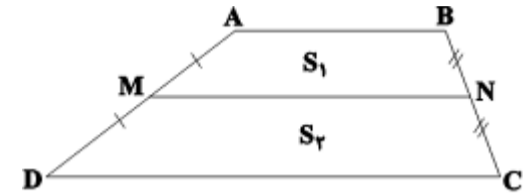




۱) در ذوزنقه زیر، M و N به ترتیب وسط اضلاع AD و BC هستند. در این ذوزنقه S_1 مساحت ABNM و S_2 مساحت MNCD هستند. اگر نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ برابر $\frac{5}{7}$ باشد، کدام است $\frac{AB}{DC}$ ؟



(۴) $\frac{3}{5}$

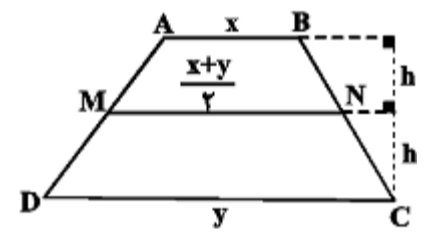
(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{5}{7}$

(۱) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

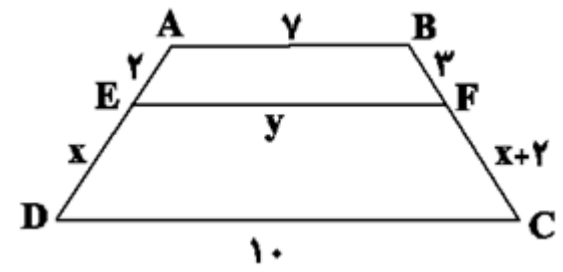
گزینه «۳»



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(x + \frac{x+y}{2})(\frac{h}{2})}{\frac{1}{2}(\frac{x+y}{2} + y)(\frac{h}{2})} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{3x+y}{x+3y} = \frac{5}{7} \Rightarrow 21x + 7y = 5x + 15y \Rightarrow 16x = 8y \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

۲) در شکل زیر EF موازی قاعده‌های ذوزنقه ABCD است. مقدار $x+y$ کدام است؟



۱۶ (۱)

۱۵ (۲)

۱۴ (۳)

۱۲ (۴)

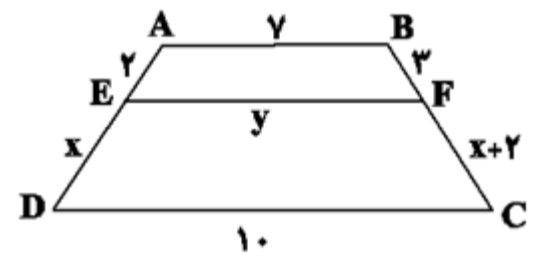
پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$EF \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{x+2}$$

$$\Rightarrow 2x + 4 = 3x \Rightarrow x = 4$$

بنابراین شکل به صورت زیر است. با رسم قطر BD داریم:



$$\triangle ABD : EM \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{EM}{y} \Rightarrow EM = \frac{2y}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\triangle BDC : MF \parallel DC \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{MF}{DC} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{MF}{10}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{30}{9} = \frac{10}{3} \Rightarrow y = EF = \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\Rightarrow x + y = 4 + 8 = 12$$

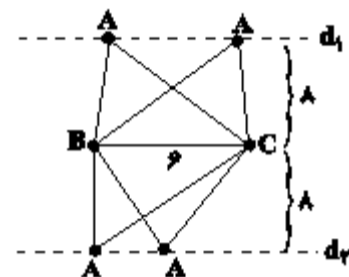
۳) طول ضلع BC از مثلث ABC به مساحت ۲۴، برابر ۶ است. مکان هندسی رأس A کدام است؟

- ۱) دو خط موازی با ضلع BC و به فاصله ۸ از آن
- ۲) دو خط موازی با ضلع BC و به فاصله ۴ از آن
- ۳) دایره‌ای به شعاع ۸ و به مرکز وسط ضلع BC
- ۴) دایره‌ای به شعاع ۴ و به مرکز وسط ضلع BC

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

$$S = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 6 \times \text{ارتفاع} \Rightarrow \text{ارتفاع} = 8$$



رأس A باید روی یکی از دو خط d_1 یا d_2 باشد تا ارتفاع مثلث ۸ باشد.

پس مکان هندسی A برابر دو خط موازی با قاعده مثلث و به فاصله ۸ از آن است.

