مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

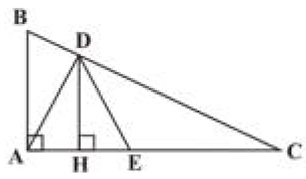
نام آزمون: **آزمون A1 هندسه یازدهم**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۱/۲۷

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

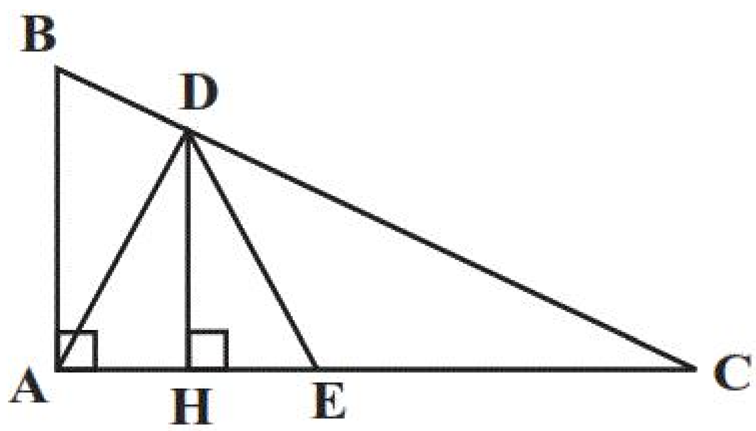
① در شکل زیر $AD = DE = ۵\sqrt{۲}$ به نحوی رسم شده‌اند که $\frac{CE}{AE} = ۳$ است. اگر $AB = ۸$ باشد، مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۳۲
۳) ۴۸
۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲

چون $A\overset{\Delta}{D}E$ متساوی‌الساقین است، پس $AH = HE$ است. پس قرار می‌دهیم: $AH = HE = x$



از طرفی داریم:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CE}{۲x} = ۳ \Rightarrow CE = ۶x$$

چون DH و BA هر دو بر AC عمودند، پس:

$$D\overset{\Delta}{H}C \sim B\overset{\Delta}{A}C \Rightarrow \frac{DH}{BA} = \frac{CH}{CA} = \frac{۶x+x}{۶x+۲x} = \frac{۷}{۸}$$

چون $BA = ۸$ است، پس $DH = ۷$ خواهد بود.

$$A\overset{\Delta}{H}D : (۷)^۲ + x^۲ = (۵\sqrt{۲})^۲$$
$$\Rightarrow ۴۹ + x^۲ = ۵۰ \Rightarrow x = ۱$$

بنابراین $AC = ۸x = ۸$ است، در نتیجه داریم:

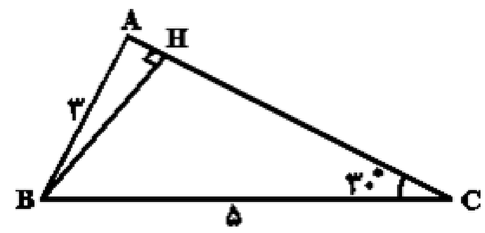
$$S_{A\overset{\Delta}{B}C} = \frac{۱}{۲}(۸)(۸) = ۳۲$$

۲ با معلوم بودن دو ضلع $AB = ۳$ و $BC = ۵$ و زاویه $\widehat{C} = ۳۰^\circ$، چند مثلث غیرهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟

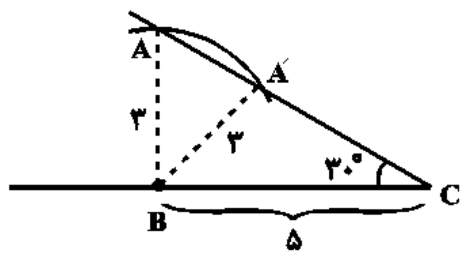
۱) صفر **۲)** یک **۳)** دو **۴)** بی شمار

پاسخ: گزینه ۳

مثلث ABC را با معلومات داده شده رسم می‌کنیم. در مثلث BHC، BH روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه، نصف وتر است. پس $BH = ۲/۵$ است.



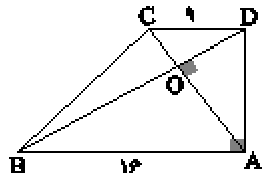
زاویه $\widehat{C}$ را به اندازه ۳۰° رسم می‌کنیم، و نقطه B را به فاصله ۵ واحد از C روی ضلع زاویه اختیار می‌کنیم.



چون $BA > BH$ به مرکز نقطه B و شعاع $AB = ۳$ دایره‌ای رسم کنیم، ضلع دیگر زاویه $\widehat{C}$ را در دو نقطه A و A' قطع می‌کند.

پس دو مثلث ABC و A'BC با معلومات داده شده رسم شده‌اند که غیرهمنهشت‌اند.

