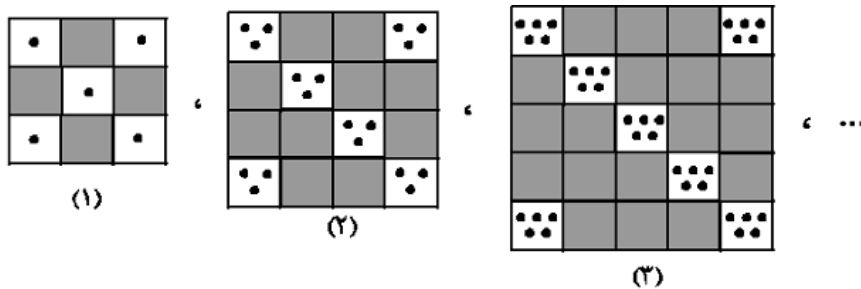




۱) با توجه به الگوی زیر، در مرحله چهاردهم مجموع تعداد نقطه‌ها در خانه‌های سفید، چند تا از تعداد خانه‌های تیره بیشتر است؟



(۱) ۲۴۳

(۲) ۲۴۸

(۳) ۲۸۳

(۴) ۴۸۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر شماره هر مرحله را  $n$  در نظر بگیریم داریم:

تعداد خانه‌های سفید - تعداد کل خانه‌ها =  $a_n$ : تعداد خانه‌های تیره مرحله

$n$

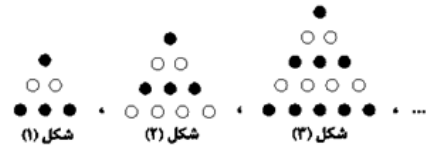
$$= (n+2)^2 - (n+4) = n^2 + 3n$$

(تعداد خانه‌های سفید)  $b_n = (2n-1)$ : تعداد نقطه‌های مرحله  $n$

$$= (2n-1)(n+4)$$

$$\Rightarrow b_{14} - a_{14} = 27 \times 18 - (14^2 + 3 \times 14) = 248$$

۲) در جمله بیستم الگوی زیر، تعداد دایره‌های توپیر، چند تا است؟



۸۱ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۴۴ (۳)

۱۲۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تعداد دایره‌های توپیر در شکل اول و دوم با هم برابر است. به همین ترتیب در شکل‌های سوم و چهارم نیز تعداد دایره‌های توپیر با هم برابر است. پس تعداد دایره‌های توپیر در شکل نوزدهم و بیستم نیز با هم برابر است.

تعداد دایره‌های توپیر در شکل اول و دوم :  $۲^۲$

تعداد دایره‌های توپیر در شکل سوم و چهارم :  $۳^۲$

:

تعداد دایره‌های توپیر در شکل  $۲n-۱$  و  $۲n$  :  $(n+۱)^۲$

تعداد دایره‌های توپیر در شکل نوزدهم و بیستم :  $۱۱^۲ = ۱۲۱$

۳) دنباله خطی  $19, 23, \dots$  و دنباله درجه دوم  $-2, 5, 16, \dots$  مفروض اند. مجموع جملات ششم این دو دنباله با هم کدام است؟

۸۵ (۱)

۱۱۲ (۲)

۱۱۶ (۳)

۱۰۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$19, 23, \dots : a_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a + b = 19 \\ a_2 = 2a + b = 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 15 \end{cases} \Rightarrow a_n = 4n + 15$$

$$-2, 5, 16, \dots : b_n = an^2 + bn + c \Rightarrow \begin{cases} b_1 = a + b + c = -2 \\ b_2 = 4a + 2b + c = 5 \\ b_3 = 9a + 3b + c = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2n^2 + n - 5$$

در نتیجه:

$$a_6 = 4(6) + 15 = 39$$

$$b_6 = 2(36) + 6 - 5 = 73$$

$$\Rightarrow a_6 + b_6 = 39 + 73 = 112$$

۴) اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ... مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام، کدام است؟

۱) ۱۷۰۰

۲) ۱۷۵۰

۳) ۱۸۰۰

۴) ۱۸۵۰

پاسخ: گزینه ۳

... و دسته سوم    دسته دوم    دسته اول  
 $\downarrow$                      $\downarrow$                      $\downarrow$   
 ۱ , ۲ , ۳ , ...

