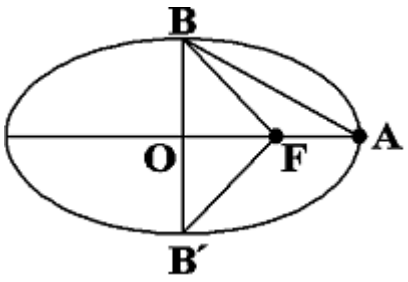
۱) در شکل زیر، B و B′ دو سر قطر کوچک، A یک سر قطر بزرگ و F یک کانون بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{۳}{۵}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث BB′F کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۴}$

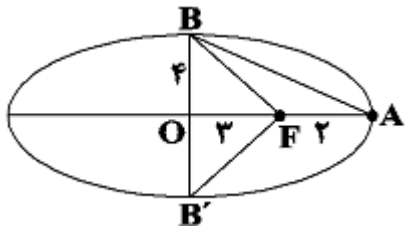
پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

روش اول: چون نسبت خواسته است و $e = \frac{۳}{۵}$ پس:

a	b	c
۵	۴	۳

در شکل جاگذاری می‌کنیم.



$$\frac{S_{\triangle AB'F}}{S_{\triangle BB'F}} = \frac{\frac{۲\times۴}{۲}}{\frac{۳\times۸}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

روش دوم:با توجه به آن که مساحت $\triangle BB'F$ دو برابر مساحت $\triangle OB'F$ است، داریم:

$$\frac{S_{\triangle AB'F}}{S_{\triangle BB'F}} = \frac{S_{\triangle AB'F}}{۲S_{\triangle OB'F}} = \frac{AF}{۲OF} = \frac{a-c}{۲c} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{c}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{e}-۱\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵}{۳}-۱\right) = \frac{۱}{۳}$$

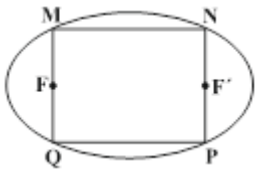
(۲) مستطیلی به ابعاد $۲\sqrt{۶}$ و ۲ در یک بیضی محاط است، به گونه‌ای که کانون‌های بیضی روی محیط مستطیل قرار دارند و خط واصل بین کانون‌های بیضی موازی طول مستطیل است. خروج از مرکز بیضی برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

با توجه به شکل رسم شده داریم:



$MN = ۲c = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow c = \sqrt{۶}$

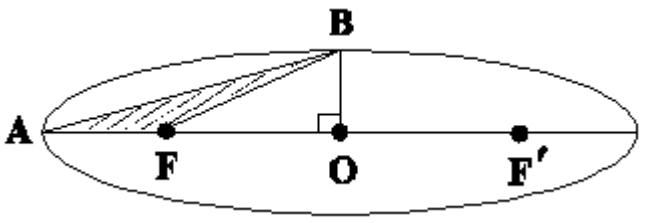
نقطهٔ N روی محیط بیضی است و می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از کانون‌های بیضی برابر با ۲a (قطر بزرگ) است، بنابراین:

$$NF'+NF = ۲a \Rightarrow ۱ + \sqrt{۱^۲ + (۲\sqrt{۶})^۲} = ۲a$$

$$\Rightarrow ۱ + \sqrt{۲۵} = ۲a \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

③ در بیضی زیر با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، اگر مساحت مثلث ABF برابر $۲\sqrt{۳}-۴$ باشد، آن‌گاه طول قطر کوچک بیضی کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$

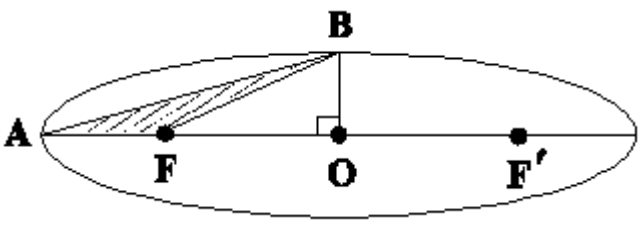
۲) ۲

۳) ۴

۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



خروج از مرکز بیضی: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a(I)$

در یک بیضی داریم:

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{(I)} a^۲ = b^۲ + \frac{۳}{۴}a^۲$

$\Rightarrow b^۲ = \frac{۱}{۴}a^۲ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}a(II)$

با توجه به شکل، ارتفاع مثلث ABF برابر OB و قاعدهٔ آن برابر AF است:

$\left.\begin{matrix} OB = b \\ AF = a - c \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{ABF} = \frac{۱}{۲} \times AF \times OB = \frac{۱}{۲} \times (a-c) \times (b)$

$\xrightarrow{(I),(II)} S_{ABF} = \frac{۱}{۲} \times (a - \frac{\sqrt{۳}}{۲}a) \times (\frac{۱}{۲}a) = ۴ - ۲\sqrt{۳}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۸}(۲ - \sqrt{۳})a^۲ = ۲(۲ - \sqrt{۳})$

$\Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴ \xrightarrow{(II)} b = ۲$

درنتیجه:

قطر کوچک بیضی: $۲b = ۴$

④ اگر سطح مقطع یک استوانه با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحه مایلی که از قاعده‌های استوانه عبور نکند، برخورد کند، کدام شکل حاصل نمی‌شود؟

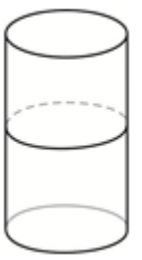
۱) بیضی ۲) سهمی ۳) مستطیل ۴) دایره

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

همانند شکل‌های زیر، اگر صفحه مایل برخورد کند، بیضی، اگر صفحه افقی برخورد کند، دایره و اگر صفحه عمودی برخورد کند، مستطیل حاصل می‌شود.

صفحه مایل ← بیضی صفحه عمودی← مستطیل



صفحه افقی← دایره

⑤ اگر قطر کوچک بیضی برابر ۸ و قطر بزرگ بیضی برابر ۱۲ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

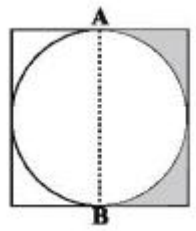
قطر کوچک بیضی برابر ۸ و قطر بزرگ بیضی برابر ۱۲ است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶ \\ ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۶^۲ - ۴^۲ = ۲۰ \Rightarrow c = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۶} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

⑥ مطابق شکل، دایره‌ای بر چهار ضلع یک مربع به ضلع ۲ مماس است. حجم حاصل از دوران قسمت سایه زده شده حول AB کدام است؟



۱) π

۲) $\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $\frac{۴\pi}{۳}$

۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

در واقع منظور سؤال، تفاضل حجم‌های حاصل از دوران مربع و دایره حول AB است. از دوران مربع حول AB، یک استوانه قائم به شعاع قاعده $r = ۱$ و ارتفاع $h = ۲$ و همچنین از دوران دایره حول AB، یک کره به شعاع $R = ۱$ پدید می‌آید.

$$\begin{cases} \text{حجم استوانه قائم} : V_۱ = \pi r^۲ h = ۲\pi \\ \text{حجم کره} : V_۲ = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\text{حجم مورد نظر} : V_۱ - V_۲ = \frac{۲\pi}{۳}$$

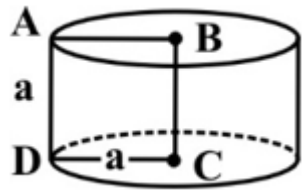
⑦ مربعی را یک بار حول یکی از اضلاع و یک بار دیگر حول یکی از اقطارش دوران می‌دهیم. نسبت حجم جسم اول به حجم جسم دوم، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

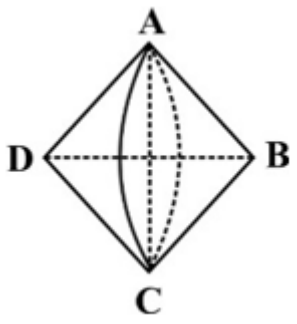
پاسخ: گزینه ۴

طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. می‌دانیم از دوران مربع حول یک ضلعش، استوانه‌ای به شعاع قاعده a و ارتفاع a به دست می‌آید، پس حجم آن برابر است با:

$V_۱ = (\text{مساحت قاعده}).(\text{ارتفاع}) = (\pi a^۲)a = \pi a^۳$



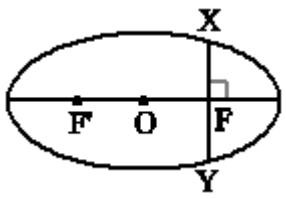
همچنین از دوران مربع حول یک قطرش، دو مخروط یکسان با شعاع قاعده $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و ارتفاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ایجاد می‌شود، پس حجم شکل حاصل برابر است با:



$$V_۲ = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲.(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{\sqrt{۲}\pi a^۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\pi a^۳}{\frac{\sqrt{۲}\pi a^۳}{۶}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

