



۱) حاصل عبارت $A = \sqrt{7 + 6\sqrt{10 - 4\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}}$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$

۲) $5\sqrt{3}$

۳) $\sqrt{18} - 1$

۴) $\sqrt{18} + 1$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که $3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ است، به همین ترتیب رادیکال ها را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{7 + 6\sqrt{10 - 4\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})^2}}}}} = \sqrt{7 + 6\sqrt{10 - 4(\sqrt{2} + 1)}} \\ &= \sqrt{7 + 6\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})^2}}} = \sqrt{7 + 6(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{\frac{19 - 6\sqrt{2}}{(3\sqrt{2} - 1)^2}} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{2} - 1)^2} = |3\sqrt{2} - 1| = 3\sqrt{2} - 1 = \sqrt{18} - 1 \end{aligned}$$

۲) اگر $a^3 > a^2$ و $b^3 > b^2$ باشند، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

الف) $a^2 < 1$ ب) $b^2 < b^3$ ج) $ab < 1$ د) $a + b < 1$

۱) صفر

۲) یک

۳) دو

۴) سه

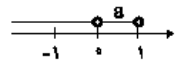
پاسخ: گزینه ۱

ابتدا a را بررسی می‌کنیم: $a^2 > a^3$

اگر $a < 0$ باشد $a^2 > 0$ و $a^3 < 0$ خواهد بود و $a^2 > a^3$ می‌شود.

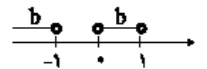
اگر $0 < a < 1$ باشد نیز $a^2 > a^3$ می‌شود.

پس $0 < a < 1$ و غیر صفر است.



b را بررسی می‌کنیم: $b^3 > b^2$

می‌دانیم اگر $0 < b < 1$ یا $b < -1$ باشد $b^3 > b^2$ خواهد شد.



حال موارد داده شده را بررسی می‌کنیم:

الف) $a^2 < 1$: اگر $a < -1$ باشد $a^2 > 1$ می‌شود. پس این مورد همواره درست نیست.

ب) $b^2 < b^3$: اگر $b < -1$ باشد $b^2 > b^3$ می‌شود. این مورد نیز همواره درست نیست.

ج) $ab < 1$: اگر $a < -1$ و $b < -1$ باشد $ab > 1$ می‌شود. این مورد نیز همواره درست نیست.

د) $a + b < 1$: اگر $a = 0/9$ و $b = 0/9$ باشد، $a + b > 1$ می‌شود. این مورد نیز همواره درست نیست.

۳) اگر ریشه‌ی پنجم عدد x برابر $\frac{3}{4}$ و ریشه‌ی سوم عدد y برابر $\frac{4}{3}$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ی دوم مثبت عدد y در ریشه‌ی چهارم مثبت عدد x کدام است؟

(۱) $4\sqrt[4]{3}$

(۲) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$

(۳) $\frac{4}{\sqrt[4]{6}}$

(۴) $4\sqrt[4]{27}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt[5]{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3^5}{4^5}, \quad \sqrt[3]{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4^3}{3^3} = \frac{4^6}{3^6}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{y} \times \sqrt[4]{x} &= \sqrt{\frac{4^6}{3^6}} \times \sqrt[4]{\frac{3^5}{4^5}} = \frac{4^3}{3^3} \times \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times \frac{3}{4} \times \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4^3 \sqrt[4]{3}}{3^3 \sqrt[4]{4}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{4^3 \sqrt[4]{3}}{3^3 \sqrt[4]{3}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{4}{\sqrt[4]{6}} \end{aligned}$$

۴) اگر عددی منفی باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{-x}}}$ ، کدام است؟

(۱) $\sqrt{-x}$

(۲) $-\sqrt{-x}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$

(۴) $-\frac{1}{\sqrt{-x}}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{-x}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{x^3 \cdot x}}}{\sqrt[3]{-\sqrt{-x^2 \cdot x}}} = \frac{\sqrt[4]{x^4}}{-\sqrt[3]{-x^3}} = -\sqrt[6]{\frac{x^4}{-x^3}} = -\sqrt[6]{-x}$$

۵) اگر $x < \sqrt{x}$ و همچنین $x^F > x^Y$ باشد، آنگاه کدامیک از موارد زیر درست است؟

- (۱) $x + 1 < 0$
- (۲) $x^2 + x > 0$
- (۳) $x^9 > x^5$
- (۴) $\frac{x}{x+1} > 0$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به $x < \sqrt{x}$ ، درمی یابیم $x > 0$ یا $-1 < x < 0$ می باشد. از طرفی چون $x^F > x^Y$ است، پس مقادیر x باید به صورت $-1 < x < 0$ باشد. حال باید گزینه ای را انتخاب کنیم که به ازای $-1 < x < 0$ برقرار باشد.

بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»: $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

گزینه «۲»: $x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0$

$\Rightarrow x > 0$ یا $x < -1$

گزینه «۳»: $x^9 > x^5$ ✓

گزینه «۴»: $\frac{x}{x+1} > 0$

$\Rightarrow x > 0$ یا $x < -1$

۶) چند مورد از عبارتهای زیر، همواره برقرار هستند؟

الف) $\sqrt{\frac{x}{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}$ (الف) ب) $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$

پ) $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ (پ) ت) $\sqrt{x^2+4} = x+2$

ث) $\sqrt[n]{\sqrt{x+y}} = \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ (ث) هـ) $(\sqrt[n]{a^m})^n = |a|$ (هـ)

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۱

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

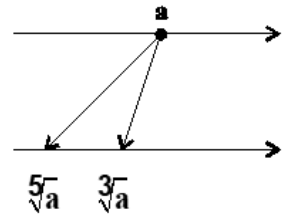
گزینه «۱»

موارد پ و ه همواره برقرار هستند.

اگر $x < 0$ باشد الف و ب درست نیست.

در حالت کلی روابط ت و ث نیز درست نیستند.

۷) اگر ریشه‌های پنجم و سوم عدد a به صورت زیر روی محور نمایش داده شود، کدام گزینه قطعاً نادرست است؟



- (۱) $a^5 > a^3$
- (۲) $a^3 > a^5$
- (۳) $a^3 > a^5$
- (۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

زمانی ریشه سوم a از ریشه پنجم a بزرگ‌تر است که یا $a > 1$ یا $0 < a < 1$ باشد اگر $a > 1$ باشد، $a^5 > a^3$ ، $a^3 > a^5$.
 اگر $0 < a < 1$ باشد، $a^3 > a^5$ و $a^5 > a^3$.

۸) توان چهارم عبارت $\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} - \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱۶
- (۳) ۴
- (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

فرض می‌کنیم: $x = \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} - \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}$

طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 = (2\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (2\sqrt{2} - \sqrt{6}) - 2 \sqrt{\underbrace{(2\sqrt{2} + \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{6})}_{\text{مزدوج}}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{8 - 6} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 = 8 \Rightarrow x^4 = 8$$

۹) حاصل عبارت $((3 + 2\sqrt{2})^{\sqrt{3} + \sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1)^{2\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ کدام است؟

(۱) $(3 + 2\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

(۲) ۱

(۳) $(\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{2}}$

(۴) $(\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{3}}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا دقت کنید که: $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$ و $(\sqrt{2} + 1)^{-1} = (\sqrt{2} - 1)$ پس:

$$\begin{aligned} (3 + 2\sqrt{2})^{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2\sqrt{2}} &= (\sqrt{2} + 1)^{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} (\sqrt{2} + 1)^{-2\sqrt{2}} \\ &= (\sqrt{2} + 1)^{2\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^{2\sqrt{3}}} = (\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

۱۰) حاصل عبارت $(2 + \sqrt{3})^{3 - \sqrt{3}} (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{3} + 1}}$ کدام است؟

(۱) $7 + 4\sqrt{3}$

(۲) $2 - 4\sqrt{3}$

(۳) $4 + 2\sqrt{3}$

(۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دقت کنید که $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ بنابراین:

$$(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{3} + 1}} = (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{3} + 1}} = (2 + \sqrt{3})^{\sqrt{3} - 1}$$

و در نتیجه:

$$(2 + \sqrt{3})^{3 - \sqrt{3}} (2 + \sqrt{3})^{\sqrt{3} - 1} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

۱۱) حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{64} (\sqrt[3]{72} \div \sqrt[3]{48})$ کدام است؟

(۱) $9\sqrt[3]{8}$

(۲) $3\sqrt[3]{2}$

(۳) $\sqrt[3]{2}$

(۴) $\sqrt[3]{3}$

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \sqrt[3]{2^6} (\sqrt[3]{8 \times 9} \div \sqrt[3]{3^3 \times 16})$$

$$= 2^{\frac{6}{3}} (\sqrt[3]{2^3 \times 3^2} \div \sqrt[3]{3^3 \times 2^4}) = 2^{\frac{6}{3}} (2^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div (3^{\frac{3}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}))$$

$$= 2^{\frac{6}{3}} (2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div (3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}})) = 2^{\frac{6}{3}} \times \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{6}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2 = \sqrt[3]{8}$$

$$= 2^{\frac{3}{3}} = 2 = \sqrt[3]{8}$$

۱۲) اگر $x < 0$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[3]{\frac{5x}{16}} \sqrt[4]{\frac{16}{625x^4}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) -1
- (۴) 1

