۱) سه نقطه(۲ , ۱-)، (۱ , ۲-) و (۱- , ۲) رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. فاصله وسط وتر این مثلث تا خط $x + 2y - 4 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا رأس قائم مثلث را پیدا می‌کنیم تا وتر آن مشخص شود، برای این منظور داریم:

$$A(-1 , 2) \quad , \quad B(-2 , 1) \quad , \quad C(2 , -1)$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} = 1 \\ m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m_{AC} = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases}$$

چون $m_{AB} \times m_{AC} = -1$، یعنی مثلث در رأس $A(-1 , 2)$ قائمه است و وتر آن پاره‌خط BC است. حال کافیست فاصله نقطه وسط پاره‌خط BC تا خط $x + 2y - 4 = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{cases} B(-2 , 1) \\ C(2 , -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(-2)+(2)}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \end{cases}$$

وسط وتر= وسط پاره‌خط BC = $(0 , 0)$

فاصله نقطه $(0 , 0)$ از خط $x + 2y - 4 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1\times 0 + 2\times(0) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

۲) اگر نقطه $M(۱ , ۲)$ محل برخورد دو خط عمود بر هم $y = mx + b$ و $(۲m - ۳)y - mx = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + ۲b$ کدام است؟ $(m < ۰)$

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) -۱۰ ۴) -۵

پاسخ: گزینه ۴

m=شیب خط $\Rightarrow y = mx + b$

شیب خط $= \frac{m}{۲m-۳} \Rightarrow (۲m - ۳)y = mx + a$

$\Rightarrow mx\frac{m}{۲m-۳} = -۱ \Rightarrow m^۲ = -۲m + ۳$

$\Rightarrow m^۲ + ۲M - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} M = -۳ \checkmark \\ M = ۱ \times \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -۳x + b \\ -۹y = -۳x + a \end{cases}$ ← جای گذاری نقطه M در دو معادله

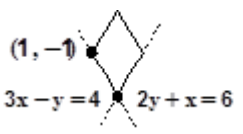
$\begin{cases} ۲ = -۳ + b \Rightarrow b = ۵ \\ -۱۸ = -۳ + a \Rightarrow a = -۱۵ \end{cases} \Rightarrow a + ۲b = -۱۵ + ۱۰ = -۵$

۳) دو ضلع از یک لوزی بر دو خط $۲y + x = ۶$ و $۳x - y = ۴$ منطبق می‌باشند و نقطه $(-۱ , ۱)$ یکی از رأس‌های لوزی است. طول ضلع این لوزی چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

نقطه $(-۱ , ۱)$ روی خط $۳x - y = ۴$ است و دو خط داده شده موازی نیستند.



راس دیگر لوزی : $\begin{cases} ۲y + x = ۶ \\ ۳x - y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow (۲,۲)$

طول ضلع : $\sqrt{(۲ - ۱)^۲ + (۲ + ۱)^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۲}$

④ یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله $y = x + ۲$ و نقطه $A(۳ , -۱)$ یک رأس آن است. اندازه قطر مربع کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

نقطه ی $A(۳, -۱)$ در معادله ی خط $y = x + ۲$ صدق نمی کند. پس یک نقطه ی خارج آن است. فاصله ی نقطه ی A از خط فوق برابر طول ضلع مربع (L) است.

$$y = x + ۲ \Rightarrow x - y + ۲ = ۰, A(۳ , -۱)$$

$$L = \text{طول ضلع}: \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱(۳) - ۱(-۱) + ۲|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}}$$

طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است، پس:

$$\text{قطر مربع} = \sqrt{۲} \times \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۶$$