پس تعداد کل جملات ۲۹ دسته‌ی اول برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 29$$

$$= \frac{29(29+1)}{2} = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

پس اولین جمله دسته سی‌ام، برابر با جمله ۴۳۶ام دنباله اعداد طبیعی فرد است. دنباله اعداد طبیعی فرد، یک دنباله خطی با جمله عمومی  $a_n = 2n - 1$  است، بنابراین:

$$b_1 = 2 \times 436 - 1 = 871 = b_1$$

دسته سی‌ام، ۳۰ جمله دارد، بنابراین جمله آخر این دسته برابر است با:

$$b_{30} = b_1 + 29d \xrightarrow{d=2, b_1=871} 871 + 29 \times 2 = 929$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ هستند.)

$$\text{بنابراین: } b_1 + b_{30} = 871 + 929 = 1800$$

۵) اگر  $t_n = (-3m+1)n^2 + (6m)n - m - \frac{2}{3}$ ، جمله ی عمومی یک الگوی خطی باشد، جمله ی ششم الگو کدام است؟

۱) ۱۱

۲) ۱۲

۳) ۱۳

۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

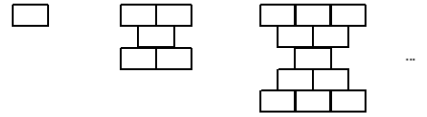
می‌دانیم یک الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  می‌باشد، پس درجه ی الگو یک است و در نتیجه ضریب  $n^2$  باید صفر باشد:

$$-3m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$t_n = \left(6 \times \left(\frac{1}{3}\right)\right)n - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow t_n = 2n - 1$$

$$\xrightarrow{n=6} t_6 = 2 \times 6 - 1 = 11$$

۶ در الگوی زیر تعداد آجرها در شکل دهم کدام است؟ (هر  $\square$  یک آجر است.)



شکل (۱)      شکل (۲)      شکل (۳)

۱۱۰ (۱)

۱۰۹ (۲)

۱۰۰ (۳)

۹۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در شکل اول، یک آجر داریم، در شکل دوم، ۲ ردیف آجر ۲ تایی اضافه می‌شود. در شکل سوم، ۲ ردیف آجر ۳ تایی اضافه می‌شود؛ بنابراین در شکل چهارم، ۲ ردیف آجر ۴ تایی اضافه می‌شود و این الگو ادامه می‌یابد، بنابراین:

$$t_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$$

$$t_2 = 1 + 2 \times 2 = 2(1 + 2) - 1$$

$$t_3 = 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 2(1 + 2 + 3) - 1$$

$$\Rightarrow t_{10} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 10) - 1 = 2 \times \left( \frac{10 \times 11}{2} \right) - 1 = 109$$

۱) جمله اول و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب از راست به چپ ۲ و ۳۷ است. بین اعداد ۴۶ و ۱۰ چند واسطه حسابی قرار دهیم تا جملات پنجم دنباله جدید و دنباله اولیه برابر باشند؟ (جمله اول دنباله جدید ۴۶ است.)

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر دنباله اولیه را با  $t_n$  و دنباله جدید را با  $a_n$  نمایش دهیم، طبق صورت سؤال  $t_5 = a_5$  است، پس:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_8 = 37 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{t_8 - t_1}{8-1} = \frac{37-2}{8-1} = \frac{35}{7} = 5$$

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است.

$$t_5 = t_1 + 4d = 2 + 4(5) = 22$$

اگر قدرنسبت دنباله  $a_n$  را  $d'$  در نظر بگیریم، داریم:

$$\Rightarrow a_5 = 22 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 46 \\ a_5 = 22 \end{cases} \Rightarrow d' = \frac{22-46}{5-1} = -\frac{24}{4} = -6$$

اگر  $m$  واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  درج شود، قدرنسبت برابر با  $\frac{b-a}{m+1}$  می شود، پس:

$$d' = \frac{10-46}{m+1} \Rightarrow -6 = \frac{10-46}{m+1} \Rightarrow -6 = \frac{-36}{m+1} \Rightarrow m+1 = 6 \Rightarrow m = 5$$

۸) جمله هشتم دنباله هندسی  $t_n$ ، ۸ برابر جمله پنجم آن است. اگر  $t_8 - t_5 = 84$  باشد، جمله اول این دنباله هندسی کدام است؟