۴) در مثلث ABC داریم: $AB = 3$ ، $AC = 4$ ، و $BC = 5$ است. از رأس C موازی با ارتفاع AH خطی رسم می‌کنیم که امتداد ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند. حاصل $DC \times BH$ کدام است؟ (H روی ضلع BC است)

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

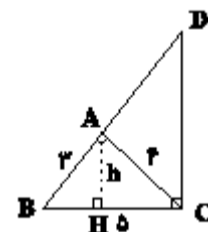
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون: $5^2 = 4^2 + 3^2$

در نتیجه مثلث ABC قائم الزویه است. ($\hat{A} = 90^\circ$)

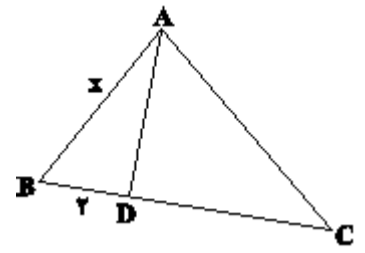
$$h \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow h = 2/4$$



$$\Delta BDC \text{ در تعمیم قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AH}{DC} = \frac{BH}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{2/4}{DC} = \frac{BH}{5} \Rightarrow BH \times DC = 2/4 \times 5 = 12$$

۵) در شکل مقابل، $\hat{B}AD = \hat{A}CD$ و مساحت مثلث ADC ، ۱۵ برابر مساحت مثلث ABD می باشد. مقدار x کدام است؟



۶ (۱)

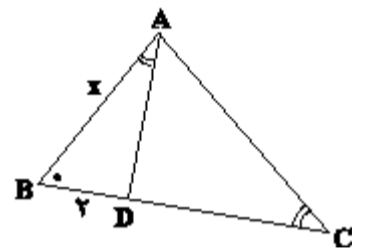
۸ (۲)

۹ (۳)

۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»



$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{B}AD = \hat{A}CD \end{cases} \xrightarrow[\text{دو زاویه}]{\text{تساوی}} \triangle ABD \sim \triangle ABC$$

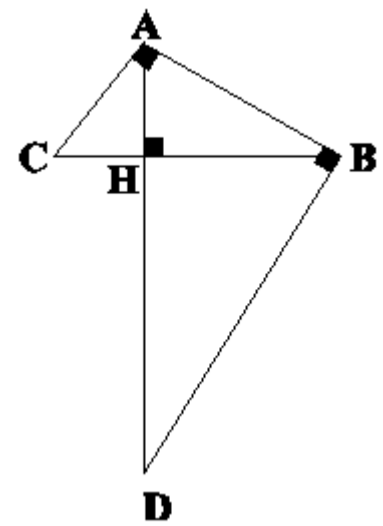
اگر مساحت $\triangle ABD$ را S بگیریم، مساحت $\triangle ABC$ ، $۱۶S$ می شود.

می دانیم اگر K نسبت تشابه دو مثلث متشابه باشد، نسبت مساحت آن ها $K^۲$ می شود.

$$K^۲ = \frac{\text{مساحت } \triangle ABC}{\text{مساحت } \triangle ABD} = \frac{۱۶S}{S} \Rightarrow K = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = ۴ \Rightarrow x = ۸$$

۶) با توجه به شکل زیر، اگر $BC = \frac{5}{4}AB = 5$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط BD کدام است؟



۱۲/۵ (۴)

۱۶/۵ (۳)

۲۰/۳ (۲)

۱۶/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$BC = \frac{5}{4}AB = 5 \Rightarrow \begin{cases} BC = 5 \\ AB = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC = 3$$

دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و ABD زوایای حاده برابر دارند. پس متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{16}{3}$$

۷) در مثلث ABC داریم: $AC = 3AB$ و $\hat{A} = 90^\circ$. ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت $\triangle ABC$ چند برابر مساحت $\triangle AMH$ است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

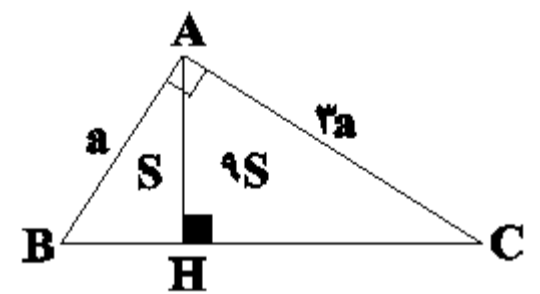
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

