مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون A۱ هندسه۳**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۱/۳۰

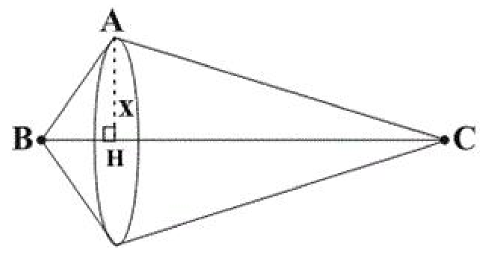
---

① از دوران مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر ۵ حول وتر آن، شکلی با حجم $\frac{۲۰\pi}{۳}$ ایجاد شده است. مجموع طول اضلاع قائم در این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ **۲)** $۲\sqrt{۵}$ **۳)** $۳\sqrt{۵}$ **۴)** $۴\sqrt{۵}$

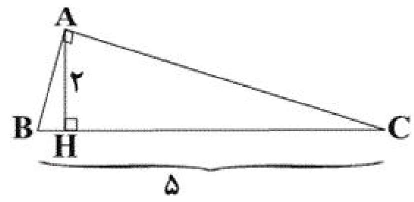
پاسخ: گزینه ۳

شکل حاصل، دو مخروط مشترک در قاعده است. شعاع قاعده مخروط‌ها برابر X و مجموع ارتفاع‌های آنها BC=۵ است و داریم:



$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲(BH) + \frac{۱}{۳}\pi x^۲(CH) = \frac{۱}{۳}\pi x^۲(BC)$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲(۵) = \frac{۵}{۳}\pi x^۲ = \frac{۲۰\pi}{۳} \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲$$



حال با استفاده از روابط مثلث قائم‌الزاویه داریم:

الف) $AB.AC = BC.AH = ۱۰$

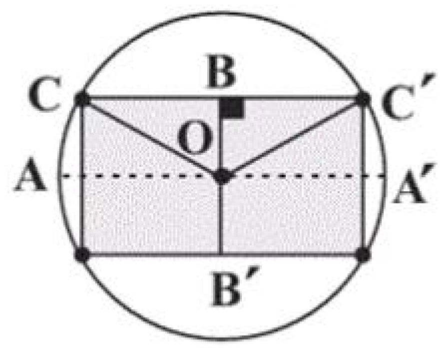
ب) $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow (AB + AC)^۲ - ۲\underbrace{AB.AC}_{۱۰} = ۲۵$

$\Rightarrow (AB + AC)^۲ = ۴۵ \Rightarrow AB + AC = ۳\sqrt{۵}$

۲) پاره‌خط $AA'=\sqrt{5}$ قطر بزرگ یک بیضی با فاصله کانونی ۲ است. خطوط مماس بر بیضی در دو سر قطر کوچک آن، دایره‌ای به مرکز بیضی و قطر AA' را در چهار نقطه قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی‌ای که این چهار نقطه رأس‌های آن هستند، کدام است؟

۱) ۲ **۲)** ۴ **۳)** ۱ **۴)** ۰/۵

پاسخ: گزینه ۱



$AA'=2a$ قطر دایره است، پس شعاع دایره برابر است با $a=\frac{AA'}{2}$، بنابراین $OC=a$ و طول OB برابر نصف طول کوچک‌ترین قطر بیضی است، یعنی $OB=b$.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم:

$$OC^2=OB^2+BC^2 \Rightarrow a^2=b^2+BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2=\underbrace{a^2-b^2}_{c^2} \Rightarrow BC=c$$

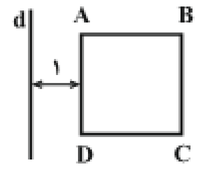
پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S=BB'\times CC' \Rightarrow S=(2b)(2c)=4bc \quad (*)$$

طبق فرض: $\begin{cases} 2a=\sqrt{5} \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ 2c=2 \Rightarrow c=1 \end{cases} \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{(*)} S=4(\tfrac{1}{2})(1)=2$$

۳) در شکل زیر مربع ABCD را حول خط d دوران می‌دهیم. اگر سطح مقطع صفحه گذرا بر خط dبا شکل حاصل برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه سطح مقطع صفحه عمود بر خط d با شکل حاصل کدام است؟ (این صفحه از شکل حاصل می‌گذرد.)