⑧ در بیضی شکل زیر، F و ‘F کانون‌های بیضی هستند. اگر طول قطرهای کانونی و غیرکانونی بیضی به‌ترتیب برابر با ۱۸ و ۱۲ باشد، طول پاره‌خط XY کدام است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۴
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

نقطهٔ x روی بیضی قرار دارد و طبق تعریف بیضی، داریم:

$$XF + XF' = 2a$$

که $2a$ طول قطر کانونی بیضی است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه XFF' داریم:

$$XF^2 + FF'^2 = XF'^2$$

FF' همان فاصلهٔ کانونی بیضی است که با $2c$ نمایش می‌دهیم. با توجه به دو رابطهٔ بالا داریم:

$$XF^2 + (2c)^2 = (2a - XF)^2$$

$$\Rightarrow XF^2 + 4c^2 = 4a^2 + XF^2 - 4aXF$$

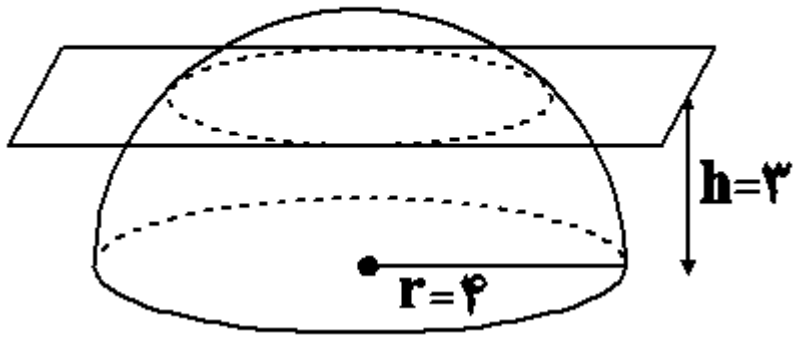
$$\Rightarrow 4aXF = 4a^2 - 4c^2 \Rightarrow XF = \frac{a^2-c^2}{a}$$

در بیضی می‌دانیم $a^2 - c^2 = b^2$ که $2b$ طول قطر غیرکانونی است. بنابراین:

$$\begin{cases} 2a = 18 \Rightarrow a = 9 \\ 2b = 12 \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

$$XY = 2XF = 2 \times \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 6^2}{9} = 8$$

⑨ مطابق شکل، یک نیم‌کره به شعاع $r = ۴$ را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله $h = ۳$ از آن قطع می‌کنیم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟



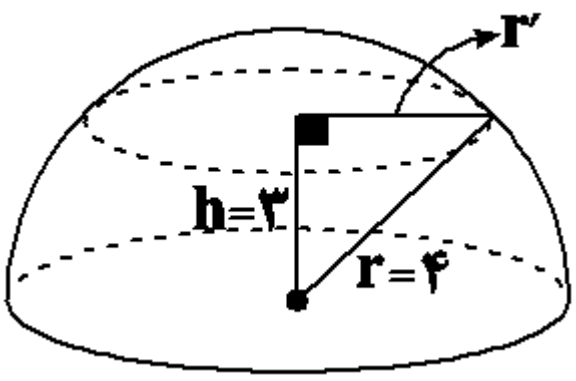
۱) ۷π

۲) π

۳) $\frac{۱۶\pi}{۹}$

۴) ۱۲π

پاسخ: گزینه ۱



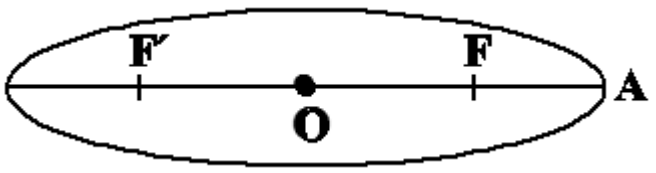
مطابق شکل، طبق قضیه فیثاغورس، به راحتی می‌توانیم شعاع دایره مقطع را حساب کنیم. $r' = \sqrt{۴^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۷}$

پس مساحت دایره حاصل برابر است با: $S = \pi r'^۲ = ۷\pi$

۱۰) طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۲}$ و فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس ۲ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱



مطابق شکل فرضی داریم:

$$۲b = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۲}$$

$$FA = ۲ \Rightarrow a - c = ۲ \quad (I)$$

طبق رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$، داریم:

