نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون B1 نامعادلات و تعیین علامت

نام برگزار مرکز مشاوره تحصیلی راه روشن

۱ چند عدد صحیح در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۲ < \frac{۳x+۴}{x+۳} < ۴$ قرار ندارد؟

۱) ۱۰

۲) ۱۲

۳) ۱۱

۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

از طرفین نامساوی $\frac{۲+۴}{۲} = ۳$ واحد کم می‌کنیم:

$$-۱ < \frac{۳x+۴}{x+۳} - ۳ < ۱ \Rightarrow -۱ < \frac{-۵}{x+۳} < ۱$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-۵}{x+۳}\right| < ۱ \Rightarrow \frac{۵}{|x+۳|} < ۱ \Rightarrow |x+۳| > ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۳ > ۵ \\ \text{یا} \\ x+۳ < -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < -۸ \end{cases} \Rightarrow R - [-۸, +۲]$$

اعداد صحیح $\{-۸, -۷, \ldots, ۱, ۲\}$ در نامعادله صدق نمی‌کنند.

۲) مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{x+۳}{۲x+۳}\right| > ۲$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۹}{۵}, -۱)$
۲) $(-\frac{۹}{۵}, -\frac{۳}{۲}) \cup (-\frac{۳}{۲}, -۱)$
۳) $(-\frac{۳}{۲}, -۱)$
۴) $(-\frac{۹}{۵}, -\frac{۳}{۲})$

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

چون مخرج کسر مثبت می‌باشد، پس می‌توانیم طرفین وسطین کنیم.

$$|x+۳| > ۲\,|۲x+۳| \Rightarrow |x+۳| > |۴x+۶|$$

به دلیل اینکه هر دو عبارت مثبت هستند، توان ۲ رساندن مجاز است:

$$(x+۳)^۲ > (۴x+۶)^۲ \Rightarrow (۴x+۶)^۲ - (x+۳)^۲ < ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (۵x+۹)(۳x+۳) < ۰ \Rightarrow x \in (-\frac{۹}{۵}, -۱)$$

اما چون $x = -\frac{۳}{۲}$ ریشه مخرج است، قابل قبول نیست و باید از جواب به دست آمده حذف شود: $x \in (-\frac{۹}{۵}, -۱) - \{-\frac{۳}{۲}\}$

۳) اگر جدول تعیین علامت تابع $f(x) = (a^۲ + a - ۴)x + a + ۱$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه حاصل $f(a)$ کدام است؟

x		1	
f(x)	−	0	+

۱) ـ۳
۲) ۱
۳) ـ۸
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به جدول تعیین علامت، $x = ۱$ریشه تابع f است یعنی $f(۱) = ۰$ پس داریم،

$$f(x) = (a^۲ + a - ۴)x + a + ۱ \xrightarrow{f(۱)=۰} a^۲ + a - ۴ + a + ۱ = ۰$$

$$. \Rightarrow a^۲ + ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ a = ۱ \end{cases} .$$

چون علامت سمت راست ریشه مثبت است پس ضریب x باید عددی مثبت باشد پس $a = -۳$ قابل قبول است،

$$\left.\begin{matrix} a = -۳ \text{ ق ق} \\ a = ۱ \text{ غ ق ق} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = ۲x - ۲ \Rightarrow f(a) = f(-۳) = -۸$$

④ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، نمودار $y = x^2 + mx + 1$ همواره زیر محورxها قرار می‌گیرد؟

۱) $-2 \le m \le 2$

۲) $m \le -2$ یا $m \ge 2$

۳) $-2 \le m$

۴) ϕ

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

شرط قرارگیری نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ زیر محورxها، $\Delta < 0$ و $a < 0$ است، در همین نگاه اول معلوم است که $a = 1 > 0$. بنابراین به ازای هیچ مقداری از m، این نمودار زیر محورxها قرار نمی‌گیرد

⑤ مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x^2 - |x| - 6}{-3x^2 + 2x - 6} \le 0$ با مجموعه جواب کدام نامعادله یکسان است؟

۱) $|x| \le 2$

۲) $|x| \le \frac{3}{2}, |x| \ge 2$

۳) $|x| \ge 2$

۴) $|x| \le \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

توجه کنید که مخرج کسر یعنی $-3x^2 + 2x - 6$ (دلتای منفی و ضریب x^2 منفی دارد) همواره منفی است. در نتیجه صورت کسر باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یعنی:

$$2x^2 - |x| - 6 \ge 0$$

اگر فرض کنیم $k = |x|$، بنابراین نامعادله $2k^2 - k - 6 \ge 0$ را باید حل کنیم که جواب آن $k \ge 2$ یا $k \le -\frac{3}{2}$ است. چون $k = |x| > 0$ است، پس مجموعه جواب قابل قبول $k \ge 2$ یعنی $|x| \ge 2$ است.