۱) 8π

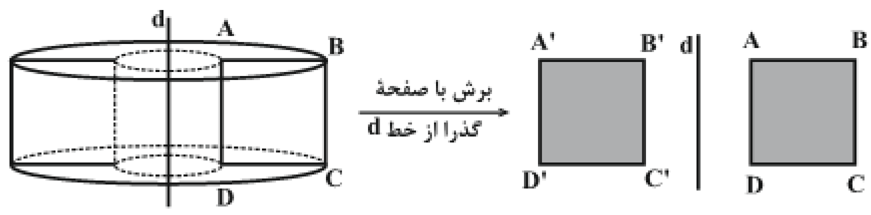
۲) 9π

۳) 15π

۴) 16π

پاسخ: گزینه ۳

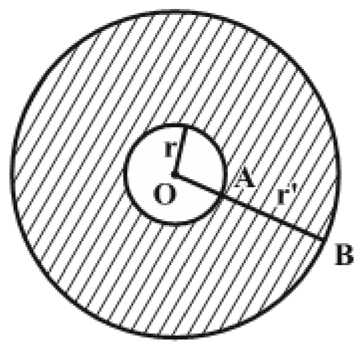
اگر مربع ABCD را حول خط d دوران دهیم، شکل حاصل یک استوانه است که از داخل آن یک استوانه خالی شده است. اگر این استوانه را با صفحه گذرا بر خط d برش دهیم، سطح مقطع حاصل، دو مربع می‌شود.



مساحت سطح مقطع حاصل، دو برابر مساحت مربع ABCD است، پس:

$$S_{\text{سطح مقطع حاصل}} = 2S_{ABCD} = 18 \Rightarrow 2AB^2 = 18 \Rightarrow AB = 3$$

حال اگر شکل حاصل را با صفحه‌ای عمود بر خط d برش دهیم، شکل زیر حاصل می‌شود:



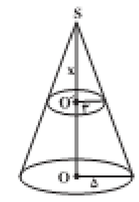
$$OA = 1,\ AB = 3 \begin{cases} r = 1 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$S_{\text{هاشور خورده}} = \pi r'^2 - \pi r^2 = \pi(4)^2 - \pi(1)^2 = 15\pi$$

۴) صفحه‌ای افقی، مخروط قائمی به ارتفاع ۱۵ cm و شعاع قاعده ۵ cm را قطع می‌کند و روی آن مقطعی به شعاع ۳ cm ایجاد می‌کند. حجم مخروط ناقص ایجاد شده کدام است؟

۱) ۹۶π ۲) ۴۶π ۳) ۴۸π ۴) ۹۸π

پاسخ: گزینه ۴



$SO' = x$

$SO = ۱۵$

$\frac{x}{۱۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = \frac{۴۵}{۵} = ۹$

V مخروط ناقص = V مخروط بزرگ − V مخروط کوچک

$= [\frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ \times ۱۵] - [\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۹] = ۱۲۵\pi - ۲۷\pi = ۹۸\pi$

۵) مستطیلی به ابعاد $۲\sqrt{۶}$ و ۲ در یک بیضی محاط است. به گونه‌ای که کانون‌های بیضی روی محیط مستطیل قرار دارند و خط واصل بین کانون‌های بیضی موازی طول مستطیل است. خروج از مرکز بیضی برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

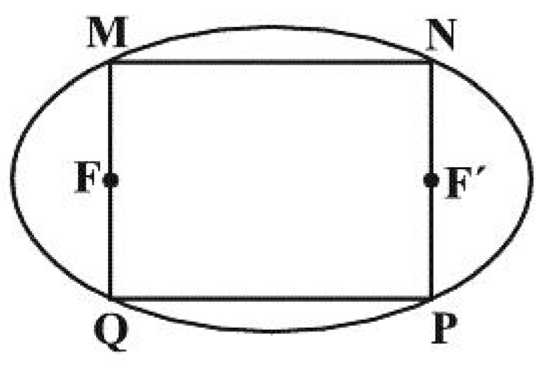
$MN = ۲c = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow c = \sqrt{۶}$