۳) در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ مقابل، قطرها بر هم عمود هستند. مساحت ذوزنقه کدام است؟



۱) ۳۰۰

۲) ۲۵۰

۳) ۲۰۰

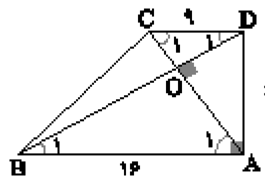
۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} D_1 = B_1 \\ C_1 = A_1 \end{cases}$$ ⇐خطوط موازی و مورب

$$\xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{COD} \sim \overset{\triangle}{BOA}$$



$$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = \frac{۹}{۱۶}$$

یعنی می‌توانیم فرض کنیم:

$$OC = ۹x\ ,\ OA = ۱۶x$$

$$OD = ۹y\ ,\ OB = ۱۶y$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ACD:

$$CD^{۲} = CO \times AC \Rightarrow ۸۱ = ۹x \times ۲۵x$$

$$\Rightarrow x^{۲} = \frac{۸۱}{۹ \times ۲۵} \Rightarrow x = \frac{۳}{۵} \Rightarrow AC = ۲۵(\frac{۳}{۵}) = ۱۵$$

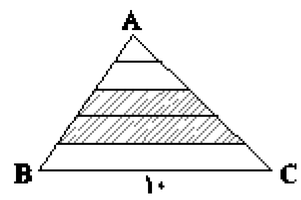
در مثلث ACD داریم:

$$AD^{۲} = AC^{۲} - CD^{۲} \Rightarrow AD^{۲} = ۲۲۵ - ۸۱ = ۱۴۴ \Rightarrow AD = ۱۲$$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$\frac{(CD+AB)AD}{۲} = \frac{(۹+۱۶)}{۲} \times ۱۲ = ۱۵۰$$

۴ در مثلث شکل مقابل اضلاع AB و AC به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. مساحت کوچک‌ترین مثلث تقریباً چند درصد مساحت ذوزنقهٔ هاشورخورده است؟ (BC = ۱۰)

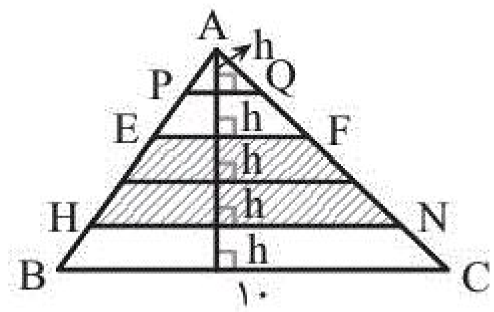


۱) ۸/۳ **۲)** ۱۲
۳) ۶/۲ **۴)** ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

راه حل اول:

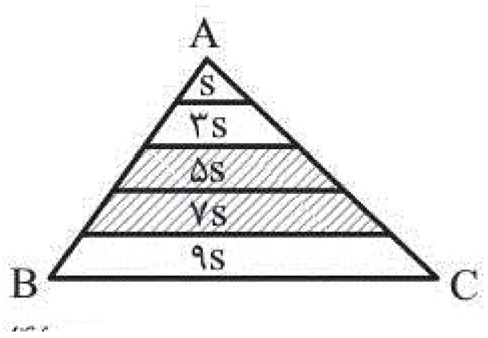


$$\begin{cases} \dfrac{S_{APQ}}{S_{AEF}} = \left(\dfrac{h}{2h}\right)^2 = \dfrac{1}{4} & (1) \\ \dfrac{S_{AEF}}{S_{AHN}} = \left(\dfrac{2h}{4h}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{AEF} + S_{\text{هاشور خورده}}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{\text{هاشور خورده}}} = \dfrac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

از ضرب دو رابطه به‌دست آمده (۲) و (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{\text{سایه}}} = \frac{1}{12} = \frac{S_{APQ}}{S_{\text{سایه}}} = \simeq 8/3\ \%$$

راه حل دوم: اگر اضلاع AB و AC را به قسمت‌های مساوی تقسیم کنیم طبق قضیهٔ تالس نسبت مساحت‌های محدود بین خطوط موازی دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.



$$\frac{S_{\text{کوچک‌ترین مثلث}}}{S_{\text{هاشورخورده}}} \times 100 = \frac{S}{12S} \times 100$$

$$= \frac{1}{12} \times 100 = 8/3\ \%$$

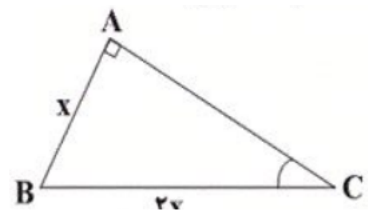
۵ نقطهٔ O درون مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $BC = ۲AB$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ از هر سه ضلع آن به یک فاصله است. اندازهٔ زاویهٔ AOB چند برابر اندازهٔ زاویهٔ AOC است؟

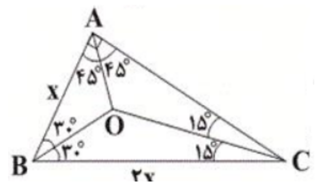
۱) ۰/۸۷۵ **۲)** ۰/۷۵ **۳)** ۰/۵ **۴)** ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا توجه کنید که در شکل زیر داریم:





$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ$$

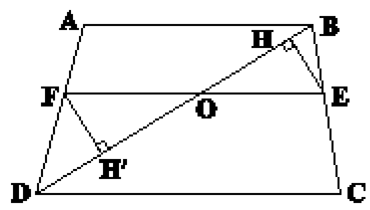
نقطه‌ای که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی آن است، پس در شکل زیر OA، OB و OC به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های A، B و C هستند. در دو مثلث OAB و OAC مجموع زاویه‌های داخلی را برابر ۱۸۰° قرار می‌دهیم تا $A\hat{O}B$ و $A\hat{O}C$ را به دست آوریم:

$$۴۵^\circ + ۳۰^\circ + A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۰۵^\circ$$

$$۴۵^\circ + ۱۵^\circ + A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C} = \frac{۱۰۵^\circ}{۱۲۰^\circ} = \frac{۷}{۸} = ۰/۸۷۵$$

۶ اگر در ذوزنقهٔ روبه‌رو $AB = \frac{3}{4}CD$ و $CE = 2BE$ حاصل $\frac{EH}{FH'}$ کدام است؟ (FE موازی قاعده‌های ذوزنقه است.)



۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{4}$

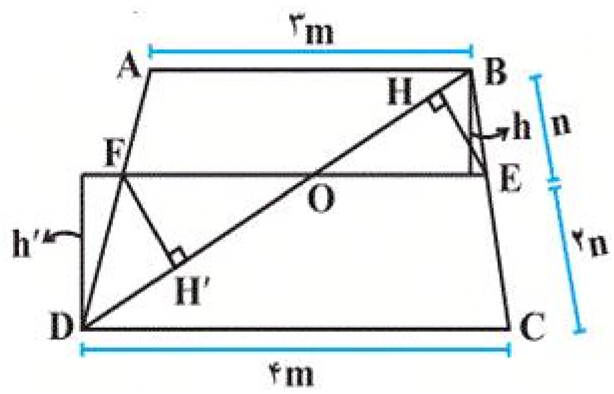
۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اطلاعات داده شده

شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم:

$$S_{\overset{\triangle}{OBE}} = \frac{OE \times h}{2}$$

$$S_{\overset{\triangle}{OFD}} = \frac{OF \times h'}{2}$$

حال داریم: $\frac{h}{h'} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow h' = 2h$

$$\overset{\triangle}{BCD}: \frac{OE}{CD} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{OE}{4m} = \frac{n}{3n} \Rightarrow OE = \frac{4}{3}m$$

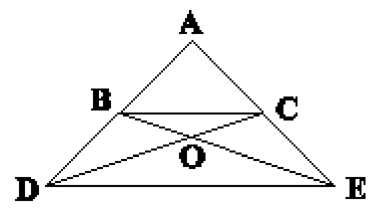
$$\overset{\triangle}{BDA}: \frac{OF}{AB} = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{OF}{3m} = \frac{2n}{3n} \Rightarrow OF = 2m$$

در نهایت:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OBE}}}{S_{\overset{\triangle}{OFD}}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}m \times h}{\frac{1}{2} \times 2m \times 2h} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{OBE}}}{S_{\overset{\triangle}{OFD}}} = \frac{\frac{1}{2} \times EH \times OB}{\frac{1}{2} \times FH' \times OD}$$

$$= \frac{n \times EH}{2n \times FH'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EH}{FH'} = \frac{2}{3}$$

۷) در شکل زیر، $BC \parallel DE$ و $\frac{AB}{AD} = \frac{۱}{۴}$ است. مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ چند برابر مساحت مثلث OBC است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

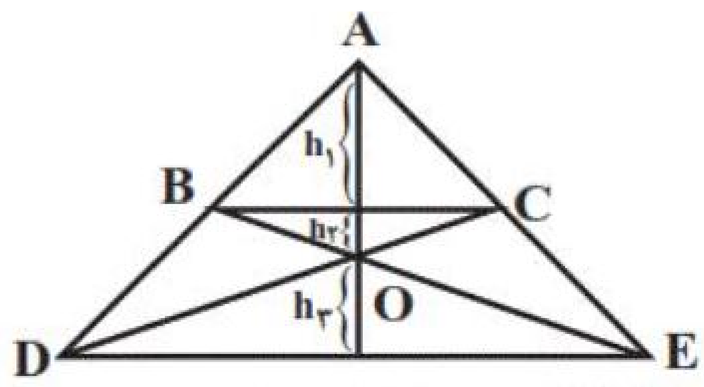
۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به قاعده تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱}{۴} = \frac{h_۱}{h_۱ + h_۲ + h_۳} \quad (*)$$



دو مثلث OBC و ODE متشابه‌اند. داریم:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{h_۲}{h_۳} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow h_۳ = ۴h_۲ \quad (**)$$

با جای‌گذاری (**) در (*) داریم:

$$\frac{۱}{۴} = \frac{h_۱}{h_۱ + h_۲ + ۴h_۲} \Rightarrow h_۱ + ۵h_۲ = ۴h_۱ \Rightarrow h_۲ = \frac{۳}{۵}h_۱$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{OBC}} = \frac{\frac{h_۱ \times BC}{۲}}{\frac{h_۲ \times BC}{۲}} = \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{h_۱}{\frac{۳}{۵}h_۱} = \frac{۵}{۳}$$

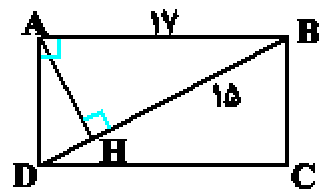
⑧ در مستطیل ABCD به طول AB = ۱۷، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر BH = ۱۵ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱

شکل سؤال را رسم می‌کنیم:



طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$AB^۲ = BH \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^۲}{۱۵} = \frac{۲۸۹}{۱۵}$$