⑥ مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^۶(x+۲)^۵|x-۳|}{(x^۲-۶x+۵)(x-۱)} \le ۰$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا بایستی ریشه‌های تمامی عوامل حاضر در صورت و مخرج کسر را به‌دست آوریم و سپس با رسم جدول تعیین علامت به دنبال بازه‌هایی باشیم که در آن، کل عبارت منفی یا صفر شده باشد.

$$\begin{cases} x^۶ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \\ x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x^۲ - ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۱, x_۲ = ۵ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۲		۰		۱		۳		۵	$+\infty$
$x^۶$	+		+	۰	+		+		+		+
$(x+۲)^۵$	−	۰	+		+		+		+		+
$\|x-۳\|$	+		+		+		+	۰	+		+
$(x-۱)(x-۵)$	+		+		+	۰	−		−	۰	+
$x-۱$	−		−		−	۰	+		+		+
کل	+	۰	−	۰	−	ت‌ن	−	۰	−	ت‌ن	+

$[-۲,۵) - \{۱\}$ = مجموعه جواب

بازه مجموعه جواب شامل ۶ عدد صحیح ۴ ۳ ۲ ۰ ۱-و۲- می‌شود.

۷) اگر جواب نامعادله $x(x^۲ - x - ۸) + ۱۲ > ۰$ به صورت $(a, +\infty) - \{b\}$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۳

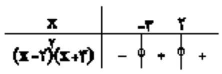
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\underbrace{x^۳ - x^۲ - ۸x + ۱۲}_{f(x)} > ۰ \xrightarrow[\text{بر } x-۲ \text{ بخش‌پذیر است}]{f(۲)=۰}$$

$$(x - ۲)(x^۲ + x - ۶) > ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲(x + ۳) > ۰$$

حال برای تعیین علامت آن داریم:



$$\Rightarrow b - a = ۲ - (-۳) = ۵$$

۸) اگر بازه $(-۱, ۲)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد، که سهمی $y = x^۲ - ۲ax + b$ پایین‌تر از خط $y = ax + ۳b$ قرار بگیرد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بازه $(-۱, ۲)$ مجموعه جواب‌های نامعادله $x^۲ - ۲ax + b < ax + ۳b$ است:

$$\Rightarrow x^۲ - ۳ax - ۲b < ۰$$

برای اینکه بازه $(-۱, ۲)$ بزرگ‌ترین بازه جواب نامعادله بالا باشد، لازم است که $x = -۱$ و $x = ۲$ جواب معادله $x^۲ - ۳ax - ۲b = ۰$ باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱ : ۱ + ۳a - ۲b = ۰ \Rightarrow ۳a - ۲b = -۱ \\ x = ۲ : ۴ - ۶a - ۲b = ۰ \Rightarrow ۳a + b = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۳}, \quad b = ۱ \Rightarrow a + b = \frac{۴}{۳}$$

۹) مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-1} < \frac{3}{x^2+x-2}$ کدام است؟

۱) (-۳ , -۲)
۲) (-۲, ۱)
۳) (-∞, -۳) ∪ (۱, +∞)
۴) (-۲, +∞)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\frac{x}{x-1} - \frac{3}{(x+2)(x-1)} < 0 \rightarrow \frac{x(x+2)-3}{(x+2)(x-1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2+2x-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-1)} < 0$$

→

x		–3		–2		1	
	+	0	–	ت ن	+	ت ن	+

$\rightarrow x \in (-3, -2)$

۱۰) اگر جواب نامعادله $\frac{x+b}{۲ax-۳} > ۰$ به صورت $(-۱, ۵)$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$
۲) -۵
۳) $\frac{۱۵}{۲}$
۴) $\frac{-۱۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به این‌که جواب نامعادله بازه $(-۱,۵)$ است، بنابراین ۱- و ۵ ریشه‌های عبارت‌های صورت و مخرج کسر هستند. ریشه‌های صورت و مخرج کسر این نامعادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x + b = ۰ \Rightarrow x = -b$$

$$۲ax - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲a}$$

با توجه به ریشه‌های به دست آمده دو حالت پیش می‌آید:

۱) $a > ۰$ باشد:

در این حالت $\frac{۳}{۲a} > ۰$ است، پس عدد ۵ باید برابر این ریشه باشد.

$$\begin{cases} \frac{۳}{۲a} = ۵ \Rightarrow a = \frac{۳}{۱۰} \\ -b = -۱ \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

x		−1		5	
$x+1$	−	0	+		+
$\frac{3}{5}x-3$	−		−	0	+
عبارت	+	0	−	ت ن	+

$\Rightarrow x \in (-\infty, -۱) \cup (۵, +\infty)$ غ‌ق‌ق

پس این حالت قابل قبول نیست.

۲) $a < ۰$ باشد:

در این حالت $\frac{۳}{۲a} < ۰$ است، پس عدد۱- باید برابر این ریشه باشد.

$$\begin{cases} \frac{۳}{۲a} = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲} \\ -b = ۵ \Rightarrow b = -۵ \end{cases}$$

x		−1		5	
$x-5$	−		−	0	+
$-3x-3$	+	0	−		−
عبارت	−	ت ن	+	0	−

$\to -1 < x < 5 \to$ ق ق

$$\Rightarrow a \times b = \frac{-۳}{۲} \times -۵ = \frac{۱۵}{۲}$$

۱۱) اگر مجموعه جواب نامعادله $۳x+۱<۱-x<x+۵$ بازه $(a\ ,\ b)$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $|۳x+a|<b+۱$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}\ ,\ ۳)$
۲) $(\frac{۱}{۳}\ ,\ ۱)$
۳) $(-\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۲}{۳})$
۴) $(-\frac{۱}{۳}\ ,\ ۱)$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در نامعادله داده شده داریم:

$$\begin{cases} ۳x+۱<۱-x \Rightarrow ۴x<۰ \Rightarrow x<۰ \\ ۱-x<x+۵ \Rightarrow -۴<۲x \Rightarrow -۲<x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲<x<۰$$

$$\Rightarrow x\in(-۲\ ,\ ۰) \Rightarrow a=-۲\ ,\ \ b=۰$$

$$|۳x+a|<b+۱ \Rightarrow |۳x-۲|<۱ \Rightarrow -۱<۳x-۲<۱$$

$$\Rightarrow ۱<۳x<۳ \Rightarrow \frac{۱}{۳}<x<۱$$

۱۲) به ازای چه حدودی از m عبارت $\frac{(m+۲)x^۲+۲mx+m-۱}{-x^۲+۳x-۴}$ همواره منفی است؟

۱) $-۲<m$
۲) $-۲<m<۲$
۳) $۲<m$
۴) $m<۲$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

عبارت مخرج کسر همواره منفی است، زیرا در معادله آن $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$، منفی است.

$$\Delta_{\text{مخرج}}=۳^۲-۴\times(-۴)\times(-۱)=۹-۱۶=-۷<۰$$

$$\text{ضریب } x^۲ \text{ در مخرج کسر}=-۱<۰$$

برای آن‌که مقدار کسر، همواره منفی باشد، باید عبارت صورت کسر همواره مثبت باشد، پس:

$$(۱)\quad \text{ضریب } x^۲ \text{ در صورت کسر}:\ m+۲>۰ \Rightarrow m>-۲$$

$$\begin{aligned} &\Delta<۰ \Rightarrow (۲m)^۲-۴(m-۱)\times(m+۲)<۰ \\ &\Rightarrow ۴m^۲-۴m^۲-۴m+۸<۰ \Rightarrow ۸<۴m \Rightarrow ۲<m \qquad (۲) \\ &\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} ۲<m \end{aligned}$$

۱۳) اگر مجموعه جواب نامعادله $|۲ - |x - ۱|| < ۲$ به صورت $(-a\ ,\ a + ۲) - \{b\}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$|۲ - |x - ۱|| < ۲ \Rightarrow -۲ < ۲ - |x - ۱| < ۲$

$-۴ < -|x - ۱| < ۰ \Rightarrow ۰ < |x - ۱| < ۴$

از نامعادله $|x - ۱| > ۰$ نتیجه می‌شود $x \neq ۱$ و از نامعادله $|x - ۱| < ۴$ نتیجه می‌شود $-۴ < x - ۱ < ۴$، یعنی $-۳ < x < ۵$.