$NP = \frac{۲b^۲}{a} = ۲ \Rightarrow a = b^۲$

از سوی دیگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$\Rightarrow a^۲ = a + ۶ \xrightarrow{a>\sqrt{۶}} a = ۳$

$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$



⑥ اگر $O = (۱,۲)$ مرکز و $F = (۵,۲)$ یکی از کانون‌های بیضی‌ای باشد که از نقطه‌ی $M = (۴,۳)$ عبور می‌کند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ **۲)** $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ **۳)** $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ **۴)** $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این‌که مرکز بیضی، دقیقاً وسط دو کانون آن قرار دارد، پس در صورتی‌که F' کانون دیگر بیضی باشد، داریم:

$$x_O = \frac{x_F + x_{F'}}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۵ + x_{F'}}{۲} \Rightarrow x_{F'} = -۳$$

$$y_O = \frac{y_F + y_{F'}}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{۲ + y_{F'}}{۲} \Rightarrow y_{F'} = ۲$$

از طرفی $MF + MF' = ۲a$، پس داریم:

$$MF = \sqrt{(۵-۴)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۲}$$

$$MF' = \sqrt{(-۳-۴)^۲ + (۲-۳)^۲} = ۵\sqrt{۲}$$

بنابراین $۲a = ۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه $a = ۳\sqrt{۲}$. از طرفی $OF = c$، پس $c = ۴$ و خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

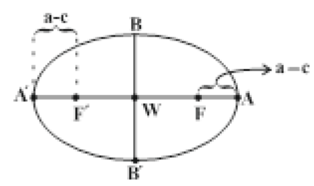
⑦ مجموع فواصل نقطه‌ی P روی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت M و N به طول‌های ۳- و ۴ روی محور xها برابر ۹ است. کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی P از نقطه‌ی M چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تعریف بیضی، مکان هندسی نقطه‌ی P، تمام نقاط روی محیط یک بیضی با کانون‌های $(-۳,۰)$ و $(۴,۰)$ و مقدار ثابت $۲a=۹$ است.

مطابق شکل، از بین نقاط روی بیضی، کم‌ترین فاصله تا کانون‌های بیضی برابر $AF=a-c$ است.



در این بیضی داریم:

مقدار ثابت: $۲a = ۹ \Rightarrow a = \frac{۹}{۲}$

فاصله‌ی کانونی: $۲c = |۴ - (-۳)| = ۷ \Rightarrow c = \frac{۷}{۲}$

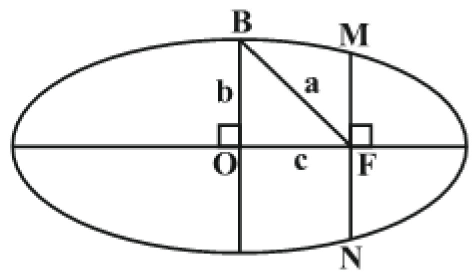
پس کم‌ترین فاصله‌ی P از نقطه‌ی M برابر است با: $a - c = \frac{۹}{۲} - \frac{۷}{۲} = ۱$

۸) در یک بیضی، فاصله‌ی یک رأس غیرکانونی از کانون برابر ۸ می‌باشد. اگر خروج از مرکز $\frac{۱}{۴}$ باشد، آن‌گاه طول وتر کانونی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم بیضی افقی باشد، حال با توجه به شکل:



$$a = ۸\,,\; e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{c}{۸} \Rightarrow c = ۲$$

و داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۶۴ = b^۲ + ۴ \Rightarrow b^۲ = ۶۰$

طول وتر کانونی $= |MN| = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲\times۶۰}{۸} = ۱۵$

۹) خط $x+y+۱=۰$ دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ و شعاع $\sqrt{۱۰}$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $(۰,-۱)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,-۲)$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ و شعاع $\sqrt{۱۰}$ به صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰$$

برای یافتن نقاط تلاقی این دایره با خط $x+y+۱=۰$ کافی است $y = -x-۱$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری کنیم:

$$(x-۲)^۲ + (-x)^۲ = ۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ + x^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \Rightarrow y=۰ \rightarrow A(-۱,۰) \\ x=۳ \Rightarrow y=-۴ \rightarrow B(۳,-۴) \end{cases}$$

پس مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB برابر است با

$$M = \frac{A+B}{۲} = (۱,-۲)$$

روش دوم: خط عمود بر خط $x+y+۱=۰$ که از مرکز دایره بگذرد را با خط قطع می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع وسط A و B است.

