



۱) سه نقطه $(-1, 2)$ ، $(-2, 1)$ و $(2, -1)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. فاصله وسط وتر این مثلث تا خط $x + 2y - 4 = 0$ کدام است؟

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۴)

$3\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا رأس قائم مثلث را پیدا می‌کنیم تا وتر آن مشخص شود، برای این منظور داریم:

$$C(2, -1), B(-2, 1), A(-1, 2)$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} = 1 \\ m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m_{AC} = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases}$$

چون $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ یعنی مثلث در رأس $A(-1, 2)$ قائمه است و وتر آن پاره‌خط BC است. حال کفایت فاصله نقطه وسط پاره‌خط BC تا خط $x + 2y - 4 = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{cases} B(-2, 1) \\ C(2, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(-2) + (2)}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$ = وسط وتر = وسط پاره‌خط BC

فاصله نقطه $(0, 0)$ از خط $x + 2y - 4 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

۲) اگر نقطه $M(1, 2)$ محل برخورد دو خط عمود بر هم $y = mx + b$ و $(2m - 3)y - mx = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + 2b$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) -۵

پاسخ: گزینه ۴

$$y = mx + b \Rightarrow \text{شیب خط} = m$$

$$(2m - 3)y = mx + a \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{m}{2m - 3}$$

$$\Rightarrow mx \frac{m}{2m - 3} = -1 \Rightarrow m^2 = -2m + 3$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} M = -3 \checkmark \\ M = 1 \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -3x + b \\ -9y = -3x + a \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری نقطه } M \text{ در دو معادله}}$$

$$\begin{cases} 2 = -3 + b \Rightarrow b = 5 \\ -18 = -3 + a \Rightarrow a = -15 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = -15 + 10 = -5$$

۳) دو ضلع از یک لوزی بر دو خط $2y + x = 6$ و $3x - y = 4$ منطبق می‌باشند و نقطه $(1, -1)$ یکی از رأس‌های لوزی است. طول ضلع این لوزی چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

(۴) ۲

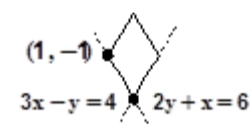
(۳) ۱

(۲) $\sqrt{10}$

(۱) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

نقطه $(1, -1)$ روی خط $3x - y = 4$ است و دو خط داده شده موازی نیستند.



$$\begin{cases} 2y + x = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 2) \text{ راس دیگر لوزی}$$

$$\text{طول ضلع} : \sqrt{(2-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

۴) یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله $y = x + 2$ و نقطه $A(3, -1)$ یک رأس آن است. اندازه قطر مربع کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نقطه $A(3, -1)$ در معادله $y = x + 2$ صدق نمی کند. پس یک نقطه A خارج آن است. فاصله A از خط $y = x + 2$ برابر طول ضلع مربع (L) است.

$$y = x + 2 \Rightarrow x - y + 2 = 0, A(3, -1)$$

$$L = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(3) - 1(-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است، پس:

$$\text{طول قطر مربع} = \sqrt{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = 6$$

۵) دو نقطه $(a+1, -2a)$ و $(a-3, 2)$ دو سر قطر یک دایره می باشند و مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول و سوم است. شعاع دایره کدام است؟

۲ (۴)

$4\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(a+1, -2a) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1+a-3}{2} = a-1 \\ \frac{-2a+2}{2} = -a+1 \end{cases} \Rightarrow (a-1, -a+1) \text{ مختصات مرکز دایره}$$

$$a-1 = -a+1 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{matrix} (2, -2) \\ (-2, 2) \end{matrix} \Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{شعاع} = 2\sqrt{2}$$

۶) اگر $A(2, m)$ ، $B(4, 2)$ و $C(1, 1)$ رئوس مثلث متساوی الساقین ABC باشند ($AB = AC$)، محیط مثلث چند برابر طول ساق آن است؟

$2 + \sqrt{2}$ (۲)

$3 + \sqrt{3}$ (۱)

$3 + \sqrt{2}$ (۴)

$2 + \sqrt{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مقدار m را تعیین می کنیم:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{4 + (m-2)^2} = \sqrt{1 + (m-1)^2}$$

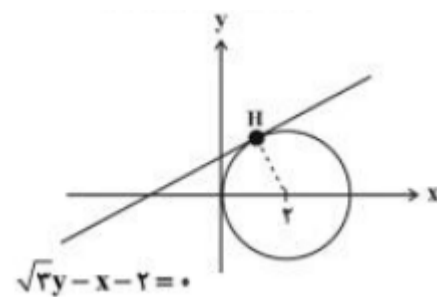
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4 + m^2 - 4m + 4 = 1 + m^2 - 2m + 1$$

$$\Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow AB = AC = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{طول ساق}} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(2 + \sqrt{2})}{\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{2}$$