حال BD − ۱۹ را محاسبه می‌کنیم:

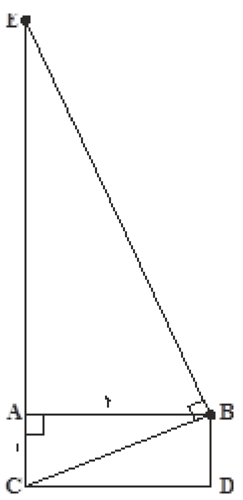
$$BD - ۱۹ = \frac{۲۸۹}{۱۵} - \frac{۱۵\times۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹-۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

⑨ در یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۱ واحد، از یکی از رئوس، خطی عمود بر قطر گذرنده از آن رأس، رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در نقطه E قطع کند. فاصله E تا رأس دیگر قطر مذکور کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

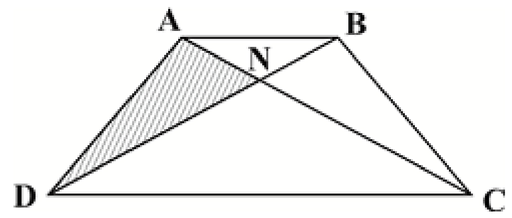
مثلثBCE قائم‌الزاویه است و طول مستطیل ABDC ارتفاع وارد بر وترEC است. براساس روابط طولی می‌دانیم که ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی قطعات ایجاد شده بر روی وتر است. یعنی:



$$(AB)^۲ = EA \times AC$$

$$\Rightarrow ۴^۲ = EA \times ۱ \Rightarrow EA = ۱۶ \Rightarrow EC = ۱۷$$

(۱۰) اگر در ذوزنقه ABCD شکل زیر، $DC = \frac{۳}{۲}AB$ باشد، مساحت ناحیه هاشورخورده چند درصد مساحت ذوزنقه است؟



۱) ۳۶

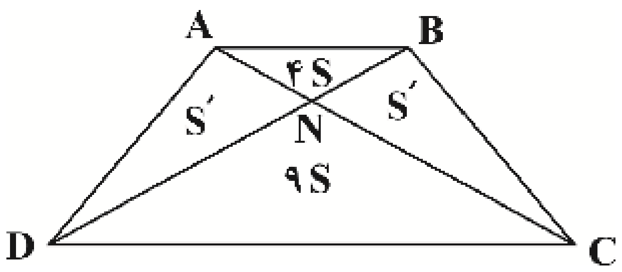
۲) ۱۸

۳) ۱۲

۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۴

دو مثلث $A\hat{N}B$ و $C\hat{N}D$ به حالت دو زاویه برابر متشابهند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۳}{۲}$ است.



می‌دانیم در ذوزنقه شکل بالا مساحت دو مثلث کناری برابر و (S′) است. چون نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۳}{۲}$ است. پس $\frac{NC}{NA} = \frac{۳}{۲}$

از آنجا که NC و NA قاعده‌های دو مثلث DNC و DNA با ارتفاع برابرند، پس:

$۹S = \frac{۳}{۲}S' \Rightarrow S' = ۶S$

حال:

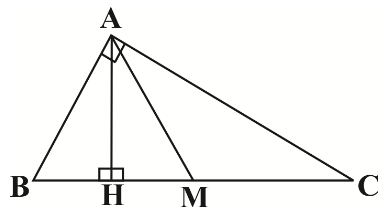
$\frac{S'}{۲S'+۱۳S} = \frac{۶S}{۲۵S} = \frac{۶}{۲۵} = \%۲۴$

۱۱) کوچکترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازهٔ ارتفاع و میانه وارد بر وتر در آن به ترتیب $۲\sqrt{۲}$ و ۳ واحد می‌باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

$$AM = ۳ \xrightarrow[\text{میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است}]{AM \text{ میانه است}}$$
$$BM = CM = ۳ \rightarrow BC = ۶$$



$$AH^{۲} = BH \times CH \rightarrow (۲\sqrt{۲})^{۲} = BH \times CH \Rightarrow BH \times CH = ۸$$

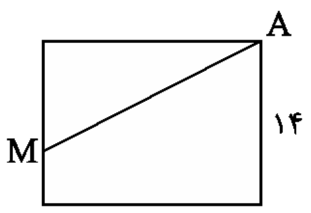
از طرفی : $BH + CH = ۶ \Rightarrow CH = ۶ - BH$

$$\Rightarrow BH(۶ - BH) = ۸ \Rightarrow BH^{۲} - ۶BH + ۸ = ۰ \Rightarrow (BH - ۴) \times (BH - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = ۴ \\ BH = ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} BH = ۲ \Rightarrow CH = ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^{۲} = BH \times BC = ۲ \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳} \\ AC^{۲} = CH \times BC = ۴ \times ۶ = ۲۴ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۶} \end{cases}$$

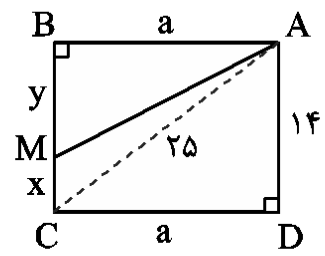
⑫ در شکل زیر، پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره‌خط AM چند واحد است؟