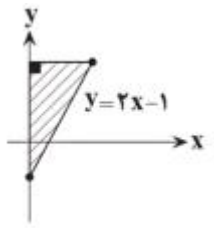
$$b^۲ = a^۲ - c^۲ \Rightarrow b^۲ = (a - c)(a + c)$$

$$b^۲ = ۲(a + c) \Rightarrow ۸ = ۲(a + c) \Rightarrow a + c = ۴ \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \begin{cases} a - c = ۲ \\ a + c = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ c = ۱ \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳}$$

۱۱) مطابق شکل وتر مثلث به معادله $y = ۲x - ۱$، با شرط $۰ \le x \le ۳$ مفروض است. اگر مثلث را حول محورyها دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

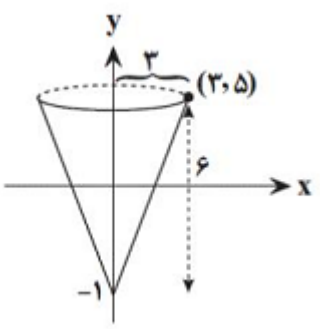


۱) ۱۲π
۲) ۱۵π
۳) ۱۸π
۴) ۲۱π

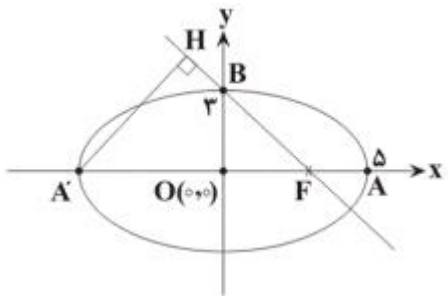
پاسخ: گزینه ۳

از دوران مثلث داده شده حول محور yها یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ حاصل می‌شود. می‌دانیم حجم مخروط برابر $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است.

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۶ = ۱۸\pi$$



(۱۲) در بیضی شکل زیر طول A'H چه‌قدر است؟



۱) ۳/۲
۲) ۳/۴
۳) ۵/۲
۴) ۵/۴

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به مقدار $a = ۵$ و $b = ۳$ در بیضی و رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ داریم:

$c^۲ + ۹ = ۲۵$ یعنی $c = ۴$. حال معادله خط BF را می‌نویسیم:

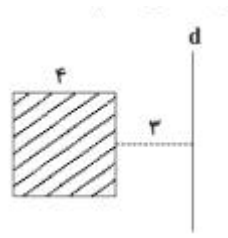
$$m_{BF} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\Rightarrow BF : y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - ۳ = -\frac{۳}{۴}(x - ۰)$$

$$\Rightarrow ۴y + ۳x - ۱۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{A'(-۵,۰)} A'H = \frac{|-۱۵-۱۲|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{۲۷}{۵} = ۵/۴$$

(۱۳) مربعی به ضلع ۴ واحد را حول محوری موازی یکی از اضلاع و به فاصله ۳ واحد از آن دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟



۱) ۱۵۶π
۲) ۱۶۰π
۳) ۱۶۹π
۴) ۱۹۶π

پاسخ: گزینه ۲

شکل حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۷ و ارتفاع ۴ واحد می‌باشد که درون آن استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ واحد و با همین ارتفاع خالی شده است. پس حجم شکل حاصل برابر است با:

$$V = \pi \times (۷)^۲ \times (۴) - \pi \times (۳)^۲ \times (۴) = ۴\pi(۴۹ - ۹) = ۱۶۰\pi$$

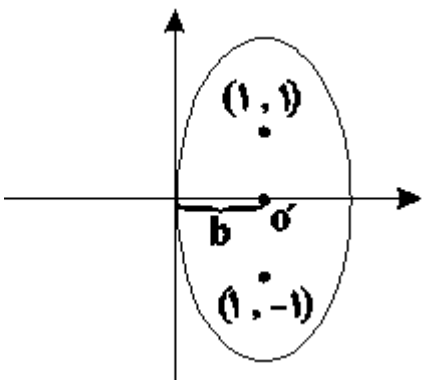
(۱۴) بیضی به کانون‌های (۱-,۱) و (۱,۱) و خروج از مرکز e مفروض است. به ازای کدام مقدار e بیضی بر محور yها مماس می‌شود؟

۱) $e = \frac{۱}{۲}$ ۲) $e = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $e = \frac{۱}{۳}$ ۴) $e = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

$$F(۱, ۱), F'(۱, -۱) \Rightarrow FF' = ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{a} \Rightarrow e = \frac{۱}{a}$$