- ۲ (۱)
- $\frac{3}{4}$  (۲)
- ۳ (۳)
- $\frac{4}{3}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

جمله عمومی دنباله هندسی را به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  می توان در نظر گرفت:

$$t_8 = 8t_5 \Rightarrow t_1 r^7 = 8t_1 r^4$$

$$\xrightarrow{t_1 \neq 0} r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$\xrightarrow{r=2} t_8 - t_5 = 84 \Rightarrow t_1 r^7 - t_1 r^4 = 84 \Rightarrow t_1 r^4 (r^3 - 1) = 84$$

$$\xrightarrow{r=2} t_1 r^4 = 12 \Rightarrow t_1 \times 16 = 12 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4}$$

۹) بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار واسطه هندسی قرار می‌دهیم. واسطه حسابی بین دو عدد وسط کدام است؟ (۴، جمله اول است.)

۱) ۱۴۴

۲) ۱۶۲

۳) ۷۲

۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$t_1 = 4$$

$$t_6 = t_1 r^5 = 972 \Rightarrow r^5 = \frac{972}{4} = 243 \Rightarrow r = 3$$

دو عدد وسطی = جمله سوم و چهارم

$$t_3 = t_1 r^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$t_4 = t_1 r^3 = 4 \times 27 = 108$$

$$\Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{36 + 108}{2} = 72$$

۱۰) اگر جملات سوم، هفتم و دهم یک دنباله حسابی غیرثابت، به ترتیب از راست به چپ سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند، نسبت جمله ششم به جمله سوم دنباله هندسی کدام است؟

۱)  $\frac{27}{64}$

۲)  $\frac{8}{27}$

۳)  $\frac{1}{64}$

۴)  $\frac{1}{27}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بین سه جمله متوالی دنباله هندسی مانند  $a, b, c$  رابطه  $b^2 = a \times c$  برقرار است.

$$(a_7)^2 = a_3 \times a_9 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 9d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 11a_1d + 18d^2 \Rightarrow a_1d + 18d^2 = 0$$

$$\Rightarrow d(a_1 + 18d) = 0 \Rightarrow a_1 = -18d$$

$$\text{قدرنسبت دنباله هندسی } q = \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} = \frac{-12d}{-16d} = \frac{3}{4}$$

بنابراین نسبت جمله ششم به جمله سوم دنباله هندسی برابر  $q^3 = \frac{27}{64}$  است.

۱۱) در یک دنباله حسابی جمله هشتم برابر صفر است. مجموع سه جمله دوم این دنباله چند برابر مجموع سه جمله اول آن است؟

(۱) -۲

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳) ۲

(۴)  $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_8 = t_1 + 7d = 0 \Rightarrow t_1 = -7d$$

$$\frac{t_6 + t_8 + t_9}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{t_1 + 5d + t_1 + 7d + t_1 + 8d}{t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d} = \frac{3t_1 + 17d}{3t_1 + 3d}$$

$$= \frac{t_1 + 5d}{t_1 + d} = \frac{-7d + 5d}{-7d + d} = \frac{-2d}{-6d} = \frac{1}{3}$$

۱۲) مجموع دو جمله ابتدایی یک دنباله هندسی برابر ۵ و مجموع جملات چهارم و پنجم این دنباله برابر  $\frac{135}{8}$  است. سومین جمله این دنباله کدام است؟

(۱) ۴/۵

(۲)  $\frac{2}{9}$

(۳) ۲

(۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

جمله عمومی دنباله هندسی را به صورت  $a_n = a_1 r^{n-1}$  در نظر می‌گیریم پس:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 5 \Rightarrow a_1 + a_1 r = 5 \\ a_4 + a_5 = \frac{135}{8} \Rightarrow a_1 r^3 + a_1 r^4 = \frac{135}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^3(a_1 + a_1 r) = \frac{135}{8} \Rightarrow r^3 \times 5 = \frac{135}{8}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \xrightarrow{a_1 + a_1 r = 5} a_1 + \frac{3a_1}{2} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{5a_1}{2} = 5 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$



۱۳) در یک دنباله هندسی که ۱۵ جمله دارد، جمله وسط برابر ۳ می‌باشد. حاصل ضرب کل جملات این دنباله کدام است؟