⑤ دو نقطه $(۲ , a - ۳)$ و $(-۲a , a + ۱)$ دو سر قطر یک دایره می‌باشند و مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول و سوم است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{مختصات مرکز دایره} \quad (a - ۱ , -a + ۱) \Leftarrow \begin{cases} \frac{a + ۱ + a - ۳}{۲} = a - ۱ \\ \frac{-۲a + ۲}{۲} = -a + ۱ \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} (a + ۱ , -۲a) \\ (a - ۳ , ۲) \end{matrix}$$

$$a = ۱ \Rightarrow a - ۱ = -a + ۱ \Rightarrow \text{روی نیمساز ناحیه اول و سوم}$$

$$\text{قطر} = \sqrt{(۲ + ۲)^۲ + (-۲ - ۲)^۲} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{matrix} (۲ , -۲) \\ (-۲ , ۲) \end{matrix}$$

$$\text{شعاع} = ۲\sqrt{۲}$$

⑥ اگر $A(۲ , m)$، $B(۴ , ۲)$ و $C(۱ , ۱)$ رئوس مثلث متساوی‌الساقین ABC باشند $(AB = AC)$، محیط مثلث چند برابر طول ساق آن است؟

۱) $۳ + \sqrt{۳}$ ۲) $۲ + \sqrt{۲}$
۳) $۲ + \sqrt{۳}$ ۴) $۳ + \sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مقدار m را تعیین می‌کنیم:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{۴ + (m - ۲)^۲} = \sqrt{۱ + (m - ۱)^۲}$$

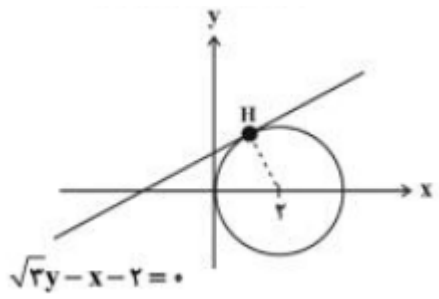
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴ + m^۲ - ۴m + ۴ = ۱ + m^۲ - ۲m + ۱$$

$$\Rightarrow ۲m = ۶ \Rightarrow m = ۳ \Rightarrow AB = AC = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۳^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{طول ساق}} = \frac{۲\sqrt{۵} + \sqrt{۱۰}}{\sqrt{۵}}$$

$$= \frac{\sqrt{۵}(۲ + \sqrt{۲})}{\sqrt{۵}} = ۲ + \sqrt{۲}$$

⑦ خطی به معادله $\sqrt{۳}y - x - ۲ = ۰$ در نقطه H بر دایره‌ای به مرکز $O(۲,۰)$ مطابق شکل مماس شده است. حاصل‌ضرب طول و عرض نقطه H کدام است؟

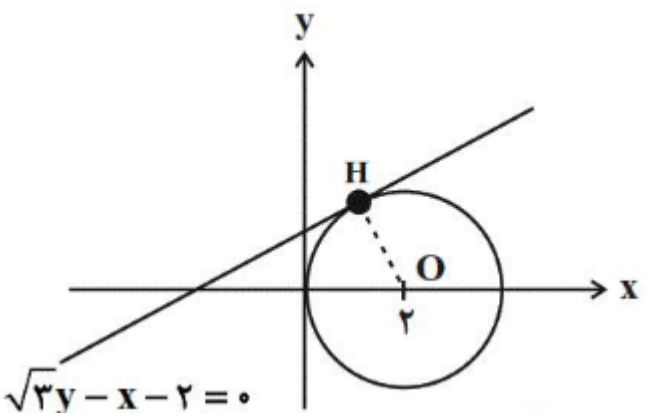


۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم شعاع بر خط مماس بر دایره، عمود است. پس شیب خط شامل شعاع OH، قرینه و معکوس شیب خط $\sqrt{۳}y - x - ۲ = ۰$ است:

$$m_{OH} = \frac{-۱}{\text{شیب خط}} = \frac{-۱}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = -\sqrt{۳}$$



حال معادله شعاع OH را می‌نویسیم:

$$y - ۰ = -\sqrt{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = -\sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳}$$

نقطه H محل برخورد شعاع و خط $\sqrt{۳}y - x - ۲ = ۰$ است. پس با حل دستگاه زیر، مختصات H را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y - x - ۲ = ۰ \\ y = -\sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۳}(-\sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳}) - x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -۳x + ۶ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۴$$

$$\Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{y=-\sqrt{۳}x+۲\sqrt{۳}} y = -\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