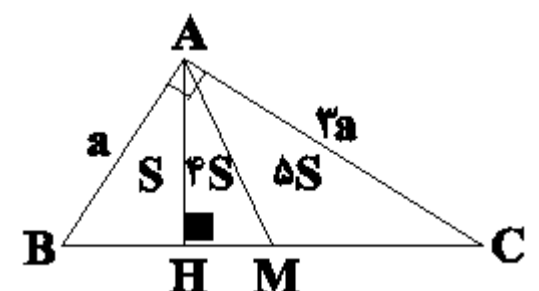
گزینه «۲»

چون در این سؤال، نسبت مساحت‌ها خواسته شده، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مساحت مثلث را به نسبت مجذور اضلاع تقسیم می‌کند و در نتیجه داریم:

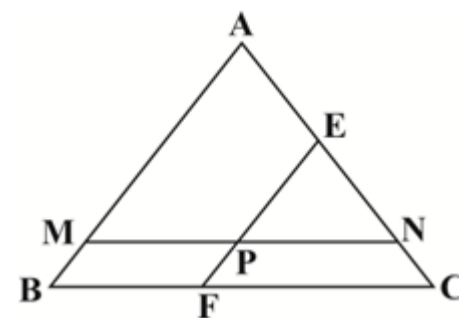


از طرفی میانه وارد بر وتر، مساحت را نصف می‌کند. در نتیجه در هر طرف میانه $\frac{1}{2}S$ قرار می‌گیرد و اگر ارتفاع و میانه را با هم در یک شکل رسم کنیم، آنگاه تقسیم مساحت به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMH}} = \frac{10S}{S} = 10$$

۸ در مثلث $\triangle ABC$ داریم: $BC=8$ و $AC=6$ ، خط MN به موازات BC و به طول ۶ رسم شده است و خط EF به موازات AB از وسط MN گذشته است. طول EC کدام است؟



(۱) $3/25$

(۲) $3/75$

(۳) $2/5$

(۴) 2

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AN}{6} = \frac{6}{8} \Rightarrow AN = 4/5$$

$$\Rightarrow NC = AC - AN = 6 - 4/5 = 1/5$$

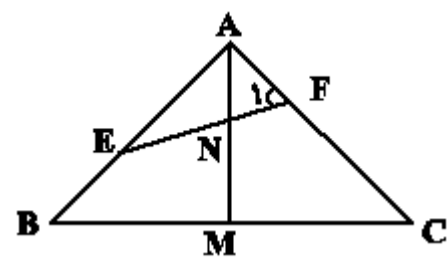
از طرفی:

$$EP \parallel AM \Rightarrow \frac{NE}{NA} = \frac{NP}{NM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NE}{4/5} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow NE = 2/25$$

$$EC = NE + NC = 2/25 + 1/5 = 3/25 \quad \text{بنابراین:}$$

۹ در شکل زیر، $\hat{A} = \hat{B}$ ، $F_1 = \hat{B}$ ، $NM = 2AN$ و AM نیمساز زاویه A است. مساحت چهارضلعی $EFCB$ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



- (۱) $\frac{4}{9}$
- (۲) $\frac{8}{9}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{14}{3}$

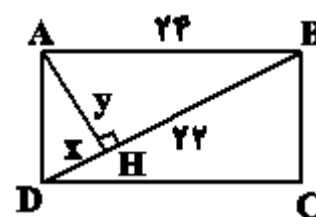
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دو مثلث AEF و ABC به حالت تساوی دو زاویه ($\hat{A} = \hat{B}$ و $F_1 = \hat{B}$ مشترک)، متشابه‌اند. AM نیمساز زاویه A بوده لذا نسبت نیمسازهای دو مثلث که با نسبت اضلاع متناظر برابر است را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{AN}{AM} &= \frac{AN}{AN + NM} = \frac{AN}{AN + 2AN} = \frac{AN}{3AN} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC} - S_{EFCB}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{EFCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{S_{EFCB}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

۱۰) در شکل روبه‌رو ABCD مستطیل است. مقدار $x+y^2$ تقریباً کدام است؟ (BH = ۲۲)



۹۸/۵ (۲)

۹۲/۵ (۴)

۹۶/۱۸ (۱)