۱) ۲۱
۲) ۲۳
۳) $۹\sqrt{۷}$
۴) $۱۰\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD می‌توان نوشت:



$$AC^{۲} = AD^{۲} + CD^{۲} \Rightarrow ۶۲۵ = ۱۹۶ + a^{۲}$$

$$\Rightarrow a^{۲} = ۴۲۹ \ (*)$$

از طرفی طبق فرض سؤال:

$$\frac{S(ABM)}{S(ADCM)} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \frac{S(ABM)}{S(ABM)+S(ADCM)} = \frac{۵}{۵+۹}$$

$$\frac{S(ABM)}{S(ABCD)} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow \frac{\frac{ay}{۲}}{۱۴a} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow y = ۱۰ \ (**)$$

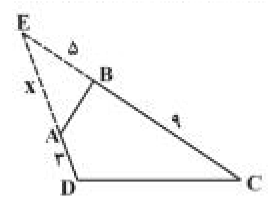
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM، می‌توان نوشت:

$$AM^{۲} = AB^{۲} + BM^{۲} \Rightarrow AM^{۲} = a^{۲} + y^{۲}$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} AM^{۲} = ۴۲۹ + ۱۰۰ = ۵۲۹$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{۵۲۹} = ۲۳$$

۱۳) در چهار ضلعی ABCD زوایای روبه‌رو مکمل هم هستند و امتداد اضلاع AD و BC در E متقاطع‌اند. مساحت مثلث CDE چند برابر مساحت چهارضلعی است؟



۱) $\frac{۵}{۴}$

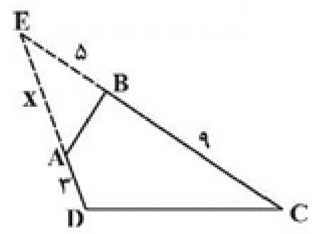
۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

$\widehat{B} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ$ است، پس زاویهٔ خارجی رأس B با زاویهٔ D برابر است و زاویهٔ E در هر دو مثلث ABE و CDE مشترک است. پس دو مثلث ABE و CDE متشابه‌اند.

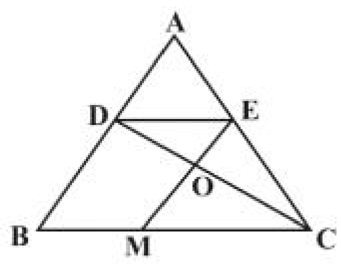


$$\frac{۵}{x+۳} = \frac{x}{۱۴} \Rightarrow x^۲ + ۳x = ۷۰$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۷۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۰)(x-۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱۰ & \text{غ ق ق} \\ x = ۷ \end{cases}$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \left(\frac{۵}{۷+۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{CDE} - S_{ABE}}{S_{CDE}}$$
$$= \frac{S_{ABCD}}{S_{CDE}} = \frac{۴-۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ABCD}} = \frac{۴}{۳}$$

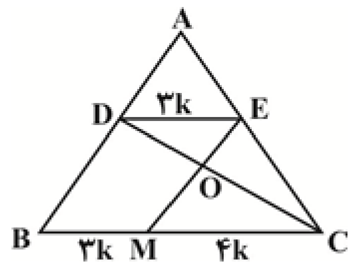
۱۴) در شکل زیر، $S_{ODE} = \frac{۹}{۱۶}S_{OMC}$ و چهار ضلعی DEMB متوازی‌الاضلاع است. مساحت ذوزنقه DECB چند برابر مساحت مثلث ADE است؟



۱) ۳
۲) $\frac{۴۰}{۹}$
۳) $\frac{۴۹}{۹}$
۴) $\frac{۴۱}{۹}$

پاسخ: گزینه ۲

چون DEMB متوازی‌الاضلاع است، پس DE||MC و در نتیجه $\overset{\Delta}{OD}E$ و $\overset{\Delta}{OC}M$ به حالت (زز) متشابهند.



$$\frac{S_{ODE}}{S_{OMC}} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \left(\frac{DE}{MC}\right)^{۲} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{DE}{MC} = \frac{۳}{۴}$$

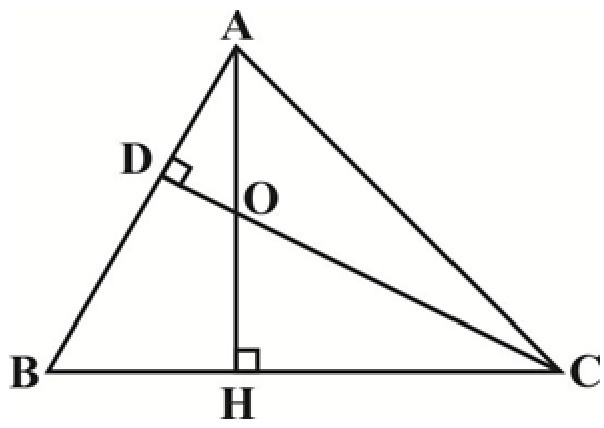
$$\Rightarrow \begin{cases} DE = ۳k \Rightarrow MB = ۳k \\ MC = ۴k \end{cases} \Rightarrow BC = ۷k$$

با توجه به شکل و طبق قضیه تالس (DE||BC) داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{۳k}{۷k}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴۹} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DECB}} = \frac{۹}{۴۹-۹} = \frac{۹}{۴۰}$$

پس مساحت ذوزنقه $\frac{۴۰}{۹}$ برابر مساحت مثلث ADE است.

