نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون A۱ الگو و دنباله

مدت زمان آزمون: --

مرکز مشاوره تحصیلی راه روشن

۱ در یک دنباله خطی با جمله عمومی $t_n = kn^{۲} - ۳n^{۲} - (۲k+۱)n + ۱۸k$، چند جمله مثبت وجود دارد؟

۱) ۱۱
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۷

پاسخ: گزینه ۴

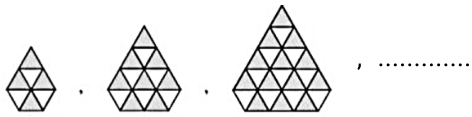
جمله عمومی دنباله خطی یک چندجمله‌ای درجه اول بر حسب n می‌باشد، یعنی ضریب جمله درجه دوم باید صفر باشد، پس داریم:

$$t_n = (k-۳)n^{۲} - (۲k+۱)n + ۱۸k \Rightarrow k-۳ = ۰ \Rightarrow k = ۳$$

$$\xrightarrow{t_n > ۰} t_n = -۷n + ۵۴ > ۰ \Rightarrow ۷n < ۵۴ \Rightarrow n < ۷/...$$

$\Rightarrow n \leq ۷ \Rightarrow$ ۷ جمله مثبت دارد.

۲) اگر در شکل مرحله n ام الگوی زیر ۶۶ مثلث سفید وجود داشته باشد، در شکل مرحله $۲n$ام چند مثلث سیاه وجود دارد؟



مرحله اول   مرحله دوم   مرحله سوم

۱) ۲۳۱
۲) ۲۵۱
۳) ۱۸۷
۴) ۱۷۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

شماره شکل	تعداد مثلث‌های سفید
۱	$۱+۲=\frac{۲\times۳}{۲}$
۲	$۱+۲+۳=\frac{۳\times۴}{۲}$
۳	$۱+۲+۳+۴=\frac{۴\times۵}{۲}$
n	$۱+۲+...+(n+۱)=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$

با توجه به فرض، تعداد مثلث‌های سفید مرحله nام ۶۶ است. داریم:

$$\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}=۶۶\Rightarrow(n+۱)(n+۲)=۱۳۲=۱۱\times۱۲$$

$$\Rightarrow n+۱=۱۱\Rightarrow n=۱۰$$

حال باید تعداد مثلث‌های سیاه در شکل $۲n$ ام یعنی۲۰ام را بیابیم:

شماره شکل	تعداد مثلث‌های مشکی
۱	$(۱+۲)+۱$
۲	$(۱+۲+۳)+۲$
۳	$(۱+۲+۳+۴)+۳$
n	$(۱+۲+...+(n+۱))+n=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}+n$

$$\Rightarrow a_n=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}+n\xrightarrow{n=۲۰}a_{۲۰}=\frac{۲۱\times\cancel{۲۲}^{۱۱}}{\cancel{۲}}+۲۰$$

$$=۲۳۱+۲۰=۲۵۱$$

③ در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $t_n = \frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$، مجموع پانزده جمله‌ی اول کدام است؟

۱) $\sqrt{۲} - ۱$
۲) ۱
۳) $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به قرار داشتن عبارت رادیکالی در مخرج دنباله‌ی داده شده، می‌توان فهمید که این عبارت دارای مخرج گنگ یا اصم است و برای آن‌که مخرج عبارت را گویا کنیم، باید در عبارتی ضرب و تقسیم کنیم و برای این‌کار از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲$$

$$\Rightarrow\ t_n = \frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{n+۱-n} = \sqrt{n+۱} - \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow\ t_۱ = \sqrt{۲} - ۱,\ t_۲ = \sqrt{۳} - \sqrt{۲},\ ...,\ t_{۱۵} = ۴ - \sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow\ t_۱ + t_۲ + \cdots + t_{۱۵} = (\sqrt{۲} - ۱) + (\sqrt{۳} - \sqrt{۲}) + \cdots + (۴ - \sqrt{۱۵})$$

$$= -۱ + ۴ = ۳$$

④ در دنباله‌ی $۱, ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ...$ جمله‌ی سی‌ام برابر چه عددی است؟