۹۴/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم:

$$y^2 = AB^2 - BH^2 = 22^2 - 22^2 = 576 - 484 = 92$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$AH^2 = DH \times BH \Rightarrow y^2 = x \times 22$$

$$\xrightarrow{y^2=92} 92 = 22x \Rightarrow x = \frac{92}{22} \approx 4.18$$

$$\Rightarrow x + y^2 = 4.18 + 92 = 96.18$$

۱۱) نسبت تشابه دو مثلث متشابه برابر $\frac{3}{7}$ و محیط مثلث بزرگ‌تر 20° واحد بیشتر از محیط مثلث کوچک‌تر است. مجموع محیط‌های دو مثلث چند واحد است؟

۵۰ (۴)

۴۵ (۳)

۶۰ (۲)

۶۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر P و P' محیط‌های دو مثلث متشابه باشند، داریم:

$$\begin{cases} \frac{P}{P'} = \frac{3}{7} \\ P' = P + 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P+20} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7P = 3P + 60 \Rightarrow 4P = 60 \Rightarrow P = 15$$

$$\Rightarrow P' = 35$$

بنابراین: $P + P' = 15 + 35 = 50$

۱۲) نقطه A بیرون خط d، به فاصله ۱۲ واحد از آن قرار دارد. چند نقطه می‌توان در صفحه یافت که از A به فاصله ۸ و از d به فاصله ۱۰ باشند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

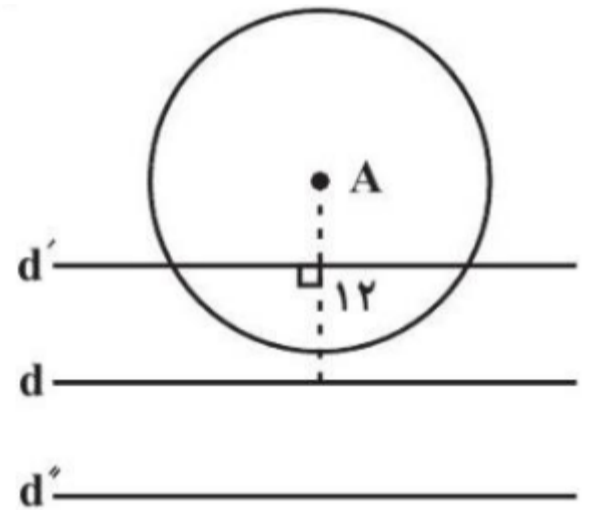
۲ (۲)

۱) صفر

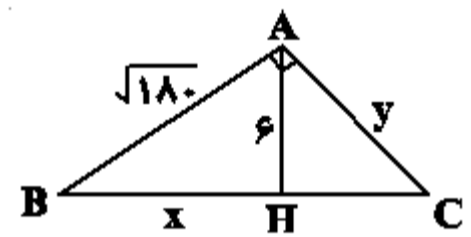
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تمام نقاطی که از نقطه A به فاصله ۸ واحد قرار دارند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۸ واحد است. تمام نقاطی که از خط d به فاصله ۱۰ واحد قرار دارند دو خط موازی d' و d'' در دو طرف d به فاصله ۱۰ واحد قرار دارند. بنابراین نقاط مشترک دایره با دو خط d' و d'' جواب مسئله است که با توجه به شکل دو نقطه می‌توان یافت.



۱۳) در شکل زیر $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه و AH ارتفاع است. مقدار $y+x$ کدام است؟



۲) $4\sqrt{5}+10$

۴) $4\sqrt{5}+12$

۱) $3\sqrt{5}+12$

۳) $3\sqrt{5}+10$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$x^2 = (\sqrt{180})^2 - 6^2 = 180 - 36 = 144 \Rightarrow x = 12$$

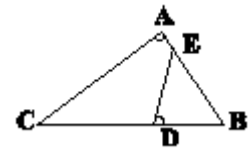
با توجه به رابطه طولی $AH^2 = BH \times CH$ داریم:

$$6^2 = x \times CH \xrightarrow{x=12} 36 = 12 \times CH \Rightarrow CH = 3$$

$$\text{رابطه فیثاغورس: } y^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow y+x = 3\sqrt{5}+12$$

۱۴) در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$ ، $BE = 4AE$ و $BC = 3BD$ می‌باشد. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث BDE کدام است؟



$$\frac{10}{4} \quad (2)$$

$$\frac{20}{4} \quad (4)$$

$$\frac{15}{4} \quad (1)$$

$$\frac{15}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

فرض $AE = x \Rightarrow BE = 4x \Rightarrow AB = 5x$

فرض $BD = y \Rightarrow BC = 3y$

چون $\hat{A} = \hat{D}$ و زاویه مشترک بین دو مثلث متشابه‌اند، پس داریم:

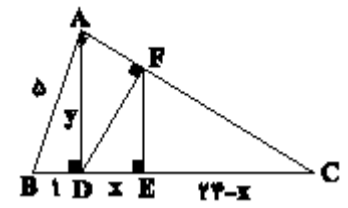
نسبت اضلاع مثلث ABC به مثلث BDE $\frac{BC}{BE} = \frac{AB}{BD} = k$

$$\Rightarrow \frac{3y}{4x} = \frac{5x}{y} = k$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{20}{3} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDE}} = k^2 = 25 \times \frac{x^2}{y^2} \xrightarrow{(1)} 25 \times \frac{3}{20} = \frac{15}{4}$$

۱۵) در شکل مقابل مقدار $x+y$ کدام است؟



$$2/9 + 4\sqrt{6} \quad (2)$$

$$1/9 + 2\sqrt{6} \quad (4)$$

$$2/49 + 4\sqrt{6} \quad (1)$$

$$0/96 + 2\sqrt{6} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چون $AD \parallel EF$ است، در مثلث ADC داریم:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{DE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{x}{24-x} \quad (1)$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{1}{24-x+1} = \frac{1}{24-x} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{x}{24-x} = \frac{1}{24-x} \Rightarrow 24x = 24 - x$$

$$25x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{25} = 0/96$$

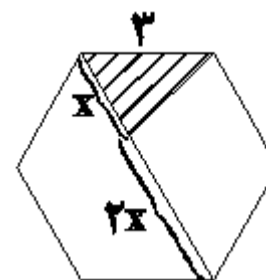
$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 25 - 1 = 24$$

$$AD = y = 2\sqrt{6}$$

$$x + y = 0/96 + 2\sqrt{6}$$

و چون $DF \parallel AB$ است در مثلث ABC داریم:

۱۶) در شش ضلعی منتظم مقابل، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



(۱) $6\sqrt{3}$

(۲) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

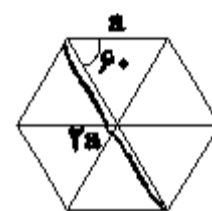
(۳) $3\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر در یک شش ضلعی منتظم ۳ قطر بزرگ شش ضلعی را رسم کنیم، ۶ مثلث متساوی الاضلاع هم‌نهشت خواهیم داشت. پس طول قطر بزرگ طبق شکل زیر دو برابر طول هر ضلع خواهد بود.



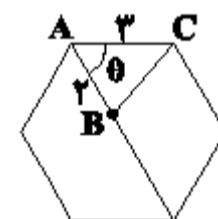
با توجه به این که طول ضلع شش ضلعی، ۳ واحد است، پس طول قطر بزرگ آن ۶ واحد خواهد بود.

$$x + 2x = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 60^\circ$$

$$\text{مساحت مثلث رنگی} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



۱۷) چه تعداد از جملات زیر، نادرست است؟

الف- مرکز دایره محاطی مثلث، محل تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است.

ب- از نقطه‌ای خارج یک خط، می‌توان دو خط بر آن خط عمود کرد.

پ- مساحت هر مثلثی از مساحت هر مستطیل بیشتر است.

ت- هر چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

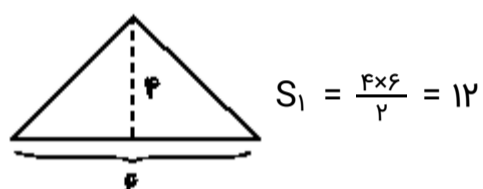
پاسخ: گزینه ۳

جمله‌های الف و ت درست هستند.

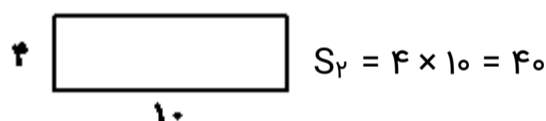
بررسی سایر جمله‌ها:

جمله «ب»: از نقطه‌ای خارج یک خط، تنها یک خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد.