خطی که از مرکز دایره $(۲,-۱)$ بر این خط $(x+y=-۱)$ عمود شود قطعاً از وسط وتر می‌گذرد. پس:

$$x-y= \quad k=۳ \quad \begin{cases} y=x-۳ \\ y=-x-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=-۲ \end{cases}$$

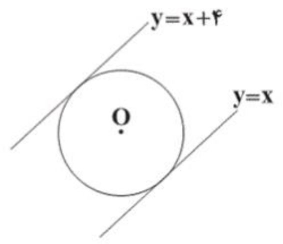
۱۰) دایره‌ای بر دو خط y=x و $y = x + ۴$ مماس است و از نقطه $(۳ , ۴)$ می‌گذرد. طول مرکز دایره کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۸-\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

مطابق شکل فاصله دو خط موازی برابر قطر دایره است.



فاصله دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y - x = ۰ \\ y - x - ۴ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قطر} = \frac{۴}{\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}}} = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین شعاع دایره $\sqrt{۲}$ می‌شود. مرکز دایره بین دو خط موازی و روی خط $y = x + ۲$ قرار می‌گیرد و فاصله آن از نقطه $A(۳ , ۴)$ باید برابر شعاع دایره یعنی $r = \sqrt{۲}$ باشد.

مرکز دایره روی خط $y = x + ۲$ قرار می‌گیرد و به‌صورت $(x , x + ۲)$ خواهد بود.

$$OA = r \Rightarrow \sqrt{(x - ۳)^{۲} + (x + ۲ - ۴)^{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۶x + ۹ + x^{۲} - ۴x + ۴ = ۲ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۱۰x + ۱۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۸۸}}{۴} = \frac{۱۰\pm۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۵\pm\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۱) بیش ترین فاصله نقطه $A(۳,۴)$ از نقاط دایره به معادله $x^{۲} + y^{۲} + ۲x - ۲y + ۱ =$ کدام است؟

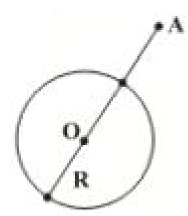
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

معادله زیر را استاندارد می کنیم:

$$x^{۲} + y^{۲} + ۲x - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow (x + ۱)^{۲} + (y - ۱)^{۲} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O(-۱,۱) \\ R = ۱ \end{cases}$$

برای محاسبه بیش ترین فاصله نقطه $A(۳,۴)$ از دایره مطابق شکل زیر باید OA+R را محاسبه کنیم:



$$OA + R = \sqrt{(۳ - (-۱))^{۲} + (۴ - ۱)^{۲}} + ۱ = ۵ + ۱ = ۶$$

۱۲) از نقطه $A(-۲,-۱۱)$ مماسی بر دایره به معادله $x^۲ - ۸x + y^۲ + ۶y = -۲۱$ رسم می‌کنیم. طول خط مماس کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۶}$ ۲) $۴\sqrt{۶}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

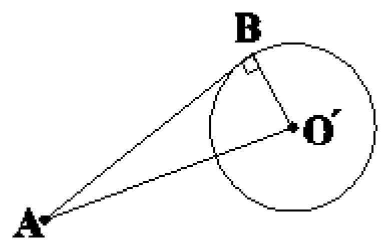
پاسخ: گزینه ۲

در معادله دایره داده شده داریم:

$$x^۲ - ۸x + y^۲ + ۶y = -۲۱ \Rightarrow (x-۴)^۲ + (y+۳)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow R = ۲ \,,\, O'(۴,-۳)$$