شکل را نگاه کنید. بیضی در صورتی بر محور yها مماس می‌شود که $b = ۱$ باشد. می‌دانیم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{b=c=۱} a^۲ = ۱ + ۱ = ۲ \Rightarrow a = \sqrt{۲}$$

بنابراین $e = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

(۱۵) در بیضی با خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ و طول قطر کوچک ۱۲ واحد، مجموع فواصل نقطه‌ای روی بیضی از دو کانون کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

مجموع فواصل هر نقطهٔ روی بیضی از دو کانون برابر با طول قطر بزرگ بیضی یعنی ۲a است. طبق اطلاعات مسأله، خروج از مرکز برابر با $\frac{۱}{۲}$ است:

$$e = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \rightarrow c = \frac{a}{۲}$$

همچنین قطر کوچک $۲b = ۱۲$ است، پس $b = ۶$. بنابراین:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{c=\frac{a}{۲}} a^۲ = ۳۶ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳a^۲}{۴} = ۳۶ \Rightarrow a^۲ = ۴۸$$

$$\xrightarrow{a>۰} a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۲a = ۸\sqrt{۳}$$

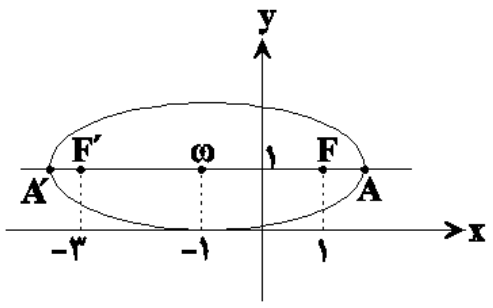
⑯ نقاط (۱,۱) و (۳,۱-)، کانون‌های یک بیضی هستند که بر محور xها مماس است. طول بلندترین قطر این بیضی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا شکل این بیضی را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، داریم:



$FF' = ۲c = |x_F - x_{F'}| \Rightarrow c = ۲$

$y_\omega = y_F = ۱, b = |y_\omega| = ۱$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow AA' = ۲a = ۲\sqrt{۱+۴} = ۲\sqrt{۵}$

---

⑰ در یک بیضی، قطر بزرگ آن ۳ برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

اگر قطر بزرگ بیضی را با ۲a و قطر کوچک آن را با ۲b نشان دهیم، داریم:

$$۲a = ۳ \times ۲b \Rightarrow a = ۳b \Rightarrow a^۲ = ۹b^۲$$

با توجه به آن‌که در بیضی رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است، پس:

$$\Rightarrow a^۲ = ۹(a^۲ - c^۲) \Rightarrow ۸a^۲ = ۹c^۲$$

خروج از مرکز بیضی به‌صورت $e = \frac{c}{a}$ تعریف می‌شود:

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۸}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

(۱۸) در یک بیضی افقی به مرکز (۳,۴)، طول قطر کوچک ۶ و فاصله کانونی برابر ۸ می‌باشد. مختصات یکی از دو سر قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

۱) (۲,۴) **۲)** (-۴,۴) **۳)** (-۲,۳) **۴)** (-۲,۴)

پاسخ: گزینه ۴

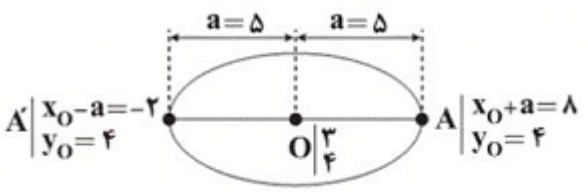
در یک بیضی، طول قطر کوچک و فاصله کانونی به‌ترتیب برابر $2b$ و $2c$ است، بنابراین:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

از طرفی در بیضی داریم: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$

حال مختصات دو سر قطر را به‌دست می‌آوریم:

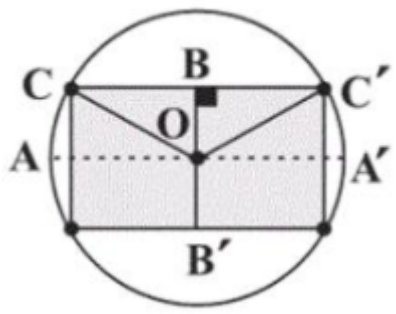


(۱۹) پاره‌خط $AA' = \sqrt{5}$ قطر بزرگ یک بیضی با فاصله کانونی ۲ است. خطوط مماس بر بیضی در دو سر قطر کوچک آن، دایره‌ای به قطر AA' را در چهار نقطه قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی‌ای که این چهار نقطه رأس‌های آن هستند، کدام است؟