(۱)  $3^7 \sqrt{3}$

(۲) ۳۱۵

(۳) ۳۵

(۴)  $3^6 \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$P = t_1 \times t_2 \times \dots \times t_{14} \times t_{15}$$

$$t_1 t_{15} = t_1 \times t_1 r^{14} = t_1^2 r^{14} = (t_1 r^7)^2 = (t_8)^2$$

$$t_2 t_{14} = t_1 r \times t_1 r^{13} = t_1^2 r^{14} = (t_1 r^7)^2 = (t_8)^2$$

بنابراین:  $t_1 t_{15} = t_2 t_{14} = t_3 t_{13} = \dots = (t_8)^2$

$$P = (t_8)^{15} = 3^{15}$$

۱۴) در دنباله حسابی ...، ۱۷، ۱۱، ۵، تعداد اعداد سه رقمی کدام است؟

(۱) ۱۴۸

(۲) ۱۴۹

(۳) ۱۵۰

(۴) ۱۵۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$d = 6, a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 6(n-1) = 6n - 1$$

$$100 \leq 6n - 1 \leq 999 \Rightarrow \frac{101}{6} \leq n \leq \frac{1000}{6} \Rightarrow 16/8 \leq n \leq 166/6$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 17, 18, \dots, 166$$

تعداد جمله‌های سه رقمی برابر است با:

$$(166 - 17) + 1 = 150$$

۱۵) در یک دنباله حسابی، جملات سوم، نهم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از دنباله هندسی غیر ثابت هستند. جمله هفتم این دنباله حسابی چند برابر جمله دوم آن است؟

(۱)  $\frac{17}{13}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

اگر  $a_1$  جمله اول دنباله حسابی و  $d$  قدرنسبت آن باشد، طبق صورت سوال داریم:

$$a_3 \times a_{11} = a_7^2$$

$$\Rightarrow (a_1 + 2d)(a_1 + 10d) = (a_1 + 8d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 20a_1d + 20d^2 = a_1^2 + 16a_1d + 64d^2$$

$$\Rightarrow 44d^2 + 4a_1d = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = -11d$$

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + d} = \frac{-11d + 6d}{-11d + d} = \frac{-5d}{-10d} = \frac{1}{2}$$

توجه: اگر  $d = 0$  باشد تمام جملات دنباله حسابی برابر می‌شوند که در آن صورت سه جمله دنباله هندسی نیز ثابت خواهند بود که قابل قبول نیست.

۱۶) در یک دنباله هندسی با جمله اول ۵، به همه جملات ۲ واحد اضافه می‌کنیم و دنباله جدید، دوباره دنباله‌ای هندسی می‌شود. مجموع صد جمله اول دنباله اولیه کدام است؟

(۱) ۵۰۰

(۲)  $5^{100}$

(۳) ۴۹۸۵

(۴) ۵۰۰۰

پاسخ: گزینه ۱

دنباله اولیه به صورت  $5, 5r, 5r^2, \dots$  می‌باشد. اگر به همه جملات ۲ واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$5, 5r+2, 5r^2+2, \dots$$

در دنباله جدید، رابطه واسطه هندسی برقرار است. بنابراین:

$$(5r+2)^2 = 5(5r^2+2) \Rightarrow 25r^2 + 20r + 4 = 25r^2 + 10r + 10$$

$$\Rightarrow 10r^2 - 20r + 10 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

پس جملات دنباله اولیه، همگی با هم برابرند:

$$5, 5, \dots$$

$$\text{مجموع صد جمله اول} = 5 \times 100 = 500$$

۱۷) بین دو عدد مثبت  $a$  و  $b$ ، ۷ واسطه هندسی قرار می‌دهیم. اگر دومین واسطه هندسی ۲ و ششمین واسطه هندسی ۳۲ باشد، جمله چهارم این دنباله کدام است؟ (a جمله اول دنباله است.)