۱۵ در شکل مقابل $OA = OH = \sqrt{۳۳}$ و $CD = ۱۴$ می‌باشد. اندازه ضلع AC کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵۵}$

۲) $۲\sqrt{۵۷}$

۳) $۲\sqrt{۵۱}$

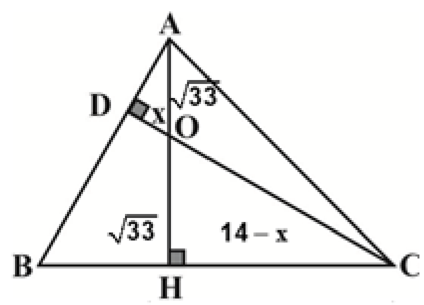
۴) $۲\sqrt{۵۳}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} C\hat{O}H = A\hat{O}D \\ \hat{H} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} OA\hat{D} \sim OC\hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۳۳}} = \frac{\sqrt{۳۳}}{۱۴-x} \Rightarrow ۱۴x - x^۲ = ۳۳$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱۴x + ۳۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۱۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \quad \text{ق ق} \\ x = ۱۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$



توجه کنید چون در مثلث OAD، (OA) وتر است، پس $OD = x$ باید کمتر از $\sqrt{۳۳}$ باشد.

$$O\overset{\Delta}{A}D : AD^۲ = OA^۲ - OD^۲ = ۳۳ - ۹ = ۲۴$$

$$A\overset{\Delta}{D}C : AC^۲ = AD^۲ + CD^۲$$
$$= ۲۴ + ۱۹۶ = ۲۲۰ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۵۵}$$

۱۶) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{A}=90^\circ)$، ارتفاع AH رسم شده است. اگر مساحت مثلث ABC ۱/۸ برابر مساحت مثلث ABH باشد. نسبت فواصل پای ارتفاع وارد بر وتر از دو ضلع قائمه مثلث ABC چقدر است؟

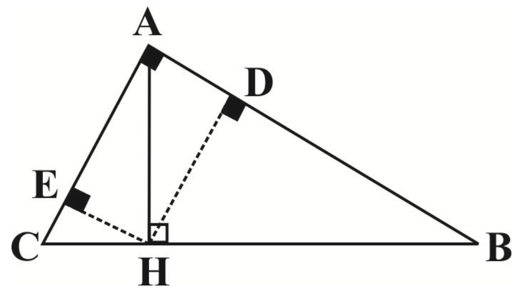
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به فرض مسأله:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=1/8=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}\Rightarrow\frac{S_{ABC}-S_{ABH}}{S_{ABH}}=\frac{9-5}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ACH}}{S_{ABH}}=\frac{4}{5}$$



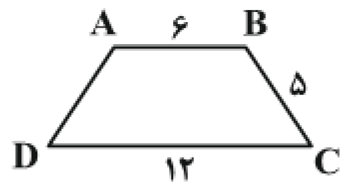
از طرفی مثلث‌های ACH و ABH متشابه‌اند و می‌دانیم که در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه برابر است، پس:

$$k^2=\frac{4}{5}\Rightarrow k=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

EH و DH به ترتیب ارتفاع‌های مثلث‌های ACH و BHA هستند و می‌دانیم که در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها با نسبت تشابه برابر است، پس:

$$k=\frac{EH}{DH}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{DH}{EH}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

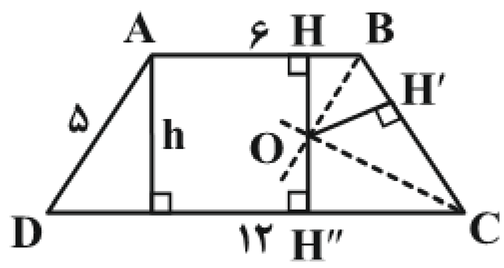
۱۷) در ذوزنقه متساوی‌الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C هم‌دیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. فاصله O از ضلع BC کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۱

طبق خاصیت نیمساز داریم:



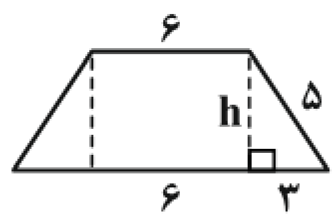
$\begin{cases} OH = OH' : \text{O} \text{روی نیمساز زاویه ی B است.} \\ OH' = OH'' : \text{O} \text{روی نیمساز زاویه ی C است.} \end{cases}$

$\Rightarrow OH = OH' = OH''$

ارتفاع ذوزنقه برابر است با:

$h = OH' = OH'' \xrightarrow{OH=OH''} 2OH \xrightarrow{OH=OH'} 2OH'$

با توجه به ابعاد داده شده، ارتفاع ذوزنقه را می‌یابیم:



$\Rightarrow h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow h = 4$

بنابراین: $2OH' = 4 \Rightarrow OH' = 2$

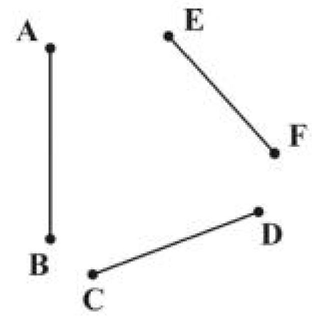
پس فاصله O از ضلع BC که همان OH' است، برابر ۲ می‌شود.