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{5x}{16}} \sqrt[4]{\frac{16}{625x^4}} &= \sqrt[3]{\frac{5x}{16}} \sqrt[4]{\frac{2^4}{5^3 x^4}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{5x}{16}} \times \frac{2}{5|x|} \quad \begin{matrix} x < 0 \Rightarrow |x| = -x \\ \sqrt[4]{2^4} = 2 \\ \sqrt[4]{5^3} = 5 \end{matrix} \\ &= \sqrt[3]{\frac{5x}{16}} \times \frac{2}{5(-x)} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2^3}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۳) اگر $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ حاصل $x^3 - 3x$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ داریم:

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3 = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) + \\ &+ 3(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}+1})(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}) \\ \Rightarrow x^3 &= 2\sqrt{2} + 3 \times 1 \times x \Rightarrow x^3 - 3x = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۴) حاصل عبارت $(\frac{\sqrt[3]{144}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{16}})^3$ کدام است؟

- (۱) $9\sqrt{2}$
- (۲) $3\sqrt{4}$
- (۳) $\frac{\sqrt{4}}{3}$
- (۴) $\frac{\sqrt{4}}{9}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[3]{144}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{16}}\right)^3 &= \frac{(\sqrt[3]{144})^3}{3^3 \times (\sqrt[3]{16})^3} = \frac{\sqrt{144}}{9 \times (\sqrt[3]{16})^3} = \frac{12}{9 \times (2^{\frac{4}{3}})^3} \\ &= \frac{3 \times 4}{9 \times 2^4} = \frac{3 \times 2^2}{3^3 \times 2^4} = \frac{2^{2-\frac{12}{3}}}{3^3} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \end{aligned}$$

۱۵) حاصل عبارت $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} \left[(\sqrt{3-\sqrt{8}}) - (\sqrt{3+\sqrt{8}}) \right]$ برابر کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{3}$
- (۲) $-3\sqrt{3}$
- (۳) $-8\sqrt{3}$
- (۴) $8\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned}
 A &= \left[(\sqrt{3-\sqrt{8}}) - (\sqrt{3+\sqrt{8}}) \right], A < 0 \\
 \Rightarrow A^2 &= 3 - \sqrt{8} + 3 + \sqrt{8} - 2\sqrt{9-8} \\
 \Rightarrow A^2 &= 6 - 2 \Rightarrow A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2 \xrightarrow{A < 0} A = -2 \\
 B &= A \times \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = (-2) \times \sqrt[3]{\sqrt{27}} = (-2) \times \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} \\
 &= (-2) \times 3^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = (-2) \times 3^{\frac{1}{6}} = -2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

۱۶) اگر $n \in N$ و $n > 1$ باشد، حاصل $(\sqrt{2}-1)^n (\sqrt{2}+1)^{n+2} (3-2\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$
- (۲) $4\sqrt{2}$
- (۳) ۱
- (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{2}-1)^n \times (\sqrt{2}+1)^n \times (\sqrt{2}+1)^2 (3-2\sqrt{2}) \\
 &= [(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^n (\sqrt{2}+1)^2 (3-2\sqrt{2}) \\
 &= (2-1)^n (\sqrt{2}+1)^2 (3-2\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9-8=1
 \end{aligned}$$

۱۷) اگر $a = 3^{\frac{f}{g}}$ و $b = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{f}{g}}$ باشد، آنگاه $45^{\frac{f}{g}}$ بر حسب a و b کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt[3]{a}}{b}$
- (۲) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$
- (۳) $ba^{\frac{1}{3}}$
- (۴) $\frac{b}{\sqrt[3]{a}}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$3^{\frac{f}{g}} = a \Rightarrow 3 = a^{\frac{g}{f}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 = a^{\frac{2g}{f}}$$

میرسانیم

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{f}{g}} = b \Rightarrow (5^{-2})^{\frac{f}{g}} = b \Rightarrow 5^{-\frac{2f}{g}} = b \Rightarrow 5^{-f} = b^{\frac{g}{2}}$$

$$5 = b^{-\frac{2}{g}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{g}}$$

$$45^{\frac{f}{g}} = (9 \times 5)^{\frac{f}{g}} = \left(a^{\frac{2g}{f}} \times \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2g}{f}}\right)^{\frac{f}{g}} = a\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2g}{g}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}}$$