حال با توجه به شکل داریم:



$$O'A = \sqrt{(-۲-۴)^۲ + (-۱۱-(-۳))^۲} = ۱۰$$

$$O'B = R = ۲$$

$$\Rightarrow O'A^۲ = O'B^۲ + AB^۲$$

$$۱۰۰ = ۴ + AB^۲ \Rightarrow AB = \sqrt{۹۶} = ۴\sqrt{۶}$$

۱۳) اگر شعاع دایره $x^۲ + y^۲ + ax + by - ۲ = ۰$ برابر ۲ و خط $y = x - ۲$، یکی از خطوط قائم بر این دایره باشد، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

مرکز این دایره، نقطه $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ است. چون هر خط قائم بر دایره از مرکز آن عبور می‌کند، بنابراین:

$$-\frac{b}{۲} = -\frac{a}{۲} - ۲ \Rightarrow b = a + ۴ \quad (*)$$

شعاع این دایره برابر ۲ است، پس داریم:

$$۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴(-۲)} \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۸ = ۱۶$$

$$\xrightarrow{(*)} a^۲ + (a+۴)^۲ = ۸ \Rightarrow ۲a^۲ + ۸a + ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a+۲)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a = -۲ \,,\, b = ۲$$

$$\Rightarrow a + b = ۰$$

۱۴) معادله‌ی تمام قائم‌های رسم شده بر دایره به‌صورت $y = m(x-y)+۱$ است. اگر دایره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، محور xها را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

۱) $-۳, ۵$ ۲) $۳, -۱$ ۳) $-۱ \pm ۳\sqrt{۲}$ ۴) $-۱ \pm ۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

تمام قائم‌های رسم شده بر دایره از مرکز دایره می‌گذرند. پس با دادن دو مقدار دلخواه به m و یافتن نقطه‌ی تلاقی، مرکز دایره(O)را می‌یابیم:

$$\begin{cases} m = ۰ \Rightarrow y = ۱ \\ m = ۱ \Rightarrow y = x - y + ۱ \xrightarrow{y=۱} ۱ = x - ۱ + ۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

چون دایره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است، بنابراین:

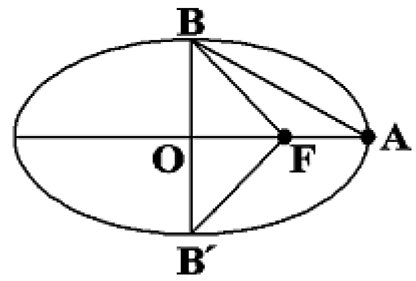
$$A(۰, ۳) \in \text{دایره} \Rightarrow OA = R \Rightarrow R = \sqrt{(۰-۱)^{۲} + (۳-۱)^{۲}} = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی دایره}: (x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۵$$

برای یافتن طول نقاط تلاقی با محورxها، $y = ۰$ قرار می‌دهیم.

$$(x-۱)^{۲} + ۱ = ۵ \Rightarrow (x-۱)^{۲} = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۱ = -۲ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

۱۵) در شکل زیر، B و B′ دو سر قطر کوچک، A یک سر قطر بزرگ و F یک کانون بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{۳}{۵}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث BB′F کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

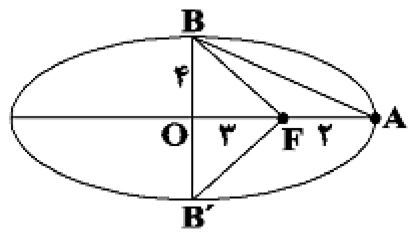
گزینهٔ «۲»

روش اول: چون نسبت خواسته است و $e = \frac{۳}{۵}$ پس:

a	b	c
۵	۴	۳

در شکل جاگذاری می‌کنیم.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{BB'F}}} = \frac{\frac{۲ \times ۴}{۲}}{\frac{۳ \times ۸}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

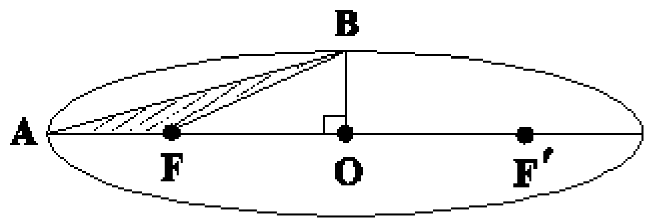


روش دوم: با توجه به آن که مساحت $\overset{\triangle}{BB'F}$ دو برابر مساحت $\overset{\triangle}{OBF}$ است، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{BB'F}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{۲S_{\overset{\triangle}{OBF}}} = \frac{AF}{۲OF} = \frac{a-c}{۲c} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{c}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{e} - ۱\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵}{۳} - ۱\right) = \frac{۱}{۳}$$