۱) ۱۳۳۵
۲) ۱۳۳۴
۳) ۱۳۳۶
۴) ۱۳۳۷

پاسخ: گزینه ۱

$$a_۱ = ۱ = ۱$$
$$a_۲ = ۲ + ۳ = ۵$$
$$a_۳ = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$
$$a_۴ = ۴ + ۵ + ۶ + ۷ = ۲۲$$
$$\vdots$$
$$a_{۳۰} = ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ... + ۵۹$$
$$= (۳۰ + ۵۹) + (۳۱ + ۵۸) + ... + (۴۴ + ۴۵)$$
$$= \overbrace{۸۹ + ۸۹ + ... + ۸۹}^{\text{تا ۱۵}} = ۸۹ \times ۱۵ = ۱۳۳۵$$

۵) در یک دنباله هندسی با جمله اول ۵، به همه جملات ۲ واحد اضافه می‌کنیم و دنباله جدید، دوباره دنباله‌ای هندسی می‌شود. مجموع صد جمله اول دنباله اولیه کدام است؟

۱) ۵۰۰
۲) $۵^{۱۰۰}$
۳) ۴۹۸۵
۴) ۵۰۰۰

پاسخ: گزینه ۱

دنباله اولیه به صورت $۵, ۵r, ۵r^{۲}, ...$ می‌باشد. اگر به همه جملات ۲ واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$۷, ۵r + ۲, ۵r^{۲} + ۲, ...$$

در دنباله جدید، رابطه واسطه هندسی برقرار است. بنابراین:

$$(۵r + ۲)^{۲} = ۷(۵r^{۲} + ۲) \Rightarrow ۲۵r^{۲} + ۲۰r + ۴ = ۳۵r^{۲} + ۱۴$$

$$\Rightarrow ۱۰r^{۲} - ۲۰r + ۱۰ = ۰ \Rightarrow (r - ۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow r = ۱$$

پس جملات دنباله اولیه، همگی با هم برابرند:

$$۵, ۵, ...$$

مجموع صد جمله اول $= ۵ \times ۱۰۰ = ۵۰۰$

۶) در یک دنباله حسابی، مقادیر مربوط به مجموع سه جمله اول، سه جمله چهارم و سه جمله هفتم، خود نیز (با همان‌ترتیب) تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. قدرنسبت دنباله جدید، چند برابر دنباله اولیه است؟

۱) ۳
۲) ۹
۳) ۲۷
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

مجموع سه جمله اول $a_{۱} + a_{۲} + a_{۳} = ۳a_{۲}$

مجموع سه جمله چهارم $a_{۱۰} + a_{۱۱} + a_{۱۲} = ۳a_{۱۱}$

مجموع سه جمله هفتم $a_{۱۹} + a_{۲۰} + a_{۲۱} = ۳a_{۲۰}$

قدرنسبت دنباله جدید، یعنی $۳a_{۲۰}$، $۳a_{۱۱}$ و $۳a_{۲}$ برابر اختلاف دو جمله متوالی است. قدرنسبت دنباله جدید را با d' و قدرنسبت دنباله اولیه را با d نمایش می‌دهیم:

$$d' = ۳a_{۱۱} - ۳a_{۲} = ۳(a_{۱۱} - a_{۲}) = ۳(۹d) = ۲۷d$$

پس داریم:

$$d' = ۲۷d \Rightarrow \frac{d'}{d} = ۲۷$$

۷) اگر جملات هشتم، دوم و اول از یک دنباله حسابی، به ترتیب جملات چهارم، دوم و اول از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه در این دنباله حسابی که جملات آن متمایز است، قدرنسبت چند برابر جمله اول است؟ (در دنباله حسابی، قدرنسبت برابر جمله اول نیست.)

۱) -۴
۲) ۴
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

جملات دنباله حسابی را به شکل a_n و جملات دنباله هندسی را به شکل t_n نشان می‌دهیم.

$$\left.\begin{aligned}\frac{t_۴}{t_۲}=\frac{a_۸}{a_۲}=q^۲\\ \frac{t_۲}{t_۱}=\frac{a_۲}{a_۱}=q\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{a_۸}{a_۲}=\frac{a_۲^۲}{a_۱^۲}\Rightarrow a_۱^۲a_۸=a_۲^۳$$

$$\xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d} a_۱^۲(a_۱+۷d)=(a_۱+d)^۳$$