۱) ۲ **۲)** ۴ **۳)** ۱ **۴)** ۰/۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



$AA' = 2a$ قطر دایره است، پس شعاع دایره برابر است با $a = \frac{AA'}{2}$، بنابراین $OC = a$ و طول OB برابر نصف طول قطر کوچک بیضی است، یعنی $OB = b$.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم:

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = \underbrace{a^2 - b^2}_{c^2} \Rightarrow BC = c$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = BB' \times CC' \Rightarrow S = (2b)(2c) = 4bc \quad (*)$$

$$\text{طبق فرض:} \begin{cases} 2a = \sqrt{5} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2}$$

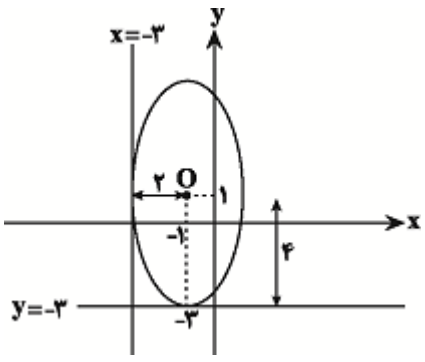
$$\xrightarrow{(*)} S = 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 2$$

(۲۰) یک بیضی به مرکز $O(-۱,۱)$ بر خطوط $x = -۳$ و $y = -۳$ مماس است. نمودار بیضی محور yها را با کدام عرض مثبت قطع می‌کند؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۱+۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}-۱$ ۴) $\sqrt{۳}-۱$

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل زیر، داریم:



$\begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases}$

از آن‌جا که بیضی قائم است و مرکز آن $O(-۱,۱)$ است. معادلهٔ بیضی برابر است با:

$$\frac{(x+۱)^{۲}}{۴} + \frac{(y-۱)^{۲}}{۱۶} = ۱$$

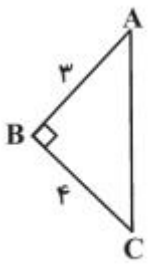
برای یافتن نقطهٔ تلاقی بیضی با محور yها، $x = ۰$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۴} + \frac{(y-۱)^{۲}}{۱۶} = ۱ \Rightarrow \frac{(y-۱)^{۲}}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow (y-۱)^{۲} = ۱۲$$

$$\Rightarrow y - ۱ = \pm ۲\sqrt{۳} \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \text{عرض مثبت} = ۱ + ۲\sqrt{۳}$$

(۲۱) مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{B} = ۹۰^\circ$) را ۳۶۰ درجه حول بزرگ‌ترین ضلع آن دوران می‌دهیم. حجم شکل فضایی حاصل کدام است؟



۱) $\frac{۴۸\pi}{۵}$

۲) $\frac{۱۴۴\pi}{۵}$

۳) $\frac{۴۸\pi}{۲۵}$

۴) $\frac{۱۴۴\pi}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۱

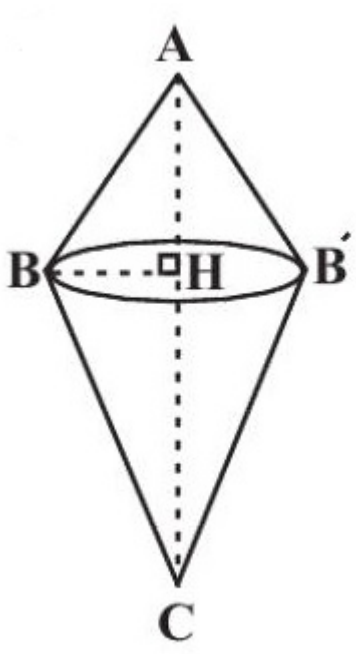
شکل فضایی حاصل از دو مخروط هر کدام به شعاع قاعده‌ی BH و به ترتیب با ارتفاع‌های AH و CH تشکیل شده است.