۱۸) در شکل زیر نقطه‌ای وجود دارد که فاصلهٔ آن از A و B یکسان، از C و D یکسان و از E و F نیز یکسان است. چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

الف) محل برخورد عمودمنصف‌های AB و EF روی عمودمنصف CD قرار دارد.

ب) محل برخورد عمو منصف های سه پاره خط CD,AB و EF از شش نقطه E,D,C,B,A و F به یک فاصله است

پ)از امتداد سه پاره خط CD,AB و EF مثلثی به دست می‌آید که عمودمنصف‌های آن مثلث همان عمودمنصف‌های سه پاره‌خط داده شده است.

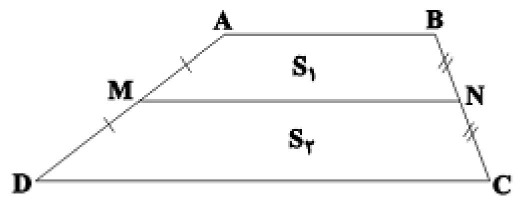


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ

پاسخ: گزینه ۱

چون نقطه‌ای وجود دارد که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله و از دو سر پاره خط EF به یک فاصله است پس روی عمودمنصف‌های AB و EF قرار دارد همچنین از دو سر پاره خط CD به یک فاصله است، پس روی عمود منصف CD قرار دارد. پس مورد (الف) درست است. اما لزوماً موارد (ب) و (پ) درست نیست.

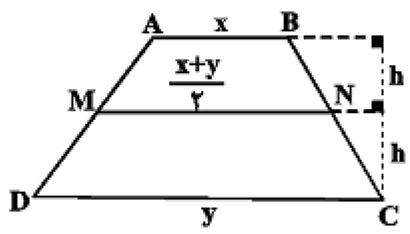
۱۹) در ذوزنقهٔ زیر، M و N به‌ترتیب وسط اضلاع AD و BC هستند. در این ذوزنقه S_1 مساحت ABNM و S_2 مساحت MNCD هستند. اگر نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ برابر $\frac{5}{7}$ باشد، $\frac{AB}{DC}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۳

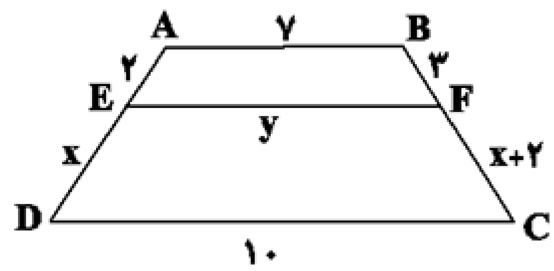
گزینهٔ «۳»



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(x+\frac{x+y}{2})(h)}{\frac{1}{2}(\frac{x+y}{2}+y)(h)} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{3x+y}{x+3y} = \frac{5}{7} \Rightarrow 21x + 7y = 5x + 15y \Rightarrow 16x = 8y \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

۲۰) در شکل زیر EF موازی قاعده‌های ذوزنقهٔ ABCD است. مقدار $x+y$ کدام است؟



۱) ۱۶

۲) ۱۵

۳) ۱۴

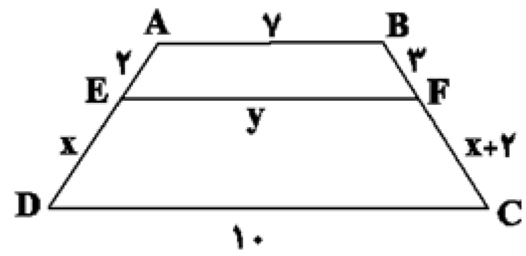
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$EF \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{۳}{x+۲}$$
$$\Rightarrow ۲x + ۴ = ۳x \Rightarrow x = ۴$$

بنابراین شکل به صورت زیر است. با رسم قطر BD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD} : EM \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AB}$$
$$\Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{EM}{۷} \Rightarrow EM = \frac{۲۸}{۶} = \frac{۱۴}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{BDC} : MF \parallel DC \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{MF}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۹} = \frac{MF}{۱۰}$$
$$\Rightarrow MF = \frac{۳۰}{۹} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow y = EF = \frac{۱۴}{۳} + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

$$\Rightarrow x + y = ۴ + ۸ = ۱۲$$

۲۱) در مثلث ABC داریم: $AB = ۳$، $AC = ۴$ و $BC = ۵$ است. از رأس C موازی با ارتفاع AH خطی رسم می‌کنیم که امتداد ضلع AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. حاصل $BH \times DC$ کدام است؟ (H روی ضلع BC است)

۱) ۱۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

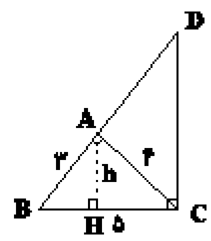
پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

چون: $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$

در نتیجه مثلث ABC قائم الزاویه است. ($\hat{A} = ۹۰°$)

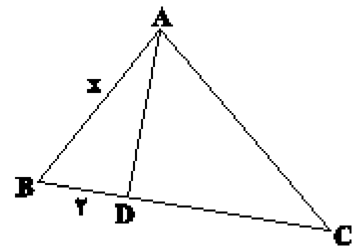
$h \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h = ۲/۴$



