸}{۸} = ۱$$

$$\xrightarrow[\text{عادله خط عمودمنصف}]{(-۱,۲)} m' = -۱ \Rightarrow \text{قرینه و معکوس برای شیب عمودمنصف}$$

$$y - ۲ = -۱(x + ۱) \Rightarrow y = -x - ۱ + ۲$$
$$\Rightarrow y = -x + ۱$$

تنها گزینهٔ «۳» یعنی نقطهٔ $(\sqrt{۲}, \sqrt{۲} - ۱)$ در معادلهٔ این خط صدق می‌کند.

⑳ خطوط به معادلات $y - ۴ = ۰$ و $x = \frac{y}{۲} + ۳$ از دو ضلع متوازی‌الاضلاعی می‌گذرند و مختصات دو رأس متوازی‌الاضلاع نقاط$A(۲,۴)$ و$B(۱,۲)$ می‌باشد. مختصات نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲},۳)$ **۲)** $(۲,۲)$ **۳)** $(۳,۳)$ **۴)** $(\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲})$

پاسخ: گزینه ۳

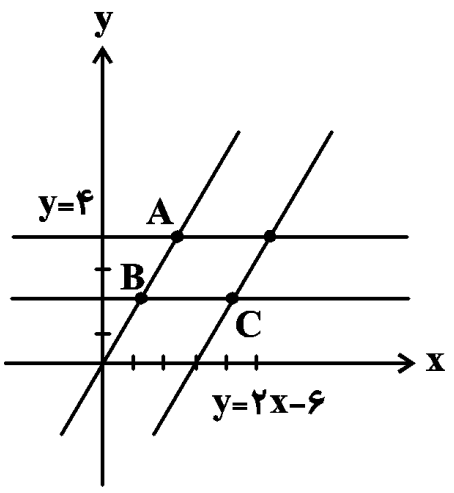
گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} y - ۴ = ۰ \rightarrow y = ۴ \\ x = \frac{y}{۲} + ۳ \rightarrow y = ۲x - ۶ \end{cases}$$

مطابق شکل زیر معادلهٔ یک ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع باید خط $y = ۲$ باشد. در این‌صورت مختصات نقطهٔ C برابر است با:

$$y = ۲ \rightarrow ۲ = ۲x - ۶ \rightarrow x = ۴ \rightarrow C(۴,۲)$$

$$\text{محل برخورد قطرها} = \text{وسط } AC = (\frac{۴+۲}{۲}, \frac{۲+۴}{۲}) = (۳,۳)$$



(۲۱) نقطه‌ی (۶,۸) رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن بر دو خط به معادله‌های $y = ۳x$ و $۶y + ۲x = ۴۰$ واقع هستند. مختصات نقطه‌ی تلاقی قطرهای این مستطیل کدام است؟

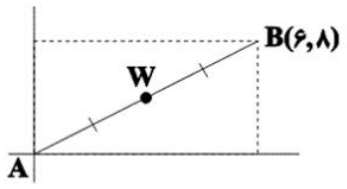
۱) (۵,۳)　　**۲)** (۲,۷)

۳) (۴,۷)　　**۴)** (۳,۵)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه«۳»

با دقت در معادله دو خط داده شده و شیب آن‌ها، متوجه می‌شویم دو خط بر هم عمودند (حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها (۱-) است) و از طرفی نقطه داده شده در هیچ یک از آن‌ها صدق نمی‌کند. پس می‌توان شکل فرضی مطلوب سوال را به صورت زیر رسم کرد:

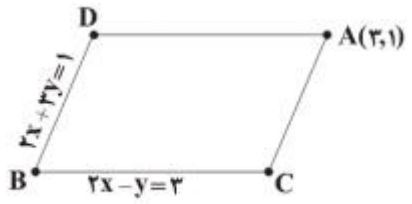


$$\begin{cases} y = ۳x \\ ۶y + ۲x = ۴۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} A(۲,۶)$$

نقطه تقاطع قطرهای مستطیل، وسط AB است که مختصات ان برابر است با:

$$\begin{cases} x_W = \frac{۲+۶}{۲} = ۴ \\ y_W = \frac{۶+۸}{۲} = ۷ \end{cases}$$

(۲۲) در متوازی‌الاضلاع روبه‌رو، عرض نقطه D کدام است؟(خطوط فرضی‌اند.)