$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$

$AB \times BC = AC \times BH \Rightarrow ۳ \times ۴ = ۵BH \Rightarrow BH = \frac{۱۲}{۵}$

$V = \frac{۱}{۳}\pi(BH^۲)AH + \frac{۱}{۳}\pi(BH^۲)(CH) = \frac{۱}{۳}\pi(BH^۲)\left(AH + \overset{\frown}{AC}H\right)$

$= \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{۱۴۴}{۲۵} \times ۵ = \frac{۴۸\pi}{۵}$



(۲۲) صفحه‌ای افقی، مخروط قائمی به ارتفاع ۱۵ cm و شعاع قاعده ۵ cm را قطع می‌کند و روی آن مقطعی به شعاع ۳ cm ایجاد می‌کند. حجم مخروط ناقص ایجاد شده کدام است؟

۱) ۹۶π ۲) ۴۶π ۳) ۴۸π ۴) ۹۸π

پاسخ: گزینه ۴

$SO' = x$

$SO = ۱۵$

$\frac{x}{۱۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = \frac{۴۵}{۵} = ۹$

مخروط کوچک V- مخروط بزرگ V = مخروط ناقص V

$= [\frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ \times ۱۵] - [\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۹] = ۱۲۵\pi - ۲۷\pi = ۹۸\pi$

(۲۳) اگر $O = (۱,۲)$ مرکز و $F = (۵,۲)$ یکی از کانون‌های بیضی‌ای باشد که از نقطه‌ی $M = (۴,۳)$ عبور می‌کند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این‌که مرکز بیضی، دقیقاً وسط دو کانون آن قرار دارد، پس در صورتی‌که F' کانون دیگر بیضی باشد، داریم:

$x_O = \frac{x_F + x_{F'}}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۵ + x_{F'}}{۲} \Rightarrow x_{F'} = -۳$

$y_O = \frac{y_F + y_{F'}}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{۲ + y_{F'}}{۲} \Rightarrow y_{F'} = ۲$

از طرفی $MF + MF' = ۲a$، پس داریم:

$MF = \sqrt{(۵-۴)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۲}$

$MF' = \sqrt{(-۳-۴)^۲ + (۲-۳)^۲} = ۵\sqrt{۲}$

بنابراین $۲a = ۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه $a = ۳\sqrt{۲}$. از طرفی $OF = c$، پس $c = ۴$ و خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

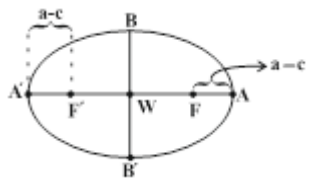
(۲۴) مجموع فواصل نقطه‌ی Pروی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت M و N به طول‌های ۳- و ۴ روی محورxها برابر ۹ است. کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی P از نقطه‌ی Mچقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تعریف بیضی، مکان هندسی نقطه‌ی P، تمام نقاط روی محیط یک بیضی با کانون‌های (۰ , ۳-)و(۰ , ۴)و مقدار ثابت $۲a=۹$ است.

مطابق شکل، از بین نقاط روی بیضی، کم‌ترین فاصله تا کانون‌های بیضی برابر $AF=a-c$ است.



در این بیضی داریم:

مقدار ثابت: $۲a = ۹ \Rightarrow a = \frac{۹}{۲}$

فاصله‌ی کانونی: $۲c = |۴ - (-۳)| = ۷ \Rightarrow c = \frac{۷}{۲}$

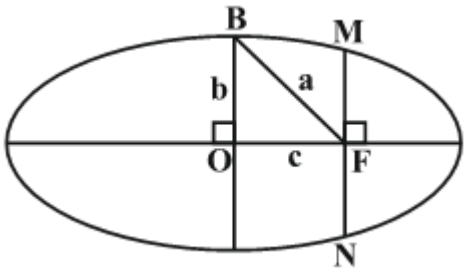
پس کم‌ترین فاصله‌ی P از نقطه‌ی M برابر است با: $a - c = \frac{۹}{۲} - \frac{۷}{۲} = ۱$

(۲۵) در یک بیضی، فاصله‌ی یک رأس غیرکانونی از کانون برابر ۸ می‌باشد. اگر خروج از مرکز $\frac{۱}{۴}$ باشد، آن‌گاه طول وتر کانونی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم بیضی افقی باشد، حال با توجه به شکل:



$a = ۸ , e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{c}{۸} \Rightarrow c = ۲$

و داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۶۴ = b^۲ + ۴ \Rightarrow b^۲ = ۶۰$

طول وتر کانونی= $|MN| = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲\times۶۰}{۸} = ۱۵$