$$\Rightarrow a_۱^۳+۷a_۱^۲d=a_۱^۳+۳a_۱^۲d+۳a_۱d^۲+d^۳$$

$$\xrightarrow{d\neq ۰} ۷a_۱^۲=۳a_۱^۲+۳a_۱d+d^۲\Rightarrow ۴a_۱^۲-۳a_۱d-d^۲=۰$$

$$\Rightarrow (۴a_۱+d)(a_۱-d)=۰\Rightarrow \begin{cases}a_۱=-\frac{۱}{۴}d\Rightarrow d=-۴a_۱\\ a_۱=d \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۸) اگر جملات سوم، چهارم و ششم یک دنباله هندسی غیرثابت به‌ترتیب با جملات اول، دوم و هشتم یک دنباله حسابی برابر باشند، مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱) ۳
۲) -۱
۳) -۲
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

جملات دنباله هندسی را با t_n و دنباله حسابی را با a_n نمایش می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases}t_۳=a_۱\\ t_۴=a_۲\\ t_۶=a_۸\end{cases}\Rightarrow \frac{a_۸-a_۲}{a_۲-a_۱}=\frac{t_۶-t_۴}{t_۴-t_۳}\Rightarrow \frac{۶d}{d}=\frac{t_۱r^۵-t_۱r^۳}{t_۱r^۳-t_۱r^۲}$$

$$\Rightarrow ۶=r(r+۱)\Rightarrow r=۲ \text{ یا } -۳\Rightarrow r_۱+r_۲=-۱$$

۹) بین دو عدد ۴۸ و ۱۵۳۶ چند واسطه هندسی درج کنیم تا بزرگ‌ترین واسطه ۱۶ برابر کوچک‌ترین واسطه باشد؟(۴۸: جمله اول)

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

اگر n واسطه هندسی بین دو عدد ۴۸ و ۱۵۳۶ درج کنیم، یک دنباله با جمله اول $a_1 = ۴۸$ و جمله آخر $a_{n+2} = ۱۵۳۶$ به دست می‌آید. داریم:

$$\frac{a_{n+2}}{a_1} = \frac{۱۵۳۶}{۴۸} \Rightarrow \frac{a_1 q^{n+1}}{a_1} = q^{n+1} = ۳۲ \qquad (۱)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_2} = ۱۶ \Rightarrow \frac{a_1 q^{n}}{a_1 q} = q^{n-1} = ۱۶ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\,،\,(۱)} \frac{q^{n+1}}{q^{n-1}} = ۲ \Rightarrow q = \pm\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{(۱)} (\pm\sqrt{۲})^{n+1} = ۳۲ = (\pm\sqrt{۲})^{۱۰} \Rightarrow n+۱ = ۱۰ \Rightarrow n = ۹$$

۱۰) اگر جمله چهارم یک دنباله هندسی با قدر نسبت مثبت، $\frac{۹}{۴}$ جمله دوم آن باشد و مجموع چهار جمله اول آن نیز ۱۳۰ باشد، آن‌گاه جمله ششم این دنباله کدام است؟

۱) ۸۱
۲) ۲۴۳
۳) ۱۲۱/۵
۴) ۱۶۲

پاسخ: گزینه ۳

از آن‌جایی که جمله چهارم $\frac{۹}{۴}$ جمله دوم می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 \times q^3}{a_1 \times q} = q^2 = \frac{۹}{۴} \Rightarrow q = \pm\frac{۳}{۲} \xrightarrow[\text{}]{\text{قدر نسبت} > ۰} q = \frac{۳}{۲}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = ۱۳۰$$

$$\Rightarrow a_1 + \frac{۳}{۲}a_1 + \frac{۹}{۴}a_1 + \frac{۲۷}{۸}a_1 = ۱۳۰$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۸+۱۲+۱۸+۲۷}{۸}\right)a_1 = ۱۳۰ \Rightarrow \frac{۶۵}{۸}a_1 = ۱۳۰ \Rightarrow a_1 = ۱۶$$

$$a_6 = a_1 \times q^5 = ۱۶ \times \left(\frac{۳}{۲}\right)^5 = \frac{۲۴۳}{۲} = ۱۲۱/۵$$

۱۱) در یک دنباله هندسی مجموع جملات چهارم و ششم برابر ۱۸ و مجموع جملات دهم و دوازدهم برابر ۹۰ است. مجموع جملات شانزدهم و هجدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۸۰
۲) ۲۷۰
۳) ۳۶۰
۴) ۴۵۰