۷) خطی به معادله $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ در نقطه H بر دایره‌ای به مرکز $O(2, 0)$ مطابق شکل مماس شده است. حاصل ضرب طول و عرض نقطه H کدام است؟

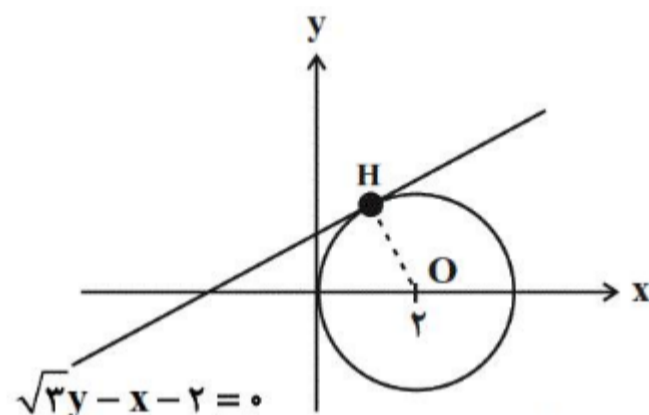


- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) $4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم شعاع بر خط مماس بر دایره، عمود است. پس شیب خط شامل شعاع OH، قرینه و معکوس شیب خط $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ است:

$$m_{OH} = \frac{-1}{\text{شیب خط}} = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$



حال معادله شعاع OH را می‌نویسیم:

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

نقطه H محل برخورد شعاع و خط $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ است. پس با حل دستگاه زیر، مختصات H را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \sqrt{3}y - x - 2 = 0 \\ y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}(-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}) - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 6 - x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 4$$

$$\Rightarrow x = 1 \xrightarrow{y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}} y = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

پس $H(1, \sqrt{3})$ بوده و داریم: $x_H \cdot y_H = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

۸ دو ضلع مربعی روی دو خط $3x + 4y - k = 0$ و $6x + 8y = 50$ قرار دارند. اگر محیط مربع برابر $\frac{8k}{5}$ باشد، مقدار k^2 کدام است؟

۲۵ (۴)

۶۲۵ (۳)

$\frac{۶۲۵}{۹}$ (۲)

$\frac{۲۵}{۳}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

شیب هر دو خط برابر $-\frac{۳}{۴}$ است، پس دو خط موازیند.

فاصله دو خط موازی برابر با طول ضلع مربع است. از طرفی محیط مربعی به ضلع a برابر $4a$ است.

$$\text{ضلع مربع} = \frac{۲k}{۵} \Rightarrow \text{محیط مربع} = \frac{۸k}{۵}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y - k = 0 \\ 6x + 8y = 50 \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0 \end{cases}$$

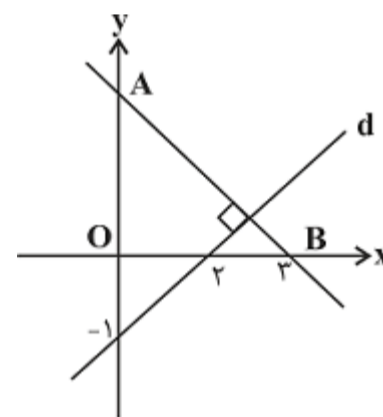
$$\text{فاصله دو خط موازی: } d = \frac{|-k - (-25)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-k + 25|}{5} = \frac{۲k}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k + 25 = 2k \Rightarrow 3k = 25 \Rightarrow k = \frac{۲۵}{۳} \\ -k + 25 = -2k \Rightarrow k = -25 \end{cases}$$

چون محیط مربع مقداری مثبت است، پس فقط $k = \frac{۲۵}{۳}$ قابل قبول است. در نتیجه:

$$k^2 = \frac{۶۲۵}{۹}$$

۹ شکل روبه‌رو، مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱۸ (۱)

۹ (۲)

$\frac{۱}{۵}$ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OB \times OA}{2} = \frac{۳ \times OA}{2}$$

طول پاره خط OA عرض از مبدأ خط AB است.