پس $H(۱, \sqrt{۳})$ بوده و داریم: $x_H \cdot y_H = ۱ \times \sqrt{۳} = \sqrt{۳}$

⑧ دو ضلع مربعی روی دو خط $۳x + ۴y - k = ۰$ و $۶x + ۸y = ۵۰$ قرار دارند. اگر محیط مربع برابر $\frac{۸k}{۵}$ باشد، مقدار $k^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) $\frac{۶۲۵}{۹}$ ۳) ۶۲۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

شیب هر دو خط برابر $-\frac{۳}{۴}$ است، پس دو خط موازیند.

فاصله دو خط موازی برابر با طول ضلع مربع است. از طرفی محیط مربعی به ضلع a برابر $۴a$ است.

$$\text{محیط مربع} = \frac{۸k}{۵} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{۲k}{۵}$$

$$\begin{cases} ۳x + ۴y - k = ۰ \\ ۶x + ۸y = ۵۰ \Rightarrow ۳x + ۴y - ۲۵ = ۰ \end{cases}$$

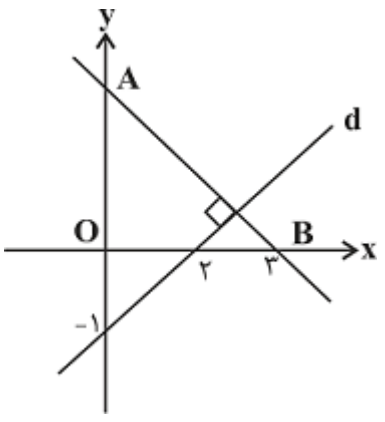
فاصله دو خط موازی: $d = \frac{|-k-(-۲۵)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{|-k+۲۵|}{۵} = \frac{۲k}{۵}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k + ۲۵ = ۲k \Rightarrow ۳k = ۲۵ \Rightarrow k = \frac{۲۵}{۳} \\ -k + ۲۵ = -۲k \Rightarrow k = -۲۵ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

چون محیط مربع مقداری مثبت است، پس فقط $k = \frac{۲۵}{۳}$ قابل قبول است. در نتیجه:

$$k^۲ = \frac{۶۲۵}{۹}$$

⑨ شکل روبه‌رو، مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۹
۳) ۱/۵
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{OB \times OA}{۲} = \frac{۳ \times OA}{۲}$$

طول پاره خط OA عرض از مبدأ خط AB است.

این خط عمود برخط d است، در نتیجه، داریم:

$$m_d = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{AB} = -۲$$

معادله خط AB: $y - ۰ = -۲(x - ۳)$

$$\Rightarrow y = -۲x + ۶ \Rightarrow OA = ۶$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۳ \times ۶}{۲} = ۹$$

(۱۰) مختصات دو سر پاره‌خط AB به صورت A(۳,۸) و B(−۱,۶) است. نقطه C روی عمودمنصف AB قرار دارد و طول آن ۲ واحد از عرض آن کمتر است. عرض نقطه C کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) ۵ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

نقطه وسط پاره‌خط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = (\frac{x_A+x_B}{۲} , \frac{y_A+y_B}{۲}) = (\frac{۳-۱}{۲} , \frac{۸+۶}{۲}) = (۱, ۷)$$

شیب پاره‌خط AB را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{۸-۶}{۳+۱} = \frac{۱}{۲}$$

پس شیب عمودمنصف AB، برابر۲- است.

معادله عمودمنصف AB را می‌نویسیم:

$$y - ۷ = -۲(x - ۱) \Rightarrow y = -۲x + ۹$$

طول نقطه C، دو واحد از عرض آن کمتر است، پس مختصات آن به صورت $(\alpha - ۲, \alpha)$ است.

$$\alpha = -۲(\alpha - ۲) + ۹ \Rightarrow ۳\alpha = ۱۳ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۳}{۳}$$

پس عرض نقطه C، $\frac{۱۳}{۳}$ است.