پاسخ: گزینه ۴

جمله عمومی دنباله هندسی را به‌صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} t_4 + t_6 = t_1 r^3 + t_1 r^5 \\ t_{10} + t_{12} = t_1 r^9 + t_1 r^{11} = r^6(t_1 r^3 + t_1 r^5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^6 = \frac{t_{10}+t_{12}}{t_4+t_6} = \frac{90}{18} = 5$$

$$t_{16} + t_{18} = t_1 r^{15} + t_1 r^{17} = r^6(t_1 r^9 + t_1 r^{11}) = 5 \times 90 = 450$$

۱۲) در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۳۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰۰۰ است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۲۹
۲) ۲۱
۳) ۳۰
۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر a، b و c سه‌جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آن‌گاه:

$$a, b, c \Rightarrow b^2 = ac$$

$$abc = 1000, b^2 = ac \xrightarrow{\times b} b^3 = abc = 1000 \Rightarrow b = 10$$

$$a + b + c = 39 \Rightarrow a + 10 + c = 39 \Rightarrow a + c = 29 \quad (1)$$

$$b^2 = ac \Rightarrow (10)^2 = ac \Rightarrow ac = 100 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که یکی از اعداد ۲۵ و دیگری ۴ است. پس بزرگ‌ترین این اعداد، ۲۵ است.

۱۳) مجموع ۵ عدد که تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند برابر ۱۰۰ می‌باشد. اگر حاصل‌ضرب جملات دوم و چهارم برابر ۳۸۴ باشد، بزرگ‌ترین جمله دنباله کدام است؟

۱) ۲۲
۲) ۲۴
۳) ۲۶
۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

اگر قدر نسبت دنباله را d در نظر بگیریم و جمله میانی را x، در این صورت جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$x-۲d,\ x-d,\ x,\ x+d,\ x+۲d$$

$$\text{مجموع جملات} = x-۲d+x-d+x+x+d+x+۲d=۵x=۱۰۰$$

$$\Rightarrow x=۲۰$$

حاصل ضرب جملات دوم و چهارم برابر است با:

$$(x-d)(x+d)=x^۲-d^۲ \xrightarrow{x=۲۰} (۲۰)^۲-d^۲=۳۸۴$$

$$\Rightarrow d^۲=۴۰۰-۳۸۴=۱۶ \Rightarrow d=\pm۴$$

پس جملات دنباله به صورت زیر می‌باشند که بزرگ‌ترین جمله آن ۲۸ می‌باشد.

$$۱۲,\ ۱۶,\ ۲۰,\ ۲۴,\ ۲۸$$

۱۴) جمله اول و هفتم یک دنباله حسابی ۱۱ و ۳۵ است. در دنباله حسابی دیگری بین اعداد ۳۸ و ۱۳ چند واسطه حسابی می‌توان قرار داد تا جمله چهارم دو دنباله، برابر شوند؟ (جمله اول دنباله دوم ۳۸ است.)

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

در دنباله اول خواهیم داشت:

$$t_۷-t_۱=۶d \Rightarrow ۳۵-۱۱=۶d \Rightarrow d=۴$$

طبق فرض داریم:

$$t_۴=t'_۴ \Rightarrow ۱۱+۳\times۴=t'_۱+۳d'$$

$$\Rightarrow ۲۳=۳۸+۳d' \Rightarrow d'=-۵$$

اگر n واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b قرار دهیم، قدر نسبت این دنباله برابر با $d=\frac{b-a}{n+۱}$ خواهد بود، پس:

$$\Rightarrow d'=\frac{b-a}{n+۱} \Rightarrow -۵=\frac{۱۳-۳۸}{n+۱} \Rightarrow n=۴$$

۱۵) یک دنباله هندسی دارای یازده جمله است و جملات آن روند کاهشی دارند. اگر مجموع دو جمله اول ۸ برابر مجموع دو جمله آخر باشد، جمله چهارم چند برابر جمله اول است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

جمله عمومی دنباله را t_n فرض می‌کنیم. مجموع دو جمله اول ۸ برابر مجموع دو جمله آخر است، یعنی:

$$t_۱ + t_۲ = ۸(t_{۱۰} + t_{۱۱}) \Rightarrow t_۱ + t_۱ r = ۸(t_۱ r^۹ + t_۱ r^{۱۰})$$

$$\Rightarrow t_۱(۱+r) = ۸ t_۱ r^۹(۱+r) \Rightarrow ۱ = ۸r^۹ \Rightarrow r^۹ = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow (r^۳)^۳ = (\frac{۱}{۲})^۳ \Rightarrow r^۳ = \frac{۱}{۲}$$