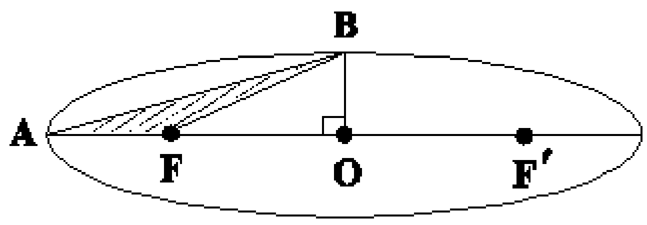
۱۶) در بیضی زیر با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، اگر مساحت مثلث ABF برابر $۴-۲\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه طول قطر کوچک بیضی کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



خروج از مرکز بیضی: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a(\mathrm{I})$

در یک بیضی داریم:

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\xrightarrow{(\mathrm{I})}a^{۲}=b^{۲}+\frac{۳}{۴}a^{۲}$

$\Rightarrow b^{۲}=\frac{۱}{۴}a^{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}a(\mathrm{II})$

با توجه به شکل، ارتفاع مثلث ABF برابر OB و قاعدهٔ آن برابر AF است:

$$\left.\begin{array}{l}OB=b\\ AF=a-c\end{array}\right\}\Rightarrow S_{ABF}=\frac{۱}{۲}\times AF\times OB=\frac{۱}{۲}\times(a-c)\times(b)$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})}S_{ABF}=\frac{۱}{۲}\times\left(a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right)\times\left(\frac{۱}{۲}a\right)=۴-۲\sqrt{۳}$$

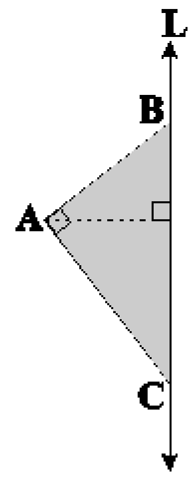
$$\Rightarrow\frac{۱}{۸}(۲-\sqrt{۳})a^{۲}=۲(۲-\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow a^{۲}=۱۶\Rightarrow a=۴\xrightarrow{(\mathrm{II})}b=۲$$

درنتیجه:

قطر کوچک بیضی: $۲b=۴$

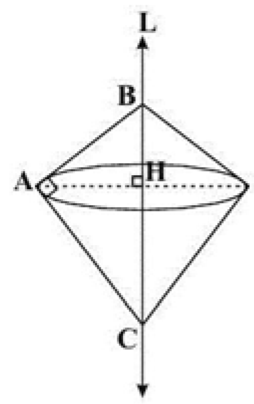
۱۷ مثلث قائم‌الزاویه ABC را مطابق شکل زیر، حول محور L دوران می‌دهیم. اگر فاصله A از خط L و نقطه B به‌ترتیب برابر $\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$ باشد، آن‌گاه حجم شکل حاصل کدام است؟



۱) $\frac{۹\pi}{۲}$
۲) $\frac{۷\pi}{۲}$
۳) ۳π
۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

با دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول محور L، دو مخروط یکی به ارتفاع BH و شعاع قاعده AH و دیگری به ارتفاع CH و شعاع قاعده AH مطابق شکل زیر به وجود می‌آید. پس داریم:

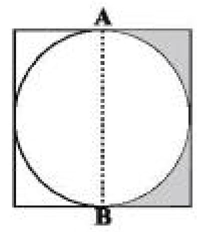


$$V = V_۱ + V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi AH^۲ . BH + \frac{۱}{۳}\pi AH^۲ . CH$$
$$\Rightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi AH^۲ . (BH + CH) = \frac{۱}{۳}\pi AH^۲ . BC$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHB، می‌دانیم $AH^۲ + BH^۲ = AB^۲$. پس $BH = \sqrt{\frac{۲۱}{۴} - ۳} = \frac{۳}{۲}$، از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABC طبق روابط طولی داریم: $AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow \frac{۲۱}{۴} = \frac{۳}{۲} \times BC \Rightarrow BC = \frac{۷}{۲}$