۴ (۱)

۲ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$a$   $\dots$   $b$   
واسطه هندسی ۷

$$\text{جمله سوم} = \text{دومین واسطه هندسی} \Rightarrow t_3 = 2 \Rightarrow ar^2 = 2$$

$$\text{جمله هفتم} = \text{ششمین واسطه هندسی} \Rightarrow t_7 = 32 \Rightarrow ar^6 = 32$$

$$\Rightarrow \frac{ar^6}{ar^2} = \frac{32}{2} \Rightarrow r^4 = 16$$

جملات دنباله مثبت هستند

$$\rightarrow r = 2$$

پس

$$ar^2 = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{r^2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = ar^3 = \frac{1}{2}(2)^3 = 4$$

۱۸) در یک دنباله هندسی،  $t_1 = 3$  و  $t_4 = 1$  است. حاصل  $A = \frac{t_{11} + t_{13} + t_{15}}{t_{13} + t_{15} + t_{17}}$  کدام است؟

$(\frac{1}{3})^{10}$  (۱)

$(\frac{1}{3})^{12}$  (۲)

$(\frac{1}{3})^{-12}$  (۳)

$(\frac{1}{3})^{-10}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$t_4 = t_1 r^3 \rightarrow 1 = 3r^3 \rightarrow r = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{t_{11} + t_{13} + t_{15}}{t_{13} + t_{15} + t_{17}} = \frac{t_1 r^{10} + t_1 r^{12} + t_1 r^{14}}{t_1 r^{12} + t_1 r^{14} + t_1 r^{16}} = \frac{t_1 r^{10}(1 + r^2 + r^4)}{t_1 r^{12}(1 + r^2 + r^4)}$$

$$A = \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r}\right)^2 = r^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

۱۹) اگر  $a_n$  و  $b_n$  دنباله‌های درجه ۲، به صورت زیر باشند و  $c_n = a_n - b_n$ ، آنگاه  $a_5 - 2a_5 - c_5$  کدام است؟

$$\begin{cases} a_n : 6, 12, 20, 30, \dots \\ b_n = n^2 - 6n + 7 \end{cases}$$

۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$a_n : 6 \xrightarrow{+6} 12 \xrightarrow{+8} 20 \xrightarrow{+10} 30 \xrightarrow{+12} 42 \Rightarrow a_5 = 42$$

$$b_n : 2, -1, -2, -1, \dots$$

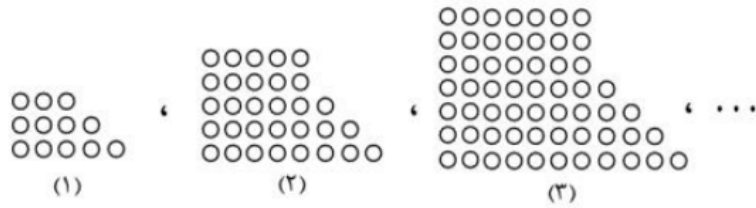
$$c_n = a_n - b_n \Rightarrow c_n : 4, 13, 22, 31, \dots$$

بنابراین  $c_n$  یک دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۹ است:

$$c_n = 4 + (n-1) \times 9 = 9n - 5 \Rightarrow c_5 = 9 \times 5 - 5 = 40 - 5 = 35$$

$$a_5 - 2a_5 - c_5 = 42 - 2 \times 42 - 35 = 42 - 84 - 35 = -77$$

۲۰) در الگوی زیر، شکل دهم از چند دایره تشکیل شده است؟



(۱) ۵۰۷

(۲) ۴۹۶

(۳) ۴۶۶

(۴) ۵۶۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{شکل اول} \Rightarrow 3 \times 3 + (1+2)$$

$$\text{شکل دوم} \Rightarrow 5 \times 5 + (1+2+3)$$

$$\text{شکل سوم} \Rightarrow 7 \times 7 + (1+2+3+4)$$

:

$$\text{شکل } n\text{ام} \Rightarrow (2n+1)(2n+1) + \underbrace{(1+2+3+\dots+n+1)}_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$\text{شکل دهم} \Rightarrow 21 \times 21 + (1+2+3+\dots+11) = 441 + \frac{(1+11) \times 11}{2} = 507$$

۲۱) اگر جملات دوم یک دنباله هندسی و یک دنباله حسابی یکسان باشند، در صورتی که جمله سوم دنباله هندسی برابر مجموع سه جمله اول دنباله حسابی باشد، آن گاه قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

(۱) ۴

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$a_2 = t_2 \quad (1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = t_3 \xrightarrow{a_1 + a_2 = 2a_2} 3a_2 = t_3 \quad (2)$$

$$q = \frac{t_3}{t_2} \xrightarrow{(1), (2)} q = \frac{3a_2}{a_2} = 3 \Rightarrow q = 3$$