خواسته سوال: $\frac{t_۴}{t_۱} = \frac{t_۱ r^۳}{t_۱} = r^۳ = \frac{۱}{۲}$

۱۶) یک دنباله هندسی دارای ده جمله است که حاصل‌ضرب پنج جمله اول آن برابر با $\frac{۱}{۳۲}$ و حاصل‌ضرب جملات ردیف زوج (تا آخر ده جمله) برابر ۱۰۲۴ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۶۴}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

$$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ = \frac{۱}{۳۲} \Rightarrow a_۱^۵ \times q^{۱۰} = ۲^{-۵} \quad (۱)$$

حاصل‌ضرب جملات ردیف زوج: $a_۲ \times a_۴ \times a_۶ \times a_۸ \times a_{۱۰}$

$$= a_۱ q \times a_۱ q^۳ \times a_۱ q^۵ \times a_۱ q^۷ \times a_۱ q^۹$$

$$= a_۱^۵ q^{۲۵} = ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\frac{(۲)}{(۱)}} \frac{a_۱^۵ q^{۲۵}}{a_۱^۵ q^{۱۰}} = \frac{۲^{۱۰}}{۲^{-۵}} \Rightarrow q^{۱۵} = ۲^{۱۵} \Rightarrow q = ۲$$

$$a_۱^۵ \times q^{۱۰} = ۲^{-۵} \xrightarrow{q=۲} a_۱^۵ \times ۲^{۱۰} = ۲^{-۵} \Rightarrow a_۱^۵ = ۲^{-۱۵} = (۲^{-۳})^۵$$

$$\Rightarrow a_۱ = ۲^{-۳} \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۸}$$

۱۷) در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول ، $\frac{۱}{۳}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دهم چند برابر جمله ششم است؟

۱) $\frac{۱۸}{۱۱}$
۲) $\frac{۱۹}{۱۱}$
۳) $\frac{۱۷}{۹}$
۴) $\frac{۱۸}{۷}$

پاسخ: گزینه ۲

$$t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ = \frac{۱}{۳}(t_۶ + t_۷ + t_۸ + t_۹ + t_{۱۰})$$

$$\xrightarrow{\text{جمله عمومی دنباله حسابی است } t_n} \begin{matrix} t_۶ + t_{۱۰} = ۲t_۸ & t_۷ + t_۹ = ۲t_۸ \\ t_۱ + t_۵ = ۲t_۳ & t_۲ + t_۴ = ۲t_۳ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow ۲t_۳ + ۲t_۳ + t_۳ = \frac{۱}{۳}(۲t_۸ + ۲t_۸ + t_۸)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}(۵t_۸) = ۵t_۳$$

$$\Rightarrow t_۸ = ۳t_۳$$

$$\Rightarrow t_۱ + ۷d = ۳(t_۱ + ۲d)$$

$$\Rightarrow ۳t_۱ - t_۱ = ۷d - ۶d \Rightarrow ۲t_۱ = d$$

$$\frac{t_{۱۰}}{t_۶} = \frac{t_۱ + ۹d}{t_۱ + ۵d} = \frac{t_۱ + ۹(۲t_۱)}{t_۱ + ۵(۲t_۱)} = \frac{۱۹t_۱}{۱۱t_۱} = \frac{۱۹}{۱۱}$$

۱۸) جمله اول، سه برابر جمله سوم و ده برابر جمله پنجم یک دنباله حسابی، به‌ترتیب جملات اول، دوم و سوم یک دنباله هندسی هستند. اگر جمله اول دنباله حسابی برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت آن کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۲}{۹}$
۳) $\frac{۷}{۹}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

پاسخ: گزینه ۲

دنباله a_n را حسابی و دنباله b_n را هندسی در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه d قدرنسبت دنباله حسابی باشد، داریم: $b_۱ = a_۱ = ۲$

$$b_۲ = ۳a_۳ = ۳(a_۱ + ۲d) = ۶ + ۶d$$

$$b_۳ = ۱۰a_۵ = ۱۰(a_۱ + ۴d) = ۲۰ + ۴۰d$$

باید رابطه $b_۲^۲ = b_۱ b_۳$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow ۲(۲۰ + ۴۰d) = (۶ + ۶d)^۲$$