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $(-۳, ۵) - \{۱\}$ است و در نتیجه $a = ۳$ و $b = ۱$ می‌باشد. پس $a + b = ۴$.

۱۴) مجموعه جواب نامعادله $\frac{۵x^۲ - bx + ۲c}{x - ۲} \geq ۰$ به‌صورت $[a, ۱] \cup (۲, +\infty)$ است. مقدار $b - ۵a$ کدام است؟

۱) ۵
۲) -۵
۳) ۴
۴) -۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

برای حل نامعادله از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

مخرج کسر: $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

با توجه به جواب نامعادله، $x = ۱$ و $x = a$ جواب‌های معادله $۵x^۲ - bx + ۲c = ۰$ (صورت کسر) هستند. در نتیجه:

$$\xrightarrow{x=۱} ۵ - b + ۲c = ۰ \Rightarrow -b + ۲c = -۵ \qquad (I)$$

از طرفی چون مجموع ضرایب معادله درجه دوم برابر صفر است، پس ریشه دیگر معادله برابر است با:

$$\frac{۲c}{۵} = a \Rightarrow ۲c = ۵a \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II),(I)} -b + ۵a = -۵ \Rightarrow b - ۵a = ۵$$

۱۵) مجموعه مقادیر m که به ازای آن‌ها معادله $(x-۲)(mx^۲+۶x+۹)=۰$، سه ریشه حقیقی متمایز دارد، کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)-\{۰\}$

۲) $(-\infty,۱)-\{۰,-\frac{۲۱}{۴}\}$

۳) $(-\infty,-۱)$

۴) $(۱,+\infty)-\{\frac{۲۱}{۴}\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

حاصل‌ضرب دو پرانتز صفر شده پس هر کدام می‌توانند صفر باشند:

$$(x-۲)(mx^۲+۶x+۹)=۰$$
$$\begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ mx^۲+۶x+۹=۰ \end{cases}$$

اولاً باید این معادله درجه دوم دو ریشه متمایز داشته باشد تا در مجموع سه ریشه داشته باشیم پس باید $\Delta > ۰$ باشد:

$$۶^۲-۴(m)(۹)>۰ \Rightarrow ۳۶>۳۶m \Rightarrow ۱>m$$

ثانیاً باید $x=۲$ ریشه تکراری نباشد، پس نباید $x=۲$ ریشه پرانتز دوم باشد:

$$x=۲: m(۲)^۲+۶(۲)+۹\neq ۰ \Rightarrow ۴m+۲۱\neq ۰$$
$$\Rightarrow m\neq -\frac{۲۱}{۴}$$

از طرفی به‌ازای $m=۰$، پرانتز دوم، درجه دوم نخواهد بود. بنابراین:

$$m\neq ۰$$

از اشتراک جواب‌ها داریم: $(-\infty,۱)-\{۰,-\frac{۲۱}{۴}\}$

۱۶) نمودار سهمی $y=۳x^۲+mx+۴$ همواره بالای خط $y=-۲x+۱$ قرار می‌گیرد. حدود m کدام است؟

۱) $(-۸\,,\,۴)$

۲) $(-۶\,,\,۶)$

۳) $(۰\,,\,+\infty)$

۴) $(-۴\,,\,۸)$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

نمودار سهمی $f(x)=۳x^۲+mx+۴$ بالای خط $g(x)=-۲x+۱$ قرار دارد.

$$\Rightarrow f(x)>g(x) \Rightarrow ۳x^۲+mx+۴>-۲x+۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+(m+۲)x+۳>۰$$