۲۲) در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله عمومی  $t_n$  و قدرنسبت ۲ می‌باشد. اگر جمله سوم این دنباله، برابر ۲ و  $\frac{t_m - t_0}{1-r} = 14$  باشد، در این صورت  $r$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲) ۴  
 (۳)  $\frac{1}{2}$   
 (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

$$t_m = t_1 r^m = 2(1)$$

$$\frac{t_m - t_0}{1-r} = 14 \Rightarrow \frac{t_1 r^m - t_1 r^0}{1-r} = 14 \Rightarrow \frac{t_1 r^m (1-r^0)}{1-r} = 14$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} \frac{(1-r)(1+r)}{1-r} = 7 \Rightarrow r = 6$$

۲۳) در یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $a_n$ ، اگر  $a_7 = x - 2$  و  $a_{11} = x$  و  $a_{15} = x + 4$  باشد، جمله بیست و هفتم چند برابر جمله نوزدهم است؟

- (۱) ۱۶  
 (۲) ۴  
 (۳)  $\sqrt{2}$   
 (۴)  $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

راه حل اول:

$$a_7 = a_1 q^6, a_{11} = a_1 q^{10}, a_{15} = a_1 q^{14}$$

$$a_7 \times a_{15} = a_1 q^6 \times a_1 q^{14} = a_1^2 q^{20} = (a_1 q^{10})^2 = a_{11}^2$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+4) = x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = x^2 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

راه حل دوم:

نکته: اگر  $a_p, a_n, a_m$  سه جمله از یک دنباله هندسی باشند و  $n$  واسطه حسابی بین  $m$  و  $p$  باشد، آن‌گاه  $a_n$  واسطه هندسی بین  $a_m$  و  $a_p$  است.

$$\frac{15+7}{2} = 11 \Rightarrow (a_{11})^2 = a_7 \times a_{15} \Rightarrow x^2 = (x-2)(x+4)$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x = 4$$

$$\begin{cases} a_7 = x - 2 = 2 \\ x_{11} = x = 4 \\ x_{15} = x + 4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_7} = \frac{aq^{10}}{aq^6} = q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{خواسته سؤال: } \frac{a_{27}}{a_9} = \frac{aq^{26}}{aq^8} = q^{18} = (q^4)^9 = 2^9 = 512$$

۲۴) در دنباله حسابی ... و  $x+5$  و  $2x-1$  و  $x+1$ ، اگر به جمله اول  $y$ ، به جمله دوم  $2y$  و به جمله سوم  $4y$  اضافه کنیم، این سه جمله، با همان ترتیب، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.  $x+y$  کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۰

(۳) ۶

(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با استفاده از رابطه واسطه حسابی، داریم:

$$2(2x-1) = x+1+x+5$$

$$\Rightarrow 4x-2 = 2x+6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \quad (1)$$

دنباله حسابی: ۵, ۷, ۹, ...

دنباله هندسی:  $5+y, 7+2y, 9+4y$

$$(7+2y)^2 = (5+y)(9+4y) \Rightarrow 4y^2 + 28y + 49 = 4y^2 + 29y + 45$$

$$\Rightarrow y = 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} x+y = 8$$

۲۵) اگر در دنباله هندسی  $a_n$ ، رابطه  $a_3 \cdot a_{21} = k$  برقرار باشد، حاصل  $a_2 \cdot a_{12} \cdot a_{22}$  بر حسب  $k$  همواره کدام است؟ ( $k > 0$ )

(۱)  $\frac{k^2}{2}$

(۲)  $k^2 \sqrt{k}$

(۳)  $k\sqrt{k}$

(۴)  $k^2$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$a_2 \cdot a_{21} = k \Rightarrow a_1 r^2 \cdot a_1 r^{20} = a_1^2 r^{22} = k \xrightarrow{k>0} a_1 r^{11} = \sqrt{k}$$

$$a_2 \cdot a_{12} \cdot a_{22} = a_1 r \cdot a_1 r^{11} \cdot a_1 r^{21} = a_1^3 r^{33}$$

$$= (a_1 r^{11})^3 = (\sqrt{k})^3 = k\sqrt{k}$$