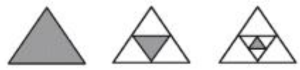
$$\Rightarrow ۴۰ + ۸۰d = ۳۶ + ۷۲d + ۳۶d^۲$$

$$\Rightarrow ۳۶d^۲ - ۸d - ۴ = ۰$$

معادله فوق دارای دو جواب خواهد بود که مجموع آن برابر است با:

$$-(-\frac{۸}{۳۶}) = \frac{۲}{۹}$$

۱۹) مطابق شکل، مثلثی متساوی‌الاضلاع داریم که در هر مرحله، اوساط اضلاع آن را به هم متصل می‌کنیم تا مثلثی جدید تشکیل شود. در مرحله nام اختلاف محیط مثلث رنگی ایجاد شده با عددی که محیط‌های مثلث‌های رنگی به آن نزدیک می‌شوند، کم‌تر از $\frac{۱}{۱۵۰}$ می‌شود، حداقل مقدار n کدام است؟ (طول ضلع مثلث مرحله اول را واحد درنظر بگیرید.)



مرحله سوم　　مرحله دوم　　مرحله اول

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

در هر مرحله مثلث اصلی به ۴ مثلث همنهشت تقسیم می‌شود که هر کدام با مثلث اولیه متشابه هستند، بنابراین مساحت مثلث $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود در نتیجه: $k^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = \frac{۱}{۲}$

بنابراین طول ضلع مثلث در هر مرحله $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود:

مرحله	۱	۲	۳	....	n
طول ضلع	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	....	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$
محیط	۳	$۳\left(\frac{۱}{۲}\right)$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)$	....	$۳\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$

با توجه به جدول متوجه می‌شویم که جملات در حال نزدیک شدن به صفر هستند، بنابراین حد جملات صفر است:

$$\left|۳\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} - ۰\right| < \frac{۱}{۱۵۰}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} < \frac{۱}{۴۵۰} \Rightarrow ۲^{n-۱} > ۴۵۰$$

$$\Rightarrow ۲^n > ۹۰۰ \xrightarrow{n\text{عدد طبیعی}} n \geq ۱۰$$

۲۰) در یک دنباله‌ی خطی با جمله‌ی عمومی a_n، $\frac{۱}{۳}a_۲ = \frac{۱}{۲}a_۳$ و جمله‌ی پنجم، دو واحد بیش‌تر از قرینه‌ی نصف جمله‌ی اول است. جمله‌ی یازدهم کدام است؟

۱) ۶-
۲) ۴-
۳) ۴
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی خطی به‌صورت $a_n = an + b$ است. در نتیجه طبق صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} ۳a_۳ = ۲a_۲ \Rightarrow ۳(۳a+b) = ۲(۲a+b) \\ a_۵ = -\frac{۱}{۲}a_۱ + ۲ \Rightarrow ۵a+b = -\frac{۱}{۲}(a+b) + ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵a+b = ۰ \\ ۱۱a + ۳b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = -n + ۵ \Rightarrow a_{۱۱} = -۶$$

۲۱) اگر a_n جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲ باشد، در این‌صورت k در رابطه‌ی $a_{۳۶}^{۲} - a_{۱۰}^{۲} = ka_{۲۳}$ کدام است؟

۱) ۴۶
۲) ۱۰۴
۳) ۹۲
۴) ۶۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی«۲»

$d = ۲$

$a_{۲۳} = a_۱ + ۲۲d = a_۱ + ۴۴$

$a_{۳۶} = a_۱ + ۳۵d = a_۱ + ۷۰$

$a_{۳۶}^{۲} - a_{۱۰}^{۲} = (a_۱ + ۷۰)^{۲} - (a_۱ + ۱۸)^{۲}$ $a_{۱۰} = a_۱ + ۹d = a_۱ + ۱۸$

$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a_۱ + ۷۰ + a_۱ + ۱۸) \times (a_۱ + ۷۰ - a_۱ - ۱۸)$

$= (۲a_۱ + ۸۸)(۵۲) = ۲ \times ۵۲ \times (a_۱ + ۴۴)$

$= ۱۰۴(a_۱ + ۴۴) = ۱۰۴a_{۲۳} \Rightarrow k = ۱۰۴$

۲۲) بین دو عدد $-\sqrt{۳} + ۲k$ و $۷\sqrt{۳} + k$ ، سه واسطه حسابی درج می‌کنیم. مقدار k چقدر باشد تا واسطه سوم، عدد $-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ باشد؟ ($۷\sqrt{۳} + k$ جمله اول است.)