۱) ۱-
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه(۱)

برای به‌دست آوردن عرض نقطه D باید معادله خط AD را به‌دست آوریم و سپس مختصات نقطه تلاقی خطوط AD و BD را محاسبه می‌کنیم.
چون خط BC با AD موازی است لذا شیب‌هایشان برابر است، پس برای نوشتن معادله خط AD داریم: $m_{AD} = ۲$ ⇒ شیب خط AD =۲ =شیب خط BC

معادله خط AD با شیب $m = ۲$ و نقطه $A|_{۱}^{۳}$:

$$y - ۱ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y - ۲x = -۵$$

نقطه D محل تلاقی خطوط BDو DAبا یکدیگر است:

$$\begin{cases} y-۲x=-۵ \\ ۳y+۲x=۱ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴y=-۴ \Rightarrow y = -۱$$

(۲۳) معادله‌های دو ضلع موازی یک مربع به صورت $mx - (m+۲)y = ۴$ و $۲x - ۶y = k$ است. اگر مساحت این مربع ۱۰ باشد، مقدار مثبت k کدام است؟

۱) ۲۲
۲) ۲۴
۳) ۲۶
۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

چون دو خط موازی‌اند، داریم:

$$\frac{m}{۲} = \frac{-(m+۲)}{-۶} \Rightarrow ۶m = ۲m + ۴ \Rightarrow m = ۱$$

با جای‌گذاری $m = ۱$ ، معادله خط اول به صورت $x - ۳y = ۴$ در می‌آید که می‌توانیم آن را به صورت $۲x - ۶y = ۸$ بنویسیم.

فاصله دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ برابر با $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است. پس فاصله دو خط موازی $۲x - ۶y = ۸$ و $۲x - ۶y = k$ برابر است با:

$$\text{ضلع مربع} = \frac{|k-۸|}{\sqrt{۴+۳۶}} \Rightarrow \sqrt{۱۰} = \frac{|k-۸|}{۲\sqrt{۱۰}}$$

$$\Rightarrow |k - ۸| = ۲۰ \Rightarrow \begin{cases} k - ۸ = ۲۰ \Rightarrow k = ۲۸ \\ k - ۸ = -۲۰ \Rightarrow k = -۱۲ \end{cases}$$

(۲۴) سه نقطه A(۴ , ۳)، B(۲- , ۱) و C(۱ , ۱-) رئوس مثلث ABC است. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله خط BC را می‌نویسیم، سپس فاصله نقطه A از این خط یعنی طول ارتفاع وارد بر BC را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{۱-(-۱)}{-۲-۱} = -\frac{۲}{۳}$$

$$BC : y - ۱ = -\frac{۲}{۳}(x + ۲) \Rightarrow ۳y - ۳ = -۲x - ۴ \Rightarrow ۳y + ۲x + ۱ = ۰$$

$$AH = \frac{|۳(۳)+۲(۴)+۱|}{\sqrt{۹+۴}} = \frac{۱۸}{\sqrt{۱۳}}$$

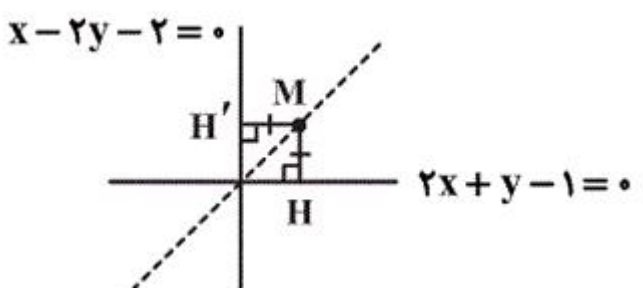
$$BC = \sqrt{(۱+۱)^{۲} + (-۲-۱)^{۲}} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AH \cdot BC}{۲} = \frac{\frac{۱۸}{\sqrt{۱۳}} \times \sqrt{۱۳}}{۲} = \frac{۱۸}{۲} = ۹$$

(۲۵) عرض از مبدأ خطی با شیب مثبت که نیمساز زاویه بین دو خط $۲x + y = ۱$ و $x - ۲y = ۲$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۴



هر دو خط متقاطع یک نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی دارند و می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز دو خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. پس فرض می‌کنیم M(x , y) روی نیمساز دو خط متقاطع باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} ۲x + y - ۱ = ۰ \\ x - ۲y - ۲ = ۰ \end{cases}$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|۲x+y-۱|}{\sqrt{۵}} = \frac{|x-۲y-۲|}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow |۲x + y - ۱| = |x - ۲y - ۲| \Rightarrow \begin{cases} ۲x + y - ۱ = x - ۲y - ۲ \\ ۲x + y - ۱ = -x + ۲y + ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۳y + ۱ = ۰ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x - \frac{۱}{۳} & m_۱ = -\frac{۱}{۳} < ۰ \times \\ ۳x - y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = ۳x - ۳ & m_۲ = ۳ > ۰ \checkmark \end{cases}$$

پس خط مطلوب $y = ۳x - ۳$ است و عرض از مبدأ آن ۳- است.