حال خواهیم داشت: $V = \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۳})^۲(\frac{۷}{۲}) = \frac{۷\pi}{۲}$

۱۸ مطابق شکل، دایره‌ای بر چهار ضلع یک مربع به ضلع ۲ مماس است. حجم حاصل از دوران قسمت سایه زده شده حول AB کدام است؟



۱) π
۲) $\frac{۲\pi}{۳}$
۳) $\frac{۴\pi}{۳}$
۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

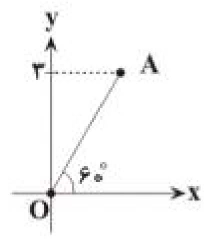
پاسخ: گزینه ۲

در واقع منظور سؤال، تفاضل حجم‌های حاصل از دوران مربع و دایره حول AB است. از دوران مربع حول AB، یک استوانه قائم به شعاع قاعده $r = ۱$ و ارتفاع $h = ۲$ و همچنین از دوران دایره حول AB، یک کره به شعاع $R = ۱$ پدید می‌آید.

$$\begin{cases} \text{حجم استوانه قائم} : V_۱ = \pi r^۲ h = ۲\pi \\ \text{حجم کره} : V_۲ = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\text{حجم مورد نظر} : V_۱ - V_۲ = \frac{۲\pi}{۳}$$

۱۹ حجم شکل حاصل از دوران پاره‌خط OA حول محور yها کدام است؟



۱) $۹\sqrt{۳}\pi$

۲) ۳π

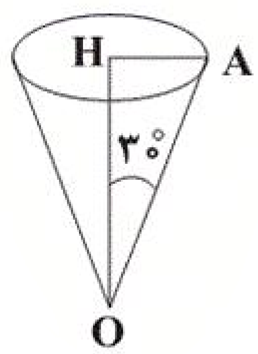
۳) $۳\sqrt{۳}\pi$

۴) ۹π

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

حاصل یک مخروط است.



$$O\overset{\Delta}{H}A : \tan ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{AH}{OH} = \frac{AH}{۳} \Rightarrow AH = \sqrt{۳}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲} \times (OH) = \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۳})^{۲}(۳) = ۳\pi$$

۲۰) نقطه A روی یک بیضی و نقاط F و F′ دو کانون آن بیضی، هر سه روی یک خط قرار دارند. اگر $AF - AF' = ۸$ و $AF + AF' = ۱۰$، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

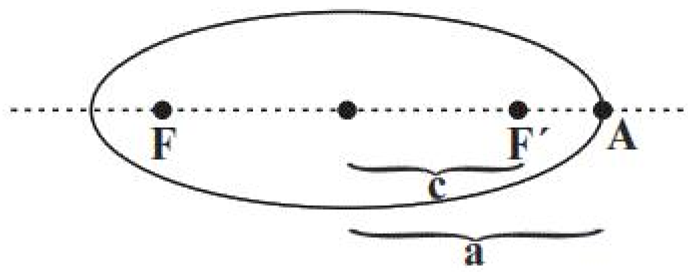
۱) ۰/۴ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به شکل زیر داریم: $AF = a + c$

$AF' = a - c$



$$\left.\begin{array}{l} AF + AF' = ۲a \\ AF + AF' = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

$$\left.\begin{array}{l} AF - AF' = FF' = ۲c \\ AF - AF' = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۲۱) شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ (۰ , ۰)،(۱ , ۲) و(۲- , ۱)، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(۰,۰)\ \text{را صدق می دهیم}} c = ۰ \\ \xrightarrow{(۲,۱)\ \text{را صدق می دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰ \\ \xrightarrow{(۱,-۲)\ \text{را صدق می دهیم}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ a - ۲b = -۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

حال با معلوم بودن مقادیر a, b و c شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

۲۲) شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ با قطر کوچک یک بیضی افقی هم‌مرکز با این دایره برابر است. اگر این بیضی بر محور y ها مماس باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰ \Rightarrow O(۳,-۱)\,,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۲۴}=۲$