برای اینکه عبارت درجه دوم $۳x^۲+(m+۲)x+۳$ همواره مثبت باشد، باید دلتای آن منفی باشد، پس داریم:

$$\Delta=(m+۲)^۲-۴(۳)(۳)<۰ \Rightarrow (m+۲)^۲<۳۶$$

$$\Rightarrow |m+۲|<۶ \Rightarrow -۶<m+۲<۶ \Rightarrow -۸<m<۴$$

۱۷ جدول تعیین علامت زیر مربوط به عبارت $P(x) = \frac{(a+۱)x^۲+bx+۱}{x^۲-x+۱}$ است، حاصل $a+b$ کدام است؟

x		-2	
P(x)	$-$	0	$+$

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

در عبارت $P(x)$، عبارت درجه دوم در مخرج کسر ریشه ندارد زیرا دلتای آن منفی است، همچنین ضریب $x^۲$ مثبت است لذا همواره $x^۲-x+۱>۰$ است و در تعیین علامت نقشی ندارد. با توجه به جدول تعیین علامت $x=-۲$ ریشه ساده عبارت صورت کسر است پس باید صورت کسر یک عبارت درجه اول باشد. پس داریم:

$$a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$
$$P(-۲)=۰ \Rightarrow b(-۲)+۱=۰ \Rightarrow -۲b+۱=۰$$
$$\Rightarrow -۲b=-۱ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $a+b=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$ است.

۱۸) اگر جدول تعیین علامت عبارت $ax + b$ به صورت زیر باشد، جدول تعیین علامت عبارت $bx - ۲a$ کدام است؟

x		$\frac{3}{2}$	
ax + b	+	0	−

۱)

x		−3	
	+	0	−

۲)

x		−3	
	−	0	+

۳)

x		$-\frac{4}{3}$	
	+	0	−

۴)

x		$-\frac{4}{3}$	
	−	0	+

پاسخ: گزینه ۴

ریشه عبارت $ax + b$ یعنی $-\frac{b}{a}$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است. پس:

$$-\frac{b}{a} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow b = -\frac{۳}{۲}a$$

ضمناً با توجه به جدول نتیجه می‌گیریم: $a < ۰$ و $b > ۰$

حالا ریشه عبارت $bx - ۲a$ را حساب می‌کنیم:

$$bx - ۲a = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲a}{b} = \frac{۲a}{-\frac{۳}{۲}a} = -\frac{۴}{۳}$$

چون $b > ۰$ است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x		$-\frac{4}{3}$	
bx − 2a	−	0	+

۱۹) با توجه به جدول زیر که مربوط به تعیین علامت عبارت $P = \frac{ax+c}{2x^2-ax-4}$ است، حاصل $c+k$ کدام است؟

x		k		a	
P	−	ت ن	+	ت ن	+

۱) ۵
۲) ۳-
۳) ۵-
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

کسر داده شده در ریشه‌های مخرج یعنی $x=a$ و $x=k$ تعریف نشده است. از آن‌جایی که عبارت P در $x=a$ تغییر علامت نداده است، پس $x=a$ ریشه صورت کسر نیز می‌باشد. همچنین علامت ضریب x در صورت کسر (یعنی a) باید مثبت باشد.

$$x=a \xrightarrow{\text{در صورت}} a^2+c=0$$
$$x=a \xrightarrow{\text{در مخرج}} 2a^2-a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \xrightarrow{a>0} a=2$$
$$a^2+c=0 \xrightarrow{a=2} 4+c=0 \Rightarrow c=-4$$
$$a=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در مخرج}} 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1=k \\ x=2 \end{cases}$$
$$c+k=-1-4=-5$$

۲۰) نمودار تابع $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2-2x-3}$ به ازای $x \in (a,b)$ در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در ناحیه اول، باید $x>0$ و $f(x)>0$ باشد. ابتدا ضابطه تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(1-2x)(1+2x)}{(x-3)(x+1)}$$

x		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3	
f(x)	−	ت ن	+	۰	−	۰	+	ت ن	−

در مجموعه $(\frac{1}{2},3) \cup (-1,-\frac{1}{2})$ شرط $f(x)>0$ برقرار است که اشتراک آن با شرط $x>0$ بازه $(\frac{1}{2},3)$ است، پس حداکثر مقدار $b-a$ برابر خواهدشد با: $3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$.