(۱۱) نقاط A(۲,۵)، B(−۱,۲) و C(۳,۴) رأس‌های یک مثلث هستند. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم. مختصات نقطه H کدام است؟

۱) $(\frac{۱۳}{۵}, \frac{۱۹}{۵})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۵}, -\frac{۱۹}{۵})$ ۳) $(-\frac{۱۳}{۵}, -\frac{۷۱}{۵})$ ۴) $(-\frac{۱۳}{۵}, \frac{۱۷}{۵})$

پاسخ: گزینه ۱

معادله خط BC را می‌نویسیم: $m_{BC} = \frac{۴-۲}{۳-(-۱)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$$y - ۴ = \frac{۱}{۲}(x - ۳) \Rightarrow y - ۴ = \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$

معادله ارتفاع AH را می‌نویسیم: $m_{AH} = \frac{-۱}{m_{BC}} = -۲$

$$y - ۵ = -۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۵ = -۲x + ۴ \Rightarrow y = -۲x + ۹$$

$$\begin{cases} y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \\ y = -۲x + ۹ \end{cases} \Rightarrow -۲x + ۹ = \frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \Rightarrow -۴x + ۱۸ = x + ۵$$

$$\Rightarrow -۵x = -۱۳ \Rightarrow x = \frac{۱۳}{۵}$$

$$y = -۲ \times \frac{۱۳}{۵} + ۹ = \frac{-۲۶ + ۴۵}{۵} = \frac{۱۹}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{مختصات نقطه H} = (\frac{۱۳}{۵}, \frac{۱۹}{۵})$$

⑫ اگر نقطه $A'(k, -3k+1)$ قرینه نقطه $A(5, m-1)$ نسبت به مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار $m-k$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -۱۰ ۳) ۲۰ ۴) -۲۰

پاسخ: گزینه ۲

چون A و A' قرینه یکدیگر نسبت به مبدا مختصات هستند، پس مبدأ مختصات (نقطه O) وسط پاره خط AA' است. در نتیجه:

$$\frac{x_A + x_{A'}}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{۵+k}{۲} = ۰ \Rightarrow k = -۵$$

$$\frac{y_A + y_{A'}}{۲} = ۰ \xrightarrow{k=-۵} \frac{m-۱+۱۶}{۲} = ۰ \Rightarrow m = -۱۵$$

$$\Rightarrow m - k = -۱۵ + ۵ = -۱۰$$

⑬ دو ضلع یک مستطیل بر دو خط $y - ۲x = ۳$ و $۴x + ۸y - ۴ = ۰$ واقع‌اند. اگر نقطه $A\begin{vmatrix} -۱ \\ -۴ \end{vmatrix}$ یکی از رئوس این چهارضلعی باشد، مساحت چهارضلعی کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۷/۵

پاسخ: گزینه ۱

از آنجا که حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط $m \times m' = -۱$ است و مختصات نقطه A در معادله هیچکدام از این دو خط صدق نمی‌کند،

پس فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} -۱ \\ -۴ \end{vmatrix}$ از هر کدام از این دو خط طول و عرض آن مستطیل و حاصل‌ضربشان برابر با مساحت مستطیل داده شده است.

فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} -۱ \\ -۴ \end{vmatrix}$ از خط $-۲x + y - ۳ = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|۲-۴-۳|}{\sqrt{(-۲)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}}$$

فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} -۱ \\ -۴ \end{vmatrix}$ از خط $x + ۲y - ۱ = ۰$ برابر است با:

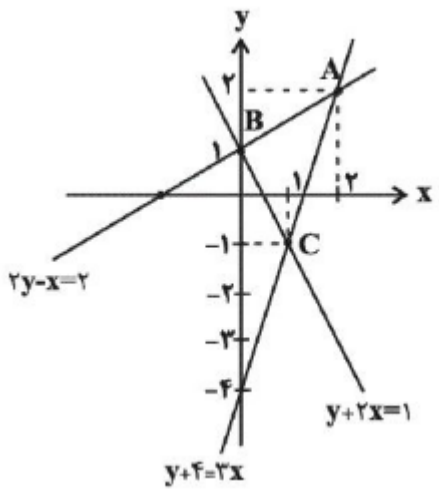
$$d' = \frac{|-۱-۸-۱|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} \Rightarrow S = d.d' = \frac{۵}{\sqrt{۵}} \times \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۱۰$$

(۱۴) از برخورد خطوط $y + ۲x = ۱$، $۲y - x = ۲$ و $y + ۴ = ۳x$ با یک‌دیگر مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

با رسم سه خط داده شده داریم:



شیب دو خط $۲y - x = ۲$ و $y + ۲x = ۱$ قرینه معکوس یکدیگرند، بنابراین این دو خط بر یکدیگر عمود هستند.

$$\begin{cases} ۲y - x = ۲ \Rightarrow y = \frac{x}{۲} + ۱ \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۱}{۲} \\ y + ۲x = ۱ \Rightarrow y = -۲x + ۱ \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})(-۲) = -۱$$

با توجه به عمود بودن دو خط گفته شده، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مساحت آن، مساحت مثلث مطلوب سوال است.

$$S_{\hat{ABC}} = \frac{AB \times BC}{۲} \quad (*)$$

با توجه به نمودارهای رسم شده، $B(۰,۱)$ است و برای بدست آوردن مختصات نقطه A و C داریم:

$$\begin{cases} y = ۳x - ۴ \\ y = \frac{x}{۲} + ۱ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۴ = \frac{x}{۲} + ۱ \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۲ \\ y_A = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ۳x - ۴ \\ y = ۱ - ۲x \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۴ = ۱ - ۲x \Rightarrow \begin{cases} x_C = ۱ \\ y_C = -۱ \end{cases}$$

حال اندازه دو ضلع AB و BC را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(۱ - ۲)^۲ + (۰ - ۲)^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

$$BC = \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + (۱ - ۰)^۲} = \sqrt{۴ + ۱} = \sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{(*)} S_{ABC} = \frac{\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

⑮ اگر $A(1,\frac{3}{2})$، $B(-4,-1)$ و $C(-3,-3)$، سه رأس مستطیل ABCD باشند، رأس D مستطیل روی کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

۱) $3y = 4x + 8$ ۲) $6y = 4x - 11$ ۳) $y = x + \frac{3}{2}$ ۴) $y = 2x - \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

اگر چهار ضلعی ABCD مستطیل باشد، چون قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، نتیجه می‌گیریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 1 + (-3) = -4 + x_D \Rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow \frac{3}{2} + (-3) = -1 + y_D$$

$$\Rightarrow y_D = -\frac{1}{2}$$

حال با توجه به نقطه $D(2,-\frac{1}{2})$ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱» : $3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times 2 + 8 \Rightarrow -\frac{3}{2} \neq 16$

گزینه «۲» : $6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times 2 - 11 \Rightarrow -3 = -3$

بنابراین گزینه «۲» جواب است.

گزینه «۳» : $-\frac{1}{2} = 2 + \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{7}{2}$

گزینه «۴» : $-\frac{1}{2} = 2 \times 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$

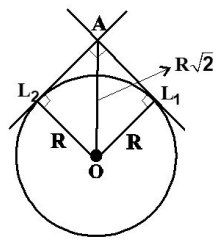
⑯ دو خط $L_1 : 2x + y = 1$ و $L_2 : x - 2y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,-2\alpha)$ مماسند. فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع این دو خط کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شیب دو خط L_1 و L_2 می‌توان گفت این دو خط بر یکدیگر عمودند.

با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به نقاط تماس دایره با دو خط L_1 و L_2 مربعی به قطر $R\sqrt{2}$ تشکیل می‌شود که همان فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع دو خط L_1 و L_2 است. پس کافی است، شعاع دایره را بدست آوریم.