۱۸) اگر مخرج عبارت $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt{x}}$ را گویا کنیم، به صورت $\frac{\sqrt[3]{xA}}{x-1}$ می‌شود. A همواره کدام است؟

(۱) $\sqrt{x} - 1$

(۲) $\sqrt[3]{x} - 1$

(۳) $1 - \sqrt{x}$

(۴) $\sqrt{x} - 1$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{x-1} = \frac{x^{\frac{1}{6}}(x^{\frac{1}{6}}-1)}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x}-1)}{x-1} \Rightarrow A = \sqrt{x} - 1$$

۱۹) اگر $\frac{x^y-1}{x} = 2$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^y}{x^y-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{14}$

(۲) ۱۴

(۳) ۲

(۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\frac{x^y-1}{x} = \frac{x^y}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = 2$$

$$x^y - \frac{1}{x^y} - 3x^y \left(\frac{1}{x}\right) + 3x \left(\frac{1}{x^y}\right) = 8$$

$$\Rightarrow x^y - \frac{1}{x^y} - 3x + 3\frac{1}{x} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{x^y-1}{x^y} - 3 \left(x - \frac{1}{x}\right) = 8$$

$$\frac{x^y-1}{x^y} = 14 \Rightarrow \frac{x^y}{x^y-1} = \frac{1}{14}$$

طرفین رابطه بالا را به توان ۳ می‌رسانیم داریم:

۲۰) به ازای چه مقداری از a تساوی $(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt[4]{a}) = 3\sqrt{2}$ برقرار است؟

۱ (۱)

۳ (۲)

۹ (۳)

۸۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt[4]{a}) = (\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt[4]{a})$$

$$= (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt[4]{a}) = 3\sqrt{2}$$

طرفین به توان ۲

$$\rightarrow (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt[4]{a}) = 18$$

$$6\sqrt{a} = 18 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

۲۱) حاصل $(13 - \sqrt{7}) \left(\frac{12}{\sqrt{7}+2} + \frac{18}{\sqrt{7}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}+3} \right)$ کدام است؟

۱۵۲ (۱)

۱۵۴ (۲)

۱۵۸ (۳)

۱۶۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\frac{12}{\sqrt{7}+2} = \frac{12(\sqrt{7}-2)}{7-4} = 4(\sqrt{7}-2) = 4\sqrt{7}-8$$

$$\frac{18}{\sqrt{7}-1} = \frac{18(\sqrt{7}+1)}{7-1} = 3\sqrt{7}+3$$

$$\frac{12}{\sqrt{7}+3} = \frac{12(\sqrt{7}-3)}{7-9} = -6\sqrt{7}+18$$

پس داریم:

$$(4\sqrt{7}-8 + 3\sqrt{7}+3 - 6\sqrt{7}+18)(13-\sqrt{7})$$

$$= (13+\sqrt{7})(13-\sqrt{7}) = 169-7 = 162$$

۲۲) اگر $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4} = 6a$ باشد، حاصل $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) $-\frac{1}{a}$
 (۲) ۱
 (۳) -۱
 (۴) $\frac{1}{a}$

پاسخ: گزینه ۴

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}) = x+2 - (x-4)$$

$$\Rightarrow 6a(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}) = 6 \Rightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = \frac{1}{a}$$

۲۳) معکوس عدد $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2} + 5$
 (۲) $\frac{2\sqrt{2}-5}{3}$
 (۳) $\frac{2\sqrt{2}+5}{17}$
 (۴) $\frac{5-2\sqrt{2}}{17}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{1(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 + 2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 5 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{2} + 5$$

$$\Rightarrow \text{معکوس} = \frac{1}{2\sqrt{2}+5} \times \frac{2\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-5} = \frac{2\sqrt{2}-5}{8-25} = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}$$

۲۴) اگر $2a^x + 4b^x - 4ab - 2a + 1 = 0$ باشد، آنگاه حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) ۱
 (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$2a^x + 4b^x - 4ab - 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a^x - 4ab + 4b^x + a^x - 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2b)^x + (a - 1)^x = 0$$

چون مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس هر کدام باید صفر باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۲۵) اگر $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

۲ (۱)

$\frac{4}{3}$ (۲)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$$

با استفاده از اتحاد $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ طرفین تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2})^3 = 1^3$$

$$\Rightarrow x+1 - (x-2) - 3(\sqrt[3]{x+1})(\sqrt[3]{x-2})(\underbrace{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}}_1) = 1$$

$$\Rightarrow 3 - 3\sqrt[3]{(x+1)(x-2)} = 1 \Rightarrow 3 - 3\sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$