جمله «پ»: با توجه به شکل‌های زیر داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 < S_2$$



۱۸) در یک مستطیل به طول اضلاع ۳ و ۱ واحد، فاصله یک رأس از قطر واصل دو رأس مجاورش کدام است؟

$\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ (۴)

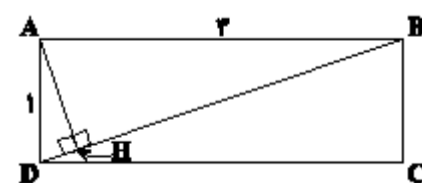
$\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ (۳)

$\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ (۲)

$\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



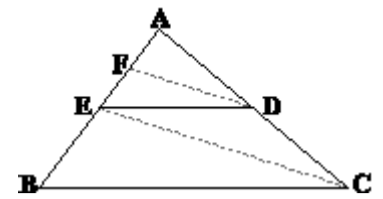
$$\triangle ABD : AD^2 + AB^2 = BD^2$$

$$\Rightarrow 1 + 9 = BD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{10}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD = \frac{1}{2} \times AH \times BD$$

$$\Rightarrow 3 \times 1 = AH \times \sqrt{10} \Rightarrow AH = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

۱۹) در مثلث ABC داریم: $DE \parallel BC$ و $DF \parallel EC$; اگر $AB = 12/25$ و $FE = 3$ باشد، آن گاه طول پاره خط BE کدام می‌تواند باشد؟

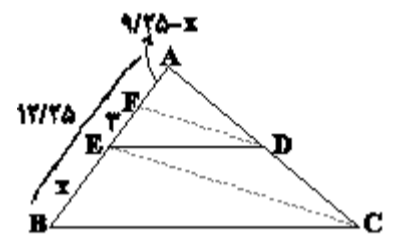


- (۱) ۹
(۲) ۱/۲۵
(۳) ۷
(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر BE را برابر با x در نظر بگیریم، با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle AED : \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \\ \triangle AFD \sim \triangle AEC : \frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FE} :$$

$$\Rightarrow \frac{12/25 - x}{x} = \frac{9/25 - x}{3}$$

$$\Rightarrow (9/25 - x)(x) = 3(12/25 - x)$$

$$\Rightarrow 9/25x - x^2 = 36/25 - 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 12/25x + 36/25 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 7)(x - 5/25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 5/25 \end{cases}$$

۲۰) مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۶ با مثلثی به اضلاع ۲، a و b متشابه است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مثلث کوچکتر می‌تواند باشد؟

(۴) ۹

(۳) ۳/۵

(۲) ۲

(۱) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۴

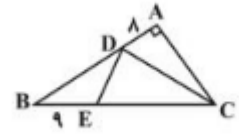
گزینه «۴»

نسبت تشابه می‌تواند $\frac{۳}{۲}$ ، $\frac{۴}{۲}$ یا $\frac{۶}{۲}$ باشد و نسبت مساحت‌ها می‌شود:

۱/ یا ۲ یا ۳

پس مساحت مثلث بزرگ ۲/۲۵ یا ۴ یا ۹ برابر مثلث کوچک می‌تواند باشد.

۲۱) در شکل مقابل اگر CD نیمساز و $DE = 10$ باشد، اندازه BD کدام است؟



۱۱ (۱)

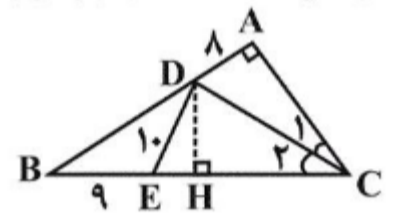
۱۳ (۲)

۱۶ (۳)

۱۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

با رسم عمود وارد از رأس D بر ضلع EC به شکل زیر می‌رسیم. حال می‌توانیم بنویسیم:



فاصله هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، بنابراین:

$$DH = AD = 8$$

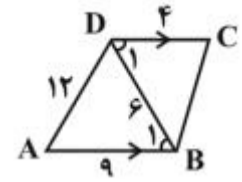
در مثلث DHE طبق فیثاغورس داریم:

$$EH^2 + DH^2 = DE^2 \Rightarrow EH^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow EH = 6$$

در نهایت با استفاده از فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$\begin{aligned} BD^2 &= DH^2 + BH^2 \Rightarrow BD^2 = DH^2 + (BE + EH)^2 \\ &\Rightarrow BD^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow BD = 17 \end{aligned}$$

۲۲) در ذوزنقه ABCD شکل مقابل، اندازه BC کدام است؟



۱۲ (۲)

۴ (۴)

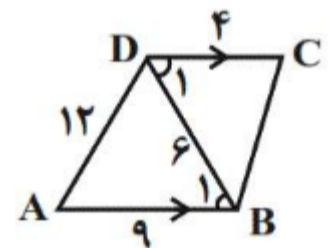
۲ (۱)

۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به موازی بودن AB و DC و خط متقاطع BD، زاویه‌های D_1 و B_1 با هم برابر هستند.