برای این کار فاصله مرکز دایره تا دو خط L_1 و L_2 را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{|\alpha+4\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{|2\alpha-2\alpha-1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{5} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

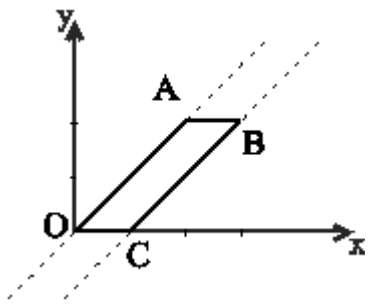
$$OA = R\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

⑰ دو ضلع OC و OA از متوازی‌الاضلاع OABC به ترتیب روی محور xها و نیمساز ربع اول واقع‌اند و مختصات رأس B به صورت B(۳ , ۲) است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۲ **۲)** ۱ **۳)** ۳ **۴)** ۴

پاسخ: گزینه ۲

چون اضلاع متوازی‌الاضلاع دو به دو موازی‌اند، کافی است از نقطه B خطی به موازات نیمساز ربع اول رسم کنیم تا محور xها را در نقطه Cقطع کند:



معادله نیم‌ساز ربع اول: $y = x \Rightarrow m = ۱$

خط گذرنده از رأسB و موازی $y = x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y - ۲ = ۱(x - ۳) \Rightarrow y = x - ۱$$

$$\xrightarrow{y=۰} x = ۱ \Rightarrow C(۱ , ۰)$$

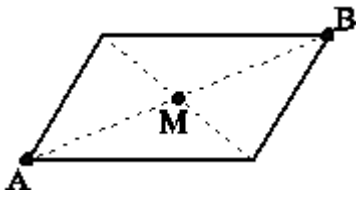
⑱ نقطه A(۶ , ۷) رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) (۱ , ۵) **۲)** (۳ , ۴) **۳)** (۳ , ۵) **۴)** (۴ , ۳)

پاسخ: گزینه ۳

مختصات نقطهA در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی‌کند.

بنابراینAروبه‌روی این دو خط است. کافی است محل برخورد دو خط را به دست آوریم. فرض کنیم دو خط همدیگر را در نقطهB قطع کنند.



$$\begin{cases} ۲y - ۳x = ۱۱ \\ ۳y + ۴x = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶y + ۹x = -۳۳ \\ ۶y + ۸x = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۷x = -۱۷$$

$$\Rightarrow x = -۱ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow B(-۱ , ۴)$$

مختصات وسط پاره‌خطAB یعنی نقطهM را به‌دست می‌آوریم.

$$M\left(\frac{-۱+۷}{۲} , \frac{۴+۶}{۲}\right) \Rightarrow M(۳ , ۵)$$

(۱۹) دو ضلع مقابل یک مربع بر دو خط به معادلات $y = ۲x - ۱$ و $۲y + kx = ۷$ واقع هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴/۰۱ ۲) ۴/۰۵ ۳) ۴/۱ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۲

این دو خط موازی‌اند: $۲y + kx = ۷ , y = ۲x - ۱$

معادله دومی را ۲ برابر می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲y + kx = ۷ \\ ۲y - ۴x = -۲ \end{cases}$$

پس باید $k = -۴$ باشد. حالا فاصله این دو خط برابر طول ضلع مربع است:

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|۷-(-۲)|}{\sqrt{(-۴)^۲+۲^۲}} = \frac{۹}{\sqrt{۲۰}}$$

پس مساحت مربع برابر است با: $s = d^۲ = \frac{۸۱}{۲۰} = ۴\frac{۱}{۲۰} = ۴/۰۵$

(۲۰) دو نقطه روی خط $x + y = ۲$ قرار دارند که فاصله آن‌ها از خط به معادله $y = \frac{۱}{۳}x - ۱$ برابر $\sqrt{۱۰}$ است، فاصله این دو نقطه کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

دو نقطه روی خط $x + y = ۲$ قرار دارند، پس می‌توانیم مختصات آن‌ها را به‌صورت $(\alpha, ۲ - \alpha)$ نشان دهیم.

فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} \alpha \\ ۲ - \alpha \end{vmatrix}$ از خط $۳y - x + ۳ = ۰$ به‌صورت زیر است:

$$= \frac{|۳(۲-\alpha)-\alpha+۳|}{\sqrt{۱+۹}} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow |۹ - ۴\alpha| = ۱۰$$

$$۹ - ۴\alpha = \pm ۱۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۹}{۴} , \alpha = \frac{-۱}{۴}$$

پس مختصات این نقاط $(\frac{۱۹}{۴} , \frac{-۱۱}{۴})$ و $(\frac{۹}{۴} , \frac{-۱}{۴})$ هستند و فاصله آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(\frac{۱۹}{۴} + \frac{۱}{۴})^۲ + (\frac{-۱۱}{۴} - \frac{۹}{۴})^۲} = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$

(۲۱) در مثلث با رئوس C(۲,۵) و B(۴,۱) و A(۱,۲) اندازه ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا طول سه ضلع مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

$$AC = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۲-۵)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

$$BC = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۲۰}$$

$$\Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

درنتیجه مثلث ABC، یک مثلث قائم‌الزاویه در رأس A بوده و وتر (BC) بزرگ‌ترین ضلع آن است. اگر ارتفاع وارد بر وتر را h بنامیم، داریم:

$$\text{مساحت مثلث}: \frac{۱}{۲} \times AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times BC \times h$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰} \times \sqrt{۱۰} = \sqrt{۲۰} \times h \Rightarrow h = \sqrt{۵}$$

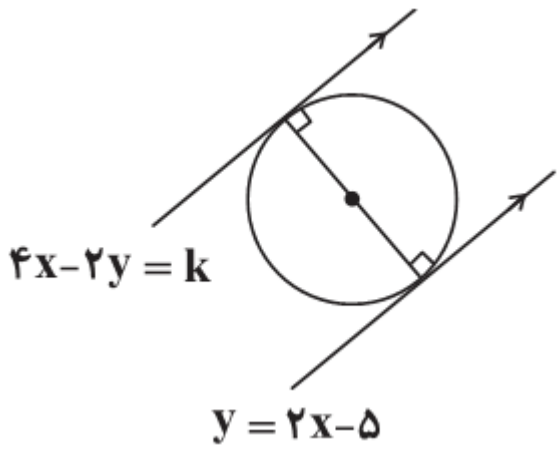
بنابراین اندازه ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، برابر $\sqrt{۵}$ است.

(۲۲) دو خط $y = ۲x - ۵$ و $۴x - ۲y = k$ بر دایره‌ای به مساحت ۵π مماس‌اند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

شیب دو خط $y = ۲x - ۵$ و $۴x - ۲y = k$ با هم برابر است. پس دو خط با هم موازی‌اند. شکل دو خط و دایره به صورت زیر می‌تواند باشد:



فاصله این دو خط برابر با قطر دایره است:

$$S = \pi r^۲ \Rightarrow ۵\pi = \pi r^۲ \Rightarrow r = \sqrt{۵} \Rightarrow ۲r = ۲\sqrt{۵}$$

فاصله دو خط $y - ۲x + ۵ = ۰$ و $y - ۲x + \frac{k}{۲} = ۰$ را برابر با $۲\sqrt{۵}$ قرار می‌دهیم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Rightarrow ۲\sqrt{۵} = \frac{|\frac{k}{۲} - ۵|}{\sqrt{۴+۱}}$$

$$\Rightarrow ۱۰ = |\frac{k}{۲} - ۵| \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{۲} - ۵ = ۱۰ \Rightarrow k = ۳۰ \\ \frac{k}{۲} - ۵ = -۱۰ \Rightarrow k = -۱۰ \end{cases}$$

