

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون B1 توان های گویا و عبارت های جبری

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۰/۱۲/۲۱

مدت زمان آزمون: --



نام برگزار مرکز مشاوره تحصیلی راه روشنکننده

۱) اگر ریشه سوم عدد $(\frac{1}{8})^{x+y}$ با ریشه چهارم مثبت عدد 2^{2x-1} برابر باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $-\frac{4}{3}$
- (۴) $-\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ی «۴»

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^{x+y}} &= \sqrt[3]{2^{2x-1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+y}{3}} = (2)^{\frac{2x-1}{3}} \\ \Rightarrow (2^{-3})^{\frac{x+y}{3}} &= (2^2)^{\frac{2x-1}{3}} \Rightarrow 2^{(-3)\left(\frac{x+y}{3}\right)} = 2^2\left(\frac{2x-1}{3}\right) \\ \Rightarrow 2^{-x-y} &= 2^{\frac{2x-1}{3}} \Rightarrow -x-y = \frac{2x-1}{3} \\ \Rightarrow -2x-4 &= 2x-1 \Rightarrow -4x = 4-1 \Rightarrow -4x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

۲) اگر $\sqrt[3]{x} < x$ و همچنین $x^F > x^Y$ باشد، آنگاه کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) $x+1 < 0$
 (۲) $x^2 + x > 0$
 (۳) $x^9 > x^5$
 (۴) $\frac{x}{x+1} > 0$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به $\sqrt[3]{x} < x$ ، درمی یابیم $x > 0$ یا $-1 < x < 0$ می باشد. از طرفی چون $x^F > x^Y$ است، پس مقادیر x باید به صورت $-1 < x < 0$ باشد. حال باید گزینه ای را انتخاب کنیم که به ازای $-1 < x < 0$ برقرار باشد.

بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»: $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

گزینه «۲»: $x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0$

$\Rightarrow x > 0$ یا $x < -1$

گزینه «۳»: $x^9 > x^5$ ✓

گزینه «۴»: $\frac{x}{x+1} > 0$

$\Rightarrow x > 0$ یا $x < -1$

۳) اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = |a - \sqrt[3]{a}| + |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{a}$
 (۲) $\sqrt{a} - a$
 (۳) $a - \sqrt{a}$
 (۴) $2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$

پاسخ: گزینه ۴

چون a عددی بین صفر و یک است، پس:

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$$

پس:

$$\begin{cases} a - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |a - \sqrt[3]{a}| = -(a - \sqrt[3]{a}) \\ \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}| = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$A = -a + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} = 2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$$

۴) بین دو عدد $\sqrt[4]{19}$ و $\sqrt[3]{-25}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

- ۷ (۱)
- ۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$2^4 < 19 < 3^4 \Rightarrow \sqrt[4]{2^4} < \sqrt[4]{19} < \sqrt[4]{3^4} \Rightarrow 2 < \sqrt[4]{19} < 3 \Rightarrow \sqrt[4]{19} < 3 \quad (1)$$

$$-3^3 < -25 < -2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{-3^3} < \sqrt[3]{-25} < \sqrt[3]{-2^3}$$

$$\Rightarrow -3 < \sqrt[3]{-25} < -2 \Rightarrow \sqrt[3]{-25} > -3 \quad (2)$$

(۱) . (۲) $\rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow$ عدد صحیح ۵

۵) اگر $0 < a < 1$ ، مجموعه $(-a, a^2) \cap (-a^2, a)$ کدام است؟

- (۱) $(-a, a)$
- (۲) $(-a^2, a)$
- (۳) $(-a, a^2)$
- (۴) $(-a^2, a^2)$

پاسخ: گزینه ۴

اگر $0 < a < 1$ ، آن گاه $a^2 < a$ و $-a < -a^2$ است. بنابراین با توجه به شکل زیر، داریم:

$$(-a, a^2) \cap (-a^2, a) = (-a^2, a^2)$$



۶) اگر $\alpha = \sqrt[4]{4\pi - 10}$ و $\beta = \sqrt{5 - \pi}$ باشد، حاصل $(\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta)$ کدام است؟

- ۱۰ (۱)
- ۱۵ (۲)
- ۲۰ (۳)
- ۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