۲۱) مجموعه جواب نامعادله $x^۲ + ax + b \ge ۰$ به صورت $|x - ۲| \ge ۳$ می‌باشد. حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۹-
۲) ۸-
۳) ۱۰-
۴) ۱۱-

پاسخ: گزینه ۱

$$|x - ۲| \ge ۳ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ \ge ۳ \Rightarrow x \ge ۵ \\ x - ۲ \le -۳ \Rightarrow x \le -۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله درجه دوم $x^۲ + ax + b \ge ۰$ به‌صورت $(-\infty , -۱] \cup [۵ , +\infty)$ است، پس نامعادله به صورت $(x + ۱)(x - ۵) \ge ۰$ است، لذا:

$$(x + ۱)(x - ۵) = x^۲ - ۴x - ۵ = x^۲ + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۴ \\ b = -۵ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۹$$

۲۲) با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $P = ۲x^۳ + ax^۲ + bx + c$، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

x		−۲		۱	
P	−	۰	+	۰	+

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱-
۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

توجه کنید که عبارت P در $x = ۱$ تغییر علامت نداده، ولی در $x = -۲$، تغییر علامت داده است، پس با توجه به این‌که در عبارت P، ضریب $x^۳$ برابر با ۲ است، می‌توان نوشت:

$$P = ۲(x - ۱)^۲(x + ۲) \Rightarrow P = ۲(x^۲ - ۲x + ۱)(x + ۲)$$

$$\Rightarrow P = ۲(x^۳ - ۲x^۲ + x + ۲x^۲ - ۴x + ۲) = ۲(x^۳ - ۳x + ۲)$$

$$\Rightarrow P = ۲x^۳ - ۶x + ۴$$

از مقایسه‌ی تساوی اخیر با $P = ۲x^۳ + ax^۲ + bx + c$، داریم:

$$\begin{cases} a = ۰ \\ b = -۶ \\ c = ۴ \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -۲$$

۲۳) مجموعه جواب نامعادله $۲x - ۱ < |x| - x < ۵x$ کدام بازه است؟

۱) $(۰, \frac{۱}{۲})$
۲) $(۰, \frac{۱}{۴})$
۳) $(۰, +\infty)$
۴) $(-\infty, ۰)$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به حضور قدرمطلق در نامعادله، احتیاج به تقسیم‌بندی بازه وجود دارد:

$$x \geq ۰ : ۲x - ۱ < ۰ < ۵x \Rightarrow \begin{cases} ۵x > ۰ \Rightarrow x > ۰ \\ ۲x - ۱ < ۰ \Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

از اشتراک تمام شرط‌ها برای این قسمت، مجموعه جواب $(۰, \frac{۱}{۲})$ به‌دست می‌آید:

$$x < ۰ : ۲x - ۱ < -۲x < ۵x \Rightarrow \begin{cases} -۲x < ۵x \Rightarrow x > ۰ \\ ۲x - ۱ < -۲x \Rightarrow x < \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

از اشتراک تمام شرط‌ها برای این قسمت، مجموعه جواب $\emptyset$ به‌دست می‌آید.

پس جواب مسئله $(۰, \frac{۱}{۲})$ است.

۲۴) به ازای کدام مقادیر a، جدول تعیین علامت زیر برقرار است؟

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(a+2)x^2+2ax+1$		$-$	0	$-$	

۱) $a = -۱$ و $a = ۲$
۲) $a = -۴$
۳) $a = -۱$
۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به جدول تعیین علامت، عبارت درجه ۲ یک ریشه مضاعف دارد و ضریب $x^۲$ منفی است. لذا $x = -\frac{۱}{۲}$ ریشه تکراری و طول رأس عبارت (سهمی) می‌باشد.

$$x = -\frac{b'}{۲a'} = \frac{-۲a}{۲a+۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a = ۲a + ۴ \Rightarrow a = ۲ \qquad (۱)$$

$$a + ۲ < ۰ \Rightarrow a < -۲ \qquad (۲) \quad \Rightarrow (۱) \cap (۲) = \emptyset$$

۲۵) اگر مجموعه جواب نامعادله $ax - 4 < 0$ برابر $(-\infty\ ,\ a)$ باشد، جواب نامعادله $a^2x^2 + 2ax + 1 \leq 0$ کدام است؟

۱) R

۲) $R - \{-\frac{1}{2}\}$

۳) $\{-\frac{1}{2}\}$

۴) $(-\infty\ ,\ -\frac{1}{2}]$

پاسخ: گزینه ۳

$ax - 4 < 0 \xrightarrow{x=a\ \text{ریشه نامعادله است .}}$ ، $(-\infty, a)$

$$\xrightarrow{x=a} a^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow 2x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2 \ \text{ق ق} \\ a = -2 \Rightarrow -2x - 4 < 0 \Rightarrow x > -2 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=2} 4x^2 + 4x + 1 \leq 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$	
$4x^2+4x+1$	$+$	0	$+$

جواب : $\{-\frac{1}{2}\}$