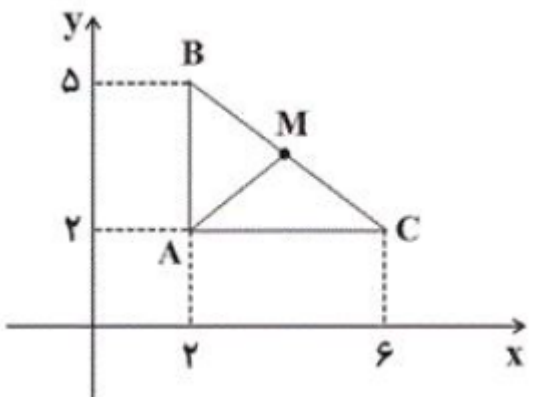
پس مجموع مقادیر ممکن برای k برابر با $۲۰ = (-۱۰) + ۳۰$ است.

(۲۳) در مثلث ABC با مختصات رئوس $\begin{vmatrix}۲\\۲\end{vmatrix}$ A، $\begin{vmatrix}۲\\۵\end{vmatrix}$ B و $\begin{vmatrix}۶\\۲\end{vmatrix}$ C، طول پاره‌خطی که از رأس A بر ضلع مقابل آن رسم می‌شود تا مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۲

راه‌حل اول:



با توجه به شکل، میانه وارد بر ضلع BC یعنی AM مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. یعنی: $S_{\overset{\Delta}{ABM}} = S_{\overset{\Delta}{AMC}}$

پس نقطه M وسط ضلع BC می‌باشد، بنابراین:

$$x_M = \frac{x_B+x_C}{۲} = \frac{۲+۶}{۲} = ۴$$

$$y_M = \frac{y_B+y_C}{۲} = \frac{۲+۵}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (\frac{۷}{۲}-۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۴ + \frac{۹}{۴}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

راه‌حل دوم: طول میانه AM نصف وتر BC است، پس:

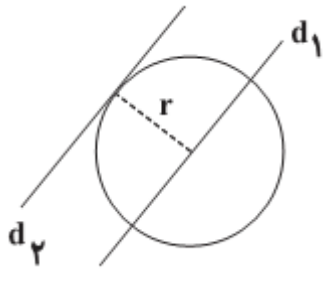
$$AM = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۶-۲)^۲ + (۲-۵)^۲} = \frac{۱}{۲}(۵) = ۲/۵$$

(۲۴) خط $d_۱ : ۳x - y = ۱$ معادله قطری از دایره و $d_۲ : ۲y = ۶x + ۳$ بر دایره مماس است. مساحت این دایره کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

دو خط $d_۱ : ۳x - y = ۱$ و $d_۲ : ۲y = ۶x + ۳$ موازی هستند. پس فاصله این دو خط همان شعاع دایره است.



$$d_۲ : ۲y = ۶x + ۳ \Rightarrow ۳x - y + \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$d_۱ : ۳x - y - ۱ = ۰$$

فاصله دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$r = \frac{|\frac{۳}{۲} - (-۱)|}{\sqrt{۳^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۱۰}}$$

$$S = \pi r^۲ = \pi \times \frac{\frac{۲۵}{۴}}{۱۰} = \frac{۵\pi}{۸}$$

۲۵) کدام نقطه روی خط $y = 2x + 1$، از دو نقطه $A(3 , 0)$ و $B(-1 , 0)$ به یک فاصله است؟

۱) $(2 , \frac{1}{2})$ **۲)** $(5 , 2)$

۳) $(1 , 0)$ **۴)** $(3 , 1)$

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم طول نقطه مفروض α باشد چون نقطه روی خط به معادله $y = 2x + 1$ است عرض این نقطه برابر $2\alpha + 1$ است. اگر این نقطه را C درنظر بگیریم، داریم: $C(\alpha , 2\alpha + 1)$، پس:

$$AC = BC$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 3)^2 = (\alpha + 1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = \alpha + 1 \\ \alpha - 3 = -\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 1 \text{ جواب ندارد} \\ 2\alpha = +2 \Rightarrow \alpha = +1 \end{cases} \Rightarrow C(1 , 3)$$