داریم:

$$(\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta)$$

$$= (\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - 4(\alpha^2\beta^2) = \alpha^4 + 4\beta^4 + 4(\alpha^2\beta^2) - 4(\alpha^2\beta^2)$$

$$= \alpha^4 + 4\beta^4 = 4\pi - 10 + 4(5 - \pi) = 10$$

۷) اگر عدد A ریشه هفتم $-8\sqrt[3]{32}$ و عدد B ریشه سوم $(\frac{1}{2})^{-2}$ باشد، حاصل $(-A \times B)^{-\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲) تعریف نشده

۰/۵ (۳)

۰/۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا پایه‌های دو عدد A و B را یکسان می‌کنیم:

$$A = \sqrt[7]{-8\sqrt[3]{32}} = -\sqrt[7]{2^3 \times 2^{\frac{5}{3}}} = -\sqrt[7]{2^{\frac{14}{3}}} = -2^{\frac{2}{3}}$$

$$B = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{(2^{-1})^{-2}} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow (-A \times B)^{-\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0/25$$

۸) اگر $A = \sqrt[5]{256} \times \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} \times \sqrt[4]{16}$ مقدار $\sqrt[3]{128}$ بر حسب A کدام است؟

-A (۱)

$\frac{1}{A}$ (۲)

\sqrt{A} (۳)

A (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt[5]{256} = \sqrt[5]{2^8} = 2$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{-1}{2}\right)^5} = \frac{-1}{2}$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\Rightarrow A = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times 2 = -2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{128} = -A$$

۹) اگر $a > 0$ و $b < 0$ و n عددی طبیعی باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

$$(۱) \sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \quad (\text{به ازای } n \text{ فرد})$$

$$(۲) \sqrt[n]{b^a} \times \sqrt[n]{a^b} = ab$$

$$(۳) \sqrt[n]{\frac{-a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(۴) \sqrt[n]{b^n} = b$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۱»: اگر $a = 10$ و $b = -2$ و $n = 3$ باشد.

$$\sqrt[3]{10-2} \neq \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{-2}$$

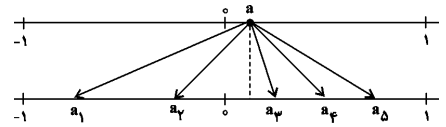
گزینه «۲»: اگر n زوج باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{b^a} \times \sqrt[n]{a^b} = |b|^a \times a^b$$

گزینه «۳»: عبارت‌های $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{-a}$ به ازای n های زوج تعریف نشده‌اند.

گزینه «۴»: از آنجا که b^a همواره مثبت است پس این تساوی درست است.

۱۰) در شکل زیر، نقطه a در محور بالا به ریشه‌های دوم، سوم و چهارم خود در محور پایین وصل شده است. کدام نقطه (نقاط) ریشه چهارم a می‌باشد؟



(۱) فقط a_5

(۲) فقط a_3

(۳) a_5 و a_1

(۴) a_3 و a_2

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که $\sqrt[n]{a} = y$ یا شرط $1 < a < \infty$ ، به ازای افزایش n ، افزایش می‌یابد. در نتیجه:

a_5 ← ریشه چهارم (+)

a_1 ← ریشه چهارم (-)

۱۱) حاصل عبارت $\sqrt{\frac{1}{4+\sqrt{13}}} + \sqrt{\frac{1}{4-\sqrt{13}}}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{3}+1$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\sqrt{\frac{1}{4+\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{1}{4+2\sqrt{\frac{13}{4}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{13}+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}+1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4-\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{1}{4-2\sqrt{\frac{13}{4}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{13}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}-1}$$

پس عبارت مورد نظر سوال، برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{13}+1} + \frac{1}{\sqrt{13}-1} = \frac{(\sqrt{13}-1)+(\sqrt{13}+1)}{(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)} = \frac{2\sqrt{13}}{13-1} = \sqrt{13}$$

۱۲) در تجزیه عبارت $y^4 - 3y^2 + 1$ کدام عبارت موجود است؟

(۱) $y^2 - y - 1$

(۲) $y^2 - 2y - 1$

(۳) $y^2 + y + 1$

(۴) $y^2 + 2y + 1$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} y^4 - 3y^2 + 1 &= y^4 - 2y^2 + 1 - y^2 = (y^2 - 1)^2 - y^2 \\ &= (y^2 - 1 - y)(y^2 - 1 + y) \end{aligned}$$