از طرفی داریم:



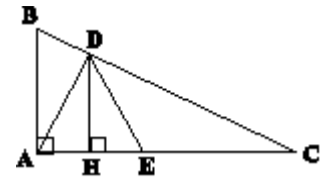
$$\frac{DC}{DB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{DB}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پس می‌توان گفت که $\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{AB} = \frac{2}{3}$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{DC}{DB} = \frac{DB}{AB} \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DCB \sim \triangle ABD$$

$$\xrightarrow{\text{اجزا متناظر}} \frac{BC}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow BC = 8$$

۲۳) در شکل زیر $AD = DE = 5\sqrt{2}$ به نحوی رسم شده‌اند که $\frac{CE}{AE} = 3$ است. اگر $AB = 8$ باشد، مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC کدام است؟



(۱) ۱۶

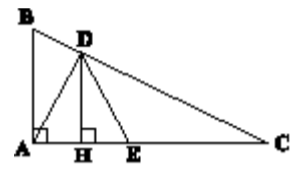
(۲) ۳۲

(۳) ۴۸

(۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲

چون $\triangle ADE$ متساوی‌الساقین است، پس $AH = HE = x$ قرار می‌دهیم.



از طرفی داریم:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CE}{2x} = 3 \Rightarrow CE = 6x$$

چون DH و BA هر دو بر AC عمودند، پس:

$$\triangle DHC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{DH}{BA} = \frac{CH}{CA} = \frac{6x+x}{6x+2x} = \frac{7}{8}$$

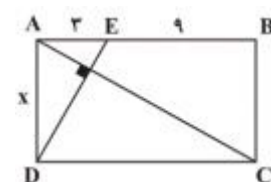
چون $BA = 8$ است، پس $DH = 7$ خواهد بود.

$$\triangle AHD : (7)^2 + x^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 49 + x^2 = 50 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین $AC = 8x = 8$ است، در نتیجه داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(8)(8) = 32$$

۲۴) در شکل مقابل چهارضلعی ABCD مستطیل است. مقدار x کدام است؟



۴ (۱)

۵ (۲)

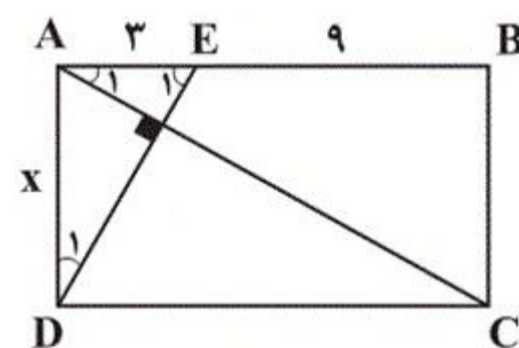
۶ (۳)

۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$\widehat{A}_1 + \widehat{E}_1 = \widehat{D}_1 + \widehat{E}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه AED و BCA بنابر تساوی یک زاویه حاده و یک زاویه قائمه، مشابه یکدیگرند و داریم:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \xrightarrow{x>0} x = 6$$

۲۵) در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آنرا به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند که یکی ۲ واحد از دیگری بزرگ‌تر است. اگر ارتفاع وارد بر وتر $4\sqrt{3}$ واحد باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۳۲ $\sqrt{3}$ (۴)

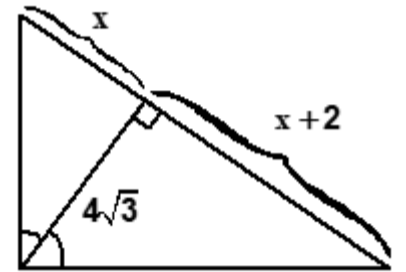
۲۸ $\sqrt{3}$ (۳)

۲۴ $\sqrt{3}$ (۲)

۲۰ $\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی وتر جدا می‌کند:



$$(4\sqrt{3})^2 = x(x+2) \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{قق} \\ x = -8 & \text{قق غ} \end{cases}$$

$$\text{وتر} = x + x + 2 = 6 + 6 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{\text{وتر} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \times 14}{2} = 28\sqrt{3}$$