تعمیم قضیهٔ تالس در $\overset{\Delta}{BDC}$ $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AH}{DC} = \frac{BH}{BC}$

$\Rightarrow \frac{۲/۴}{DC} = \frac{BH}{۵} \Rightarrow BH \times DC = ۲/۴ \times ۵ = ۱۲$

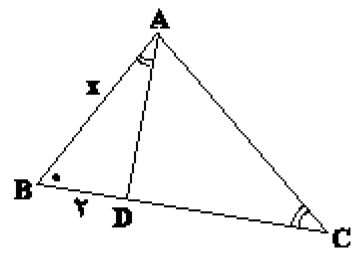
۲۲ در شکل مقابل، $B\hat{A}D = A\hat{C}D$ و مساحت مثلث ADC، ۱۵ برابر مساحت مثلث ABD می‌باشد. مقدار x کدام است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»



$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B} \\ B\hat{A}D = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow[\text{دوزاویه}]{\text{تساوی}} \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

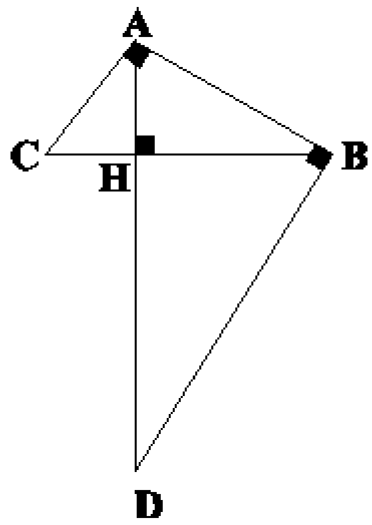
اگر مساحت ΔABD را S بگیریم، مساحت ΔABC، ۱۶s می‌شود.

می‌دانیم اگر K نسبت تشابه دو مثلث متشابه باشد، نسبت مساحت آن‌ها $K^۲$ می‌شود.

$$K^۲ = \frac{\Delta ABC \text{ مساحت}}{\Delta ABD \text{ مساحت}} = \frac{۱۶S}{S} \Rightarrow K = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲} = ۴ \Rightarrow x = ۸$$

۲۳) با توجه به شکل زیر، اگر $BC = \frac{۵}{۴}AB = ۵$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط BD کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۲۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$BC = \frac{۵}{۴}AB = ۵ \Rightarrow \begin{cases} BC = ۵ \\ AB = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC = ۳$$

دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و ABD زوایای حادهٔ برابر دارند. پس متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB^۲}{AC} = \frac{۱۶}{۳}$$

۲۴) با توجه به تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، اگر $a^۳ - c^۳ = ۶۴$ و $b^۳ - d^۳ = ۲۷$ باشد، آنگاه $b^۲$ چند برابر $a^۲$ است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

با توجه به خواص نسبت و تناسب داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین با وسطین}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

حال دو طرف تساوی $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \xrightarrow{\text{طرفین تناسب به توان ۳}} \frac{a^۳}{c^۳} = \frac{b^۳}{d^۳}$$

اکنون از خاصیت تفضیل نسبت در صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a^۳}{c^۳} = \frac{b^۳}{d^۳} \Rightarrow \frac{a^۳-c^۳}{c^۳} = \frac{b^۳-d^۳}{d^۳} \Rightarrow \frac{۶۴}{c^۳} = \frac{۲۷}{d^۳}$$

$$\Rightarrow \frac{c^۳}{d^۳} = \frac{۶۴}{۲۷} \Rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^۳ = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۳ \xrightarrow{\sqrt[۳]{}} \frac{c}{d} = \frac{۴}{۳} \quad (*)$$

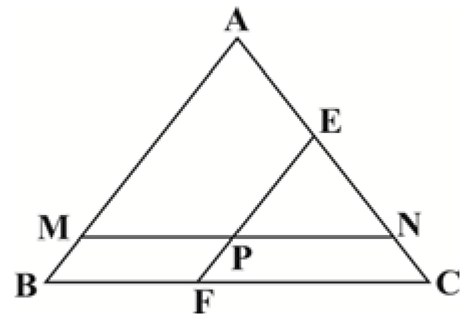
از طرفی با توجه به اطلاعات سؤال می‌دانیم که $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ است. پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{(*)} \frac{a}{b} = \frac{۴}{۳}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{\text{طرفین تناسب به توان ۲}} \frac{a^۲}{b^۲} = \frac{۱۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

۲۵ در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم: BC=۸ و AC=۶، خط MN به موازات BC و به طول ۶ رسم شده است و خط EF به موازات AB از وسط MN گذشته است. طول EC کدام است؟



۱) ۳/۲۵
۲) ۳/۷۵
۳) ۲/۵
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$MN \| BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AN}{۶} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow AN = ۴/۵$$

$$\Rightarrow NC = AC - AN = ۶ - ۴/۵ = ۱/۵$$

از طرفی:

$$EP \| AM \Rightarrow \frac{NE}{NA} = \frac{NP}{NM} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{NE}{۴/۵} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow NE = ۲/۲۵$$

بنابراین: $EC = NE + NC = ۲/۲۵ + ۱/۵ = ۳/۷۵$