۱۳) اگر $x = 1 + \sqrt[3]{3}$ ، آنگاه حاصل $\left(\frac{x^3-4}{x}\right)^3$ کدام است؟

۲۷ (۱)

۹ (۲)

۸۱ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$x = 1 + \sqrt[3]{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{3} \xrightarrow{\text{۳. HkUkM}} (x-1)^3 = (\sqrt[3]{3})^3$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3 \Rightarrow x^3 - 4 = 3x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3-4}{x}\right)^3 = \left(\frac{3x^2-3x}{x}\right)^3 = \left(\frac{3x(x-1)}{x}\right)^3 = (3(x-1))^3$$

$$= 27(x-1)^3 = 27 \times (\sqrt[3]{3})^3 = 27 \times 3 = 81$$

۱۴) حاصل عبارت $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times (\sqrt{7}+\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ کدام است؟

$\sqrt{7}-\sqrt{6}$ (۱)

۳ (۲)

۱ (۳)

$\sqrt{6}-\sqrt{7}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای گویا کردن یکی از توان‌ها باید صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب کرد:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{7}-\sqrt{6})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times (\sqrt{7}+\sqrt{6})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= [(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})]^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (7-6)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= 1^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$$

۱۵) اگر $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ باشد، حاصل $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) +۱
- (۲) -۴
- (۳) +۳
- (۴) -۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با استفاده از اتحاد کمکی $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad (*)$$

حال به کمک اتحاد $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ مقدار $x - \frac{1}{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4x \times \frac{1}{x} \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}} 5 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 1$$

$$(۱) \text{ حالت } x - \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{(*)} \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 4$$

$$(۲) \text{ حالت } : x - \frac{1}{x} = -1 \xrightarrow{(*)} \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = -4$$

۱۶) اگر $x + y = 6$ و $xy = 4$ ، حاصل عبارت $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{50}$
- (۲) $\sqrt{40}$
- (۳) $\sqrt{45}$
- (۴) $\sqrt{35}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = A \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2 y + y^2 x + 2xy\sqrt{xy} = A^2$$

$$\Rightarrow xy(x + y + 2\sqrt{xy}) = A^2$$

$$\Rightarrow 4(6 + 4) = A^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{40} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{40}$$

۱۷) عدد $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ را با کدام عدد زیر جمع کنیم تا یک عدد گویا حاصل شود؟

- ۱) $\sqrt{7}$
- ۲) $\sqrt{2}$
- ۳) $\sqrt{3}$
- ۴) $\sqrt{48}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\begin{aligned}\sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{3+4-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(2)(\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

با توجه به گزینه‌ها با $\sqrt{3}$ باید جمع شود.

۱۸) اگر $A = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \times \sqrt[6]{2}$ و $B = \sqrt[5]{\sqrt{243}} \times \sqrt[6]{3}$ باشد، حاصل $A^{-\frac{1}{5}} \times B^3$ کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) $1/5$
- ۳) ۲
- ۴) $2/5$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم که $3^2 = 2^5$ و $3^3 = 2^{45}$ ، پس:

$$A = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[5]{\sqrt{(2^5)}} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{11}{30}}$$

$$B = \sqrt[5]{\sqrt{243}} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[5]{\sqrt{(3^5)}} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{11}{30}}$$

$$A^{-\frac{1}{5}} \times B^3 = (2^{\frac{11}{30}})^{-\frac{1}{5}} \times (3^{\frac{11}{30}})^3 = 2^{-1} \times 3^{\frac{11}{10}} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۹) در تساوی $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{ax+b}{x^2-1}$ حاصل ab کدام است؟

۱ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2-1} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} + \frac{1}{x^2-1} \\ &= \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2(x+1)+1}{x^2-1} = \frac{2x+3}{x^2-1} \\ \Rightarrow \frac{2x+3}{x^2-1} &= \frac{ax+b}{x^2-1} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow ab=6 \end{aligned}$$

۲۰) حاصل عبارت $2\sqrt{\delta-2} \times (\delta + 2\sqrt{1\delta})^{\frac{\sqrt{\delta+2}}{2}} \times (\sqrt{\delta} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{\delta-2}}}$ کدام است؟

۱ (۱)