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ‎-۱
۳) $-\sqrt{۳}$
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

$t_۱ = ۷\sqrt{۳} + k$

$t_۵ = -\sqrt{۳} + ۲k = t_۱ + ۴d$

$\Rightarrow d = \frac{-\sqrt{۳} + ۲k - ۷\sqrt{۳} - k}{۴} = \frac{-۸\sqrt{۳} + k}{۴}$

واسطه سوم = جمله چهارم $\Rightarrow t_۴ = t_۱ + ۳d$

$= ۷\sqrt{۳} + k + \frac{-۲۴\sqrt{۳} + ۳k}{۴} = \frac{-۳\sqrt{۳}}{۴}$

$\Rightarrow \frac{۲۸\sqrt{۳} + ۴k - ۲۴\sqrt{۳} + ۳k}{۴} = -\frac{۳\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow ۴\sqrt{۳} + ۷k = -۳\sqrt{۳}$

$\Rightarrow ۷k = -۷\sqrt{۳} \Rightarrow k = -\sqrt{۳}$

۲۳) در دنباله حسابی a_n، اگر $a_{t+8} = 0$ و $a_t = -16$ باشد، مقدار $a_7 + a_{13}$ برحسب t کدام است؟

۱) $4t+8$
۲) $-2t+4$
۳) $-4t+8$
۴) $2t+4$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه«۳»

اگر جمله اول دنباله حسابی a_1 و قدر نسبت آن d باشد، داریم:

$$\begin{cases} a_{t+8} = 0 \\ a_t = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (t+7)d = 0 \\ a_1 + (t-1)d = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + td + 7d = 0 \\ a_1 + td - d = -16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8d = 16 \Rightarrow d = 2$$

$$\xrightarrow[\text{را به دست می آوریم } a_1]{\text{با جایگذاری } d} a_1 + (t-1)2 = -16 \Rightarrow a_1 = -2t - 14$$

$$a_7 + a_{13} = a_1 + 6d + a_1 + 12d$$

$$2(a_1 + 9d) = 2(-2t - 14 + 18) = -4t + 8$$

۲۴) اگر در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n، $a_2 = 27$ و $a_5 = 1$، جملات ردیف فرد را حذف کنیم، قدرنسبت دنباله باقی‌مانده کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) ۹
۳) ۳
۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

در دنباله هندسی a_n داریم:

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q} = q^3$$

$$\xrightarrow[a_2=27]{a_5=1} q^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

در دنباله هندسی $a_1 \,,\; a_1 q \,,\; a_1 q^2 \,,\; a_1 q^3 \,,\; \dots$، اگر جملات ردیف فرد را حذف کنیم، داریم:

$$a_1 q \,,\; a_1 q^3 \;\; \dots\dots$$

آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی باقیمانده برابر است با:

$$q' = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} = q^2 \xrightarrow{q=\frac{1}{3}} q' = \frac{1}{9}$$

۲۵ جملات دنباله هندسی a, b, c, d, e مثبت هستند. اگر واسطه حسابی و هندسی b و d به‌ترتیب ۴۹ و ۴۲ باشد، واسطه حسابی a و e کدام است؟

۱) $\frac{217}{3}$
۲) $\frac{434}{3}$
۳) $\frac{217}{9}$
۴) $\frac{434}{9}$

پاسخ: گزینه ۱

واسطه هندسی b و d همان c می‌باشد پس $c = 42$، فرض کنیم قدرنسبت دنباله هندسی r باشد:

$$\frac{b+d}{2} = 49 \Rightarrow \frac{\frac{42}{r}+42r}{2} = 49 \Rightarrow 21\left(r+\frac{1}{r}\right) = 49$$

$$\Rightarrow r+\frac{1}{r} = \frac{7}{3}$$

$$\text{واسطه حسابی } a \text{ و } e = \frac{a+e}{2} = \frac{\frac{c}{r^2}+cr^2}{2} = 21\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= 21\left(\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-2\right) = 21\left(\frac{49}{9}-2\right) = \frac{217}{3}$$