قطر کوچک بیضی برابر با شعاع دایره است. یعنی: $۲b=۲$، حال به‌کمک اطلاعات مسئله شکل بیضی را رسم می‌کنیم:

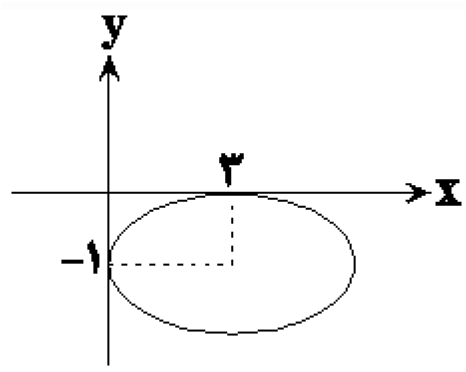
$۲b=۲ \Rightarrow b=۱$

با توجه به شکل: $a=۳$

$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow c^۲=۹-۱=۸$

$\Rightarrow c=۲\sqrt{۲}$

$\Rightarrow$ خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$



۲۳) دایره‌های $x^۲+y^۲+۲y=۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۳$ متقاطع‌اند؛ معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

۱) $x=y$ ۲) $x=۱+y$ ۳) $x=-y$ ۴) $x=۱-y$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۲y=۳ \\ x^۲+y^۲+۲x=۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^۲-y^۲-۲y=-۳ \\ x^۲+y^۲+۲x=۳ \end{cases}$$
$$۲x-۲y=۰$$
$$\Rightarrow y=x$$

معادله وتر مشترک دو دایره برابر $x=y$ است.

۲۴ طول قسمتی از خط $۲x+y+k=۰$ که در داخل دایره‌ای به معادله $x^۲+y^۲+۴x-۲y-۴=۰$ واقع است، برابر با ۴ می‌باشد. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

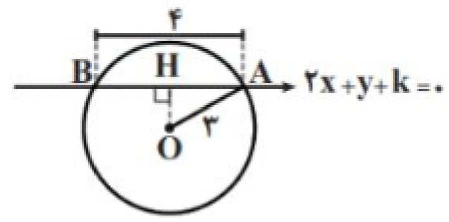
$$x^۲+y^۲+۴x-۲y-۴=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+y^۲-۲y=۴ \Rightarrow (x+۲)^۲-۴+(y-۱)^۲-۱=۴$$

$$\Rightarrow (x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$$

پس $O(-۲,۱)$ و $R=۳$ می‌باشد.

حال شکل فرضی زیر را درنظر بگیرید:



با توجه به فیثاغورس $OH=\sqrt{۳^۲-۲^۲}=\sqrt{۵}$

یعنی فاصله مرکز دایره از خط $۲x+y+k=۰$ باید برابر $\sqrt{۵}$ شود. این فاصله را پیدا کرده و مساوی $\sqrt{۵}$ قرار می‌دهیم:

فاصله $(-۲,۱)$ از $۲x+y+k=۰$:

$$\frac{|۲(-۲)+۱+k|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\sqrt{۵} \Rightarrow \frac{|k-۳|}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow |k-۳|=۵ \Rightarrow \begin{cases} k-۳=۵ \Rightarrow k=۸ \\ k-۳=-۵ \Rightarrow k=-۲ \end{cases}$$

پس دو مقدار برای k وجود داشته و مجموع این مقادیر برابر $۸+(-۲)=۶$ می‌شود.

۲۵ معادله دایره‌ای که نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $y = x^۳ - ۳x^۲$ دو سر قطری از آن باشد، کدام است؟

۱) $(x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$

۲) $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۹$

۳) $(x+۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$

۴) $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۵$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$y' = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix} \right. \\ x = ۲ \Rightarrow B \left| \begin{matrix} ۲ \\ -۴ \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ شعاع دایره $= \sqrt{۵}$

$$\text{O(مرکز دایره)} \left| \begin{matrix} \frac{۰+۲}{۲} = ۱ \\ \frac{۰-۴}{۲} = -۲ \end{matrix} \right.$$

$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۵$