این خط عمود بر خط d است، در نتیجه، داریم:

$$m_d = \frac{1}{۲} \Rightarrow m_{AB} = -۲$$

$$\text{معادله خط AB: } y - ۰ = -۲(x - ۳)$$

$$\Rightarrow y = -۲x + ۶ \Rightarrow OA = ۶$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{۳ \times ۶}{2} = ۹$$

۱۰) مختصات دو سر پاره خط AB به صورت $A(3, 8)$ و $B(-1, 6)$ است. نقطه C روی عمودمنصف AB قرار دارد و طول آن ۲ واحد از عرض آن کمتر است. عرض نقطه C کدام است؟

۱۴ (۴)

۵ (۳)

$\frac{14}{3}$ (۲)

$\frac{13}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نقطه وسط پاره خط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{8 + 6}{2} \right) = (1, 7)$$

شیب پاره خط AB را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{8 - 6}{3 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

پس شیب عمودمنصف AB، برابر ۲- است.

معادله عمودمنصف AB را می‌نویسیم:

$$y - 7 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 9$$

طول نقطه C، دو واحد از عرض آن کمتر است، پس مختصات آن به صورت $(\alpha - 2, \alpha)$ است.

$$\alpha = -2(\alpha - 2) + 9 \Rightarrow 3\alpha = 13 \Rightarrow \alpha = \frac{13}{3}$$

پس عرض نقطه C، $\frac{13}{3}$ است.

۱۱) نقاط $A(2, 5)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(3, 4)$ رأس‌های یک مثلث هستند. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم. مختصات نقطه H کدام است؟

$(-\frac{13}{5}, \frac{17}{5})$ (۴)

$(-\frac{13}{5}, -\frac{71}{5})$ (۳)

$(\frac{13}{5}, -\frac{19}{5})$ (۲)

$(\frac{13}{5}, \frac{19}{5})$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

معادله خط BC را می‌نویسیم: $m_{BC} = \frac{4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

معادله ارتفاع AH را می‌نویسیم: $m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = -2$

$$y - 5 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 9$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow -2x + 9 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow -4x + 18 = x + 5$$

$$\Rightarrow -5x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

$$y = -2 \times \frac{13}{5} + 9 = \frac{-26 + 45}{5} = \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow \text{مختصات نقطه H} = \left(\frac{13}{5}, \frac{19}{5} \right)$$

۱۲) اگر نقطه $A'(k, -3k+1)$ قرینه نقطه $A(5, m-1)$ نسبت به مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار $m-k$ کدام است؟

(۴) -۲۰

(۳) ۲۰

(۲) -۱۰

(۱) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

چون A و A' قرینه یکدیگر نسبت به مبدأ مختصات هستند، پس مبدأ مختصات (نقطه O) وسط پاره خط AA' است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_{A'}}{2} = 0 &\Rightarrow \frac{5+k}{2} = 0 \Rightarrow k = -5 \\ \frac{y_A + y_{A'}}{2} = 0 &\xrightarrow{k=-5} \frac{m-1+16}{2} = 0 \Rightarrow m = -15 \\ &\Rightarrow m - k = -15 + 5 = -10 \end{aligned}$$

۱۳) دو ضلع یک مستطیل بر دو خط $y - 2x = 3$ و $4x + 8y - 4 = 0$ واقع‌اند. اگر نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ یکی از رئوس این چهارضلعی باشد، مساحت چهارضلعی کدام است؟

(۴) ۷/۵

(۳) ۱۵

(۲) ۵

(۱) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

از آنجا که حاصل ضرب شیب‌های دو خط $m \times m' = -1$ است و مختصات نقطه A در معادله هیچکدام از این دو خط صدق نمی‌کند،

پس فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ از هر کدام از این دو خط طول و عرض آن مستطیل و حاصل ضربشان برابر با مساحت مستطیل داده شده است.

فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ از خط $2x - y - 3 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|2(-1) - (-4) - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ از خط $x + 2y - 1 = 0$ برابر است با:

$$d' = \frac{|-1 - 8 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = d \cdot d' = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{10}{\sqrt{5}} = 10$$

۱۴) از برخورد خطوط $y+2x=1$, $2y-x=2$ و $y+4=3x$ با یکدیگر مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

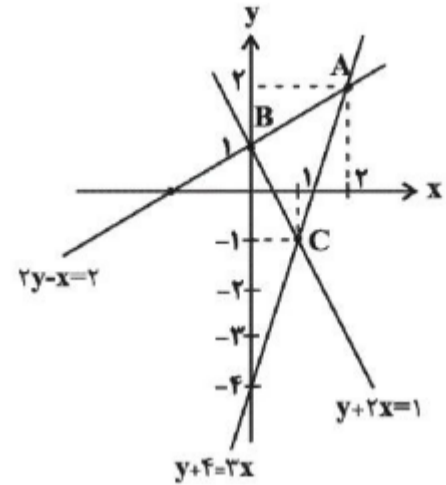
(۳) ۱

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) ۵

پاسخ: گزینه ۲

با رسم سه خط داده شده داریم:



شیب دو خط $2y-x=2$ و $y+2x=1$ قرینه معکوس یکدیگرند، بنابراین این دو خط بر یکدیگر عمود هستند.

$$\begin{cases} 2y-x=2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2} \\ y+2x=1 \Rightarrow y = -2x+1 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(-2) = -1$$

با توجه به عمود بودن دو خط گفته شده، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مساحت آن، مساحت مثلث مطلوب سوال است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times BC}{2} \quad (*)$$

با توجه به نمودارهای رسم شده، $B(0, 1)$ است و برای بدست آوردن مختصات نقطه A و C داریم:

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 4 = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow 3x - 4 = 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases}$$

حال اندازه دو ضلع AB و BC را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{(*)} S_{ABC} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$$

۱۵) اگر $A(1, \frac{3}{4})$, $B(-4, -1)$ و $C(-3, -3)$ سه رأس مستطیل ABCD باشند، رأس D مستطیل روی کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

(۴) $y = 2x - \frac{3}{4}$

(۳) $y = x + \frac{3}{4}$

(۲) $6y = 4x - 11$

(۱) $3y = 4x + 8$

پاسخ: گزینه ۲

اگر چهار ضلعی ABCD مستطیل باشد، چون قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، نتیجه می‌گیریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 1 + (-3) = -4 + x_D \Rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow \frac{3}{4} + (-3) = -1 + y_D$$

$$\Rightarrow y_D = -\frac{1}{4}$$

حال با توجه به نقطه $D(2, -\frac{1}{4})$ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $3 \times (-\frac{1}{4}) = 4 \times 2 + 8 \Rightarrow -\frac{3}{4} \neq 16$

گزینه «۲»: $6 \times (-\frac{1}{4}) = 4 \times 2 - 11 \Rightarrow -\frac{3}{2} = -3$

بنابراین گزینه «۲» جواب است.

گزینه «۳»: $-\frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \neq \frac{7}{4}$

گزینه «۴»: $-\frac{1}{4} = 2 \times 2 - \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \neq \frac{5}{4}$

۱۶) دو خط $L_1: 2x + y = 1$ و $L_2: x - 2y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, -2\alpha)$ مماسند. فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع این دو خط کدام است؟

(۴) $\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

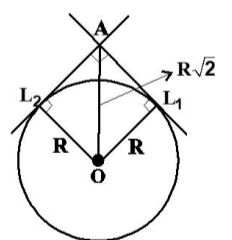
(۲) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

(۱) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شیب دو خط L_1 و L_2 می‌توان گفت این دو خط بر یکدیگر عمودند.

با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به نقاط تماس دایره با دو خط L_1 و L_2 مربعی به قطر $R\sqrt{2}$ تشکیل می‌شود که همان فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع دو خط L_1 و L_2 است. پس کافی است، شعاع دایره را بدست آوریم.



برای این کار فاصله مرکز دایره تا دو خط L_1 و L_2 را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{|\alpha + 4\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$OA = R\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

۱۷) دو ضلع OA و OC از متوازی‌الاضلاع OABC به ترتیب روی محور xها و نیمساز ربع اول واقع‌اند و مختصات رأس B به صورت (۳, ۲) است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۴ (۴)

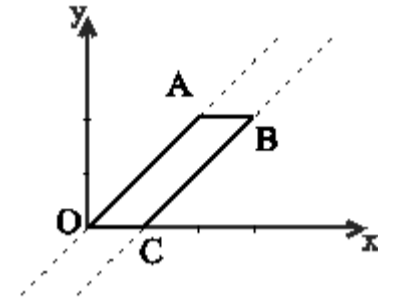
۳ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

چون اضلاع متوازی‌الاضلاع دو به دو موازی‌اند، کافی است از نقطه B خطی به موازات نیمساز ربع اول رسم کنیم تا محور xها را در نقطه C قطع کند:



$y = x \Rightarrow m = 1$ معادله نیمساز ربع اول

خط گذرنده از رأس B و موازی $y = x$ را به دست می‌آوریم:

$$y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$$

$$\xrightarrow{y=0} x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$$

۱۸) نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

(۴, ۳) (۴)

(۳, ۵) (۳)

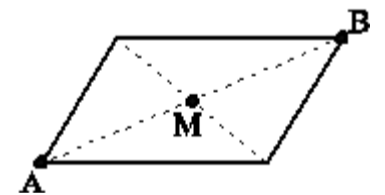
(۳, ۴) (۲)

(۱, ۵) (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مختصات نقطه A در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی‌کند.