$2\sqrt{\delta}$ (۲)

$4\sqrt{\delta}$ (۳)

۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$(\delta + 2\sqrt{1\delta})^{\frac{\sqrt{\delta+2}}{2}} = (\delta + 2\sqrt{1\delta} + 3)^{\frac{\sqrt{\delta+2}}{2}}$$

$$= ((\sqrt{\delta} + \sqrt{3})^2)^{\frac{\sqrt{\delta+2}}{2}} = (\sqrt{\delta} + \sqrt{3})^{\sqrt{\delta+2}}$$

$$\text{از طرفی: } \frac{1}{\sqrt{\delta-2}} \times \frac{\sqrt{\delta+2}}{\sqrt{\delta+2}} = \frac{\sqrt{\delta+2}}{\delta-4} = \sqrt{\delta} + 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\sqrt{\delta-2} \times (\sqrt{\delta} + \sqrt{3})^{\sqrt{\delta+2}} \times (\sqrt{\delta} - \sqrt{3})^{\sqrt{\delta+2}} &= 2\sqrt{\delta-2} \times 2\sqrt{\delta+2} \\ &= 4\sqrt{\delta} = 4\sqrt{\delta} \end{aligned}$$

۲۱) حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$. $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ ، کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$
- ۲) ۲
- ۳) $1 + \sqrt{3}$
- ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

راه حل اول: عبارت $X = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\begin{aligned} X^2 &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 (\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^2 \\ &= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}) \sqrt[3]{4} \\ \rightarrow X^2 &= (4 + 2\sqrt{4-3}) \times 2 = 12 \rightarrow X = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times 2} \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \sqrt[3]{2^3} \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ را در عبارت پراکنز ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \\ &= \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1 = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

۲۲) حاصل عبارت $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ به ازای $x = \sqrt{2} - 1$ کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{2} - 1$
- ۲) $3\sqrt{2}$
- ۳) ۴
- ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x + 1 \\ &= (x+1)^3 + x+1 \xrightarrow{x=\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}-1+1)^3 + \sqrt{2}-1+1 \\ &= (\sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

۲۳) اگر $A = \sqrt[5]{7+4\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{5}} \times \sqrt[5]{5\sqrt{5}}$ باشد، مقدار A چند برابر $\sqrt[5]{20}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$A = \left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right) (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{5\sqrt{5}}\right) = \left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right) \sqrt[5]{2-\sqrt{3}} \left(\sqrt[5]{5\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right) \sqrt[5]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} \times \sqrt{5} = \sqrt[5]{49-48} \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt[5]{20}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[5]{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

۲۴) اگر $(\sqrt[5]{5})^{\frac{F}{5}} = 25^{-2x+1}$ باشد، حاصل $(\frac{1}{F})^{\frac{1}{5}} \times (8)^{-x}$ کدام است؟

- (۱) $2^{\frac{1}{35}}$
- (۲) $2^{\frac{2}{5}}$
- (۳) $2^{\frac{1}{30}}$
- (۴) $2^{\frac{6}{5}}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$(\sqrt[5]{5})^{\frac{F}{5}} = 25^{-2x+1} \Rightarrow (\sqrt[5]{5})^{\frac{F}{5}} = (5^2)^{-2x+1}$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{F}{5} \times \frac{1}{5}} = 5^{-4x+2} \Rightarrow \frac{F}{25} = -4x+2$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{25-F}{25} \Rightarrow x = \frac{F-25}{50}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{F}\right)^{\frac{1}{5}} \times 8^{-x} = 2^{\frac{F}{50}} \times 2^{-3x} = 2^{\frac{F}{50}} \times 2^{-\frac{3(F-25)}{50}} = 2^{\frac{F-3F+75}{50}} = 2^{\frac{75-2F}{50}}$$

۲۵) حاصل عبارت تعریف شده $\left(1 - \frac{2}{x^2+x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) - \frac{2}{x^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x^2}$

(۲) ۱

(۳) $1 + \frac{1}{x^2}$

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(1 - \frac{2}{x^2+x^2}\right)}_{\text{مخرج مشترک}} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)}_{\text{مخرج مشترک}} - \frac{2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2+x^2-2}{x^2+x^2}\right) \left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right) - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2(x^2+1)} \times \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^2+2-2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{aligned}$$