بنابراین A رویه‌روی این دو خط است. کافی است محل برخورد دو خط را به دست آوریم. فرض کنیم دو خط همدیگر را در نقطه B قطع کنند.



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y + 9x = -33 \\ 6y + 8x = 16 \end{cases} \Rightarrow 17x = -17$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(-1, 4)$$

مختصات وسط پاره‌خط AB یعنی نقطه M را به دست می‌آوریم.

$$M\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+6}{2}\right) \Rightarrow M(3, 5)$$

۱۹) دو ضلع مقابل یک مربع بر دو خط به معادلات $y = 2x - 1$ و $2y + kx = 7$ واقع هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۴/۵ (۴)

۴/۱ (۳)

۴/۰۵ (۲)

۴/۰۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$2y + kx = 7, y = 2x - 1$$

این دو خط موازی‌اند:

معادله دومی را ۲ برابر می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2y + kx = 7 \\ 2y - 4x = -2 \end{cases}$$

پس باید $k = -4$ باشد. حالا فاصله این دو خط برابر طول ضلع مربع است:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|7-(-2)|}{\sqrt{(-4)^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

$$s = d^2 = \frac{81}{20} = 4\frac{1}{20} = 4\frac{1}{5}$$

۲۰) دو نقطه روی خط $x + y = 2$ قرار دارند که فاصله آن‌ها از خط به معادله $y = \frac{1}{3}x - 1$ برابر $\sqrt{10}$ است، فاصله این دو نقطه کدام است؟

$5\sqrt{2}$ (۴)

$10\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

دو نقطه روی خط $x + y = 2$ قرار دارند، پس می‌توانیم مختصات آن‌ها را به صورت $(\alpha, 2 - \alpha)$ نشان دهیم.

فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 2 - \alpha \end{vmatrix}$ از خط $3y - x + 3 = 0$ به صورت زیر است:

$$= \frac{|3(2-\alpha) - \alpha + 3|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10} \Rightarrow |9 - 4\alpha| = 10$$

$$9 - 4\alpha = \pm 10 \Rightarrow \alpha = \frac{19}{4}, \alpha = \frac{-1}{4}$$

پس مختصات این نقاط $(\frac{19}{4}, \frac{-11}{4})$ و $(\frac{-1}{4}, \frac{9}{4})$ هستند و فاصله آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{\left(\frac{19}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-11}{4} - \frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

۲۱) در مثلث با رئوس $A(1,2)$ و $B(4,1)$ و $C(2,5)$ اندازه ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع کدام است؟

۴) $\sqrt{5}$

۳) $\frac{5}{2}$

۲) ۲

۱) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا طول سه ضلع مثلث را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

در نتیجه مثلث ABC ، یک مثلث قائم‌الزاویه در رأس A بوده و وتر (BC) بزرگترین ضلع آن است. اگر ارتفاع وارد بر وتر را h بنامیم، داریم:

$$\text{مساحت مثلث} :: \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times BC \times h$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \times \sqrt{10} = \sqrt{20} \times h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

بنابراین اندازه ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع، برابر $\sqrt{5}$ است.

۲۲) دو خط $y = 2x - 5$ و $4x - 2y = k$ بر دایره‌ای به مساحت 5π مماس‌اند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۴) ۴۰

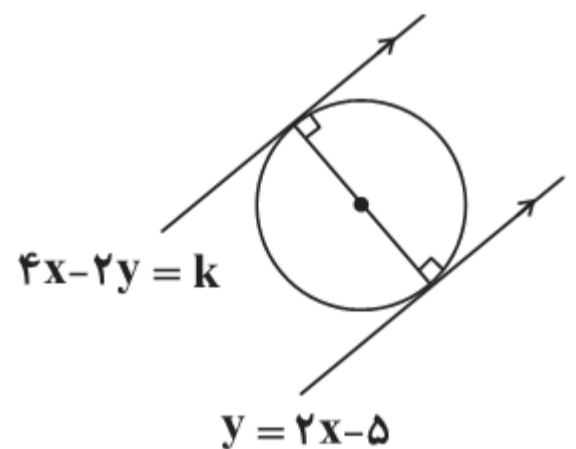
۳) ۳۰

۲) ۲۰

۱) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

شیب دو خط $y = 2x - 5$ و $4x - 2y = k$ با هم برابر است. پس دو خط با هم موازی‌اند. شکل دو خط و دایره به صورت زیر می‌تواند باشد:



فاصله این دو خط برابر با قطر دایره است:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow 5\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5} \Rightarrow 2r = 2\sqrt{5}$$

فاصله دو خط $y - 2x + 5 = 0$ و $y - 2x + \frac{k}{2} = 0$ را برابر با $2\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم:

$$d = \frac{|c-C|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{|\frac{k}{2} - 5|}{\sqrt{4+1}}$$

$$\Rightarrow 10 = \left| \frac{k}{2} - 5 \right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{2} - 5 = 10 \Rightarrow k = 30 \\ \frac{k}{2} - 5 = -10 \Rightarrow k = -10 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای k برابر با $30 + (-10) = 20$ است.

۲۳) در مثلث ABC با مختصات رئوس $A \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2} \right)$, $B \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$ و $C \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2} \right)$ ، طول پاره‌خطی که از رأس A بر ضلع مقابل آن رسم می‌شود تا مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کند، کدام است؟

۳/۵ (۴)

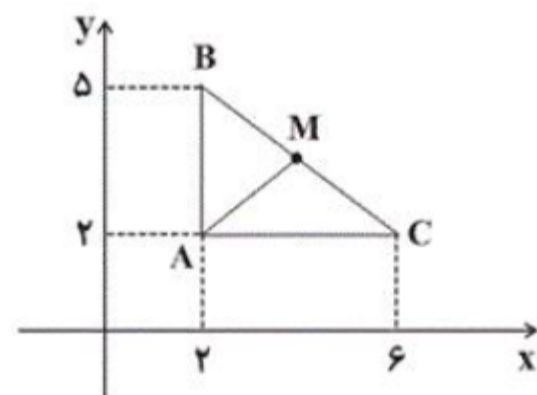
۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

راه‌حل اول:



با توجه به شکل، میانه وارد بر ضلع BC یعنی AM مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. یعنی: $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}$

پس نقطه M وسط ضلع BC می‌باشد، بنابراین:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + \left(\frac{7}{2}-2\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2/5$$

راه‌حل دوم: طول میانه AM نصف وتر BC است، پس:

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{(6-2)^2 + (2-5)^2} = \frac{1}{2}(5) = 2/5$$

۲۴) خط $d_1: 3x - y = 1$ معادله قطری از دایره و $d_2: 2y = 6x + 3$ بر دایره مماس است. مساحت این دایره کدام است؟

$\frac{3\pi}{2}$ (۴)

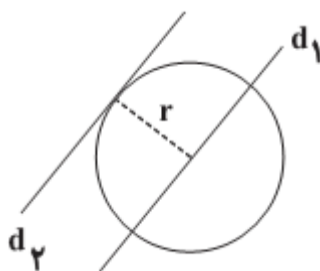
$\frac{5\pi}{4}$ (۳)

$\frac{5\pi}{8}$ (۲)

$\frac{3\pi}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دو خط $d_1: 3x - y = 1$ و $d_2: 2y = 6x + 3$ موازی هستند. پس فاصله این دو خط همان شعاع دایره است.



$$d_2: 2y = 6x + 3 \Rightarrow 3x - y + \frac{3}{2} = 0$$

$$d_1: 3x - y - 1 = 0$$

فاصله دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$r = \frac{|\frac{3}{2} - (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{10}}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \times \frac{\frac{25}{4}}{10} = \frac{5\pi}{8}$$

۲۵) کدام نقطه روی خط $y = 2x + 1$ ، از دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله است؟

(۲, ۵) (۲)

($\frac{1}{2}$, ۲) (۱)

(۱, ۳) (۴)

(۰, ۱) (۳)

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم طول نقطه مفروض α باشد چون نقطه روی خط به معادله $y = 2x + 1$ است عرض این نقطه برابر $2\alpha + 1$ است. اگر این نقطه را C در نظر بگیریم، داریم: $C(\alpha, 2\alpha + 1)$ پس:

$$AC = BC$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 3)^2 = (\alpha + 1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = \alpha + 1 \\ \alpha - 3 = -\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{جواب ندارد} \\ 2\alpha = +2 \Rightarrow \alpha = +1 \end{cases} \Rightarrow C(1, 3)$$