

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون B2 الگو و دنباله

مدت زمان آزمون: -



مرکز مشاوره تحصیلی راه روشن

۱) جمله دوازدهم دنباله ... ، ۱۰ ، ۶ ، ۳ ، ۱ چند واحد از جمله هشتم دنباله ... ، ۱۶ ، ۹ ، ۴ ، ۱ بیشتر است؟

۸ (۱)

۱۱ (۲)

۱۲ (۳)

۱۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

دنباله مثلثی  $1, 3, 6, 10, \dots \rightarrow$

$$a_n = \frac{n \times (n+1)}{2} \Rightarrow a_{12} = \frac{12 \times 13}{2} = 78$$

دنباله مربعی  $1, 4, 9, 16, \dots \rightarrow$

$$b_n = n^2 \Rightarrow b_8 = 8^2 = 64$$

$$a_{12} - b_8 = 78 - 64 = 14$$

۲) در الگوی خطی  $a_n$  جمله اول برابر ۱۳ و جمله دوم آن برابر ۱۵ و در الگوی خطی  $b_n$  جمله سوم برابر با ۱۵ و جمله پنجم برابر با ۲۳ است، جمله چندم این دو الگو مقدار برابری دارند؟

- ۱) دوم
- ۲) سوم
- ۳) چهارم
- ۴) پنجم

پاسخ: گزینه ۳

$$a_1 = 13 \quad a_2 = 15$$

جمله عمومی الگوی خطی برابر  $a_n = an + b$  است. بنابراین:

$$a_1 = a \times 1 + b = 13, \quad a_2 = a \times 2 + b = 15$$

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ 2a + b = 15 \end{cases} \xrightarrow{x-1} \begin{cases} -a - b = -13 \\ 2a + b = 15 \end{cases} \Rightarrow a = 2, \quad b = 11$$

بنابراین  $a_n = 2n + 11$  است.

الگوی خطی دوم را به صورت  $b_n = a'n + b'$  در نظر می‌گیریم.

$$b_4 = 15, \quad b_5 = 23, \quad b_n = a'n + b'$$

$$\begin{cases} b_4 = 4a' + b' = 15 \\ b_5 = 5a' + b' = 23 \end{cases} \xrightarrow{x-1} \begin{cases} -a' - b' = -15 \\ 5a' + b' = 23 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 8 \Rightarrow a' = 4, \quad b' = 11$$

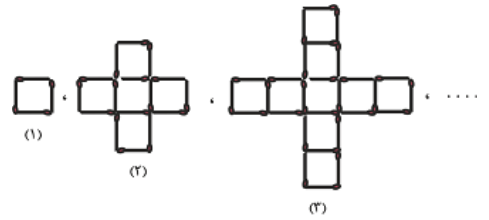
پس فرم کلی الگو  $b_n = 4n + 3$  است.

برای این که مقدار دو الگو برابر شود باید  $a_n$  و  $b_n$  به دست آمده را با هم برابر قرار دهیم.

$$4n + 3 = 2n + 11 \Rightarrow 2n = 8 \Rightarrow n = 4$$

در جمله چهارم مقدار دو الگو با هم برابر خواهد شد.

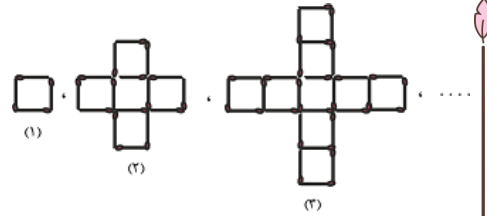
۳) با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب‌کبریت‌ها برابر ۹۱ است؟



- ۸ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



ابتدا با توجه به الگو، جمله عمومی مربوط به تعداد مربع‌های هر مرحله را تعیین می‌کنیم:

$$1, 1+1 \times 4, 1+2 \times 4, \dots$$

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$$

حال، تعداد چوب‌کبریت‌های هر مرحله را تعیین می‌کنیم:

$$4, 4 + (3 \times 4) \times 1, 4 + (3 \times 4) \times 2, \dots$$

$$b_n = 4 + (3 \times 4) \times (n-1)$$

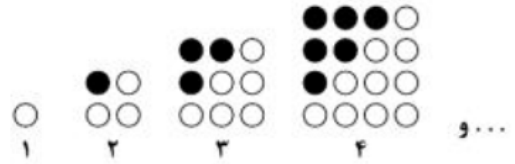
$$\Rightarrow b_n = 4 + 12n - 12 = 12n - 8$$

حال با توجه به رابطه‌های به دست آمده داریم:

$$b_n - a_n = 12n - 8 - (4n - 3) = 8n - 5$$

$$8n - 5 = 91 \Rightarrow 8n = 96 \Rightarrow n = \frac{96}{8} = 12$$

۴) در الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های توپُر شکل دوازدهم از تعداد دایره‌های توخالی آن چندتا کمتر است؟



۱۲ (۱)

۳۶ (۲)

۶۶ (۳)

۷۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

هر دو دایره‌های توخالی و توپُر از الگوی مثلثی تبعیت می‌کنند.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{12} = \frac{12(13)}{2} = 78$$

$$b_n = \frac{(n-1)(n)}{2} \Rightarrow b_{12} = \frac{11(12)}{2} = 66$$

$$\Rightarrow a_{12} - b_{12} = 78 - 66 = 12$$

۵) در یک دنباله اعداد  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل  $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

۳۲ (۱)

۴۸ (۲)

۵۶ (۳)

۶۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول: از  $a_n = 2a_{n-1} - 2$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - 2$$

$$\text{پس } a_8 - a_7 = a_7 - 2$$

حال جمله هفتم دنباله را پیدا کرده و حاصل  $a_7 - 2$  را حساب می‌کنیم.

$$a_n = 2a_{n-1} - 2; a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \times 3 - 2 = 4, a_3 = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2 \times 6 - 2 = 10, a_5 = 2 \times 10 - 2 = 18$$

$$a_6 = 2 \times 18 - 2 = 34, a_7 = 2 \times 34 - 2 = 66$$

$$\Rightarrow a_8 - a_7 = 66 - 2 = 64$$

۶) در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول برابر ۳ و جمله چهارم ۲/۵ برابر جمله سوم است. جمله دهم دنباله کدام است؟

(۱) -۱۵

(۲) -۱۷

(۳) -۱۹

(۴) -۲۳

پاسخ: گزینه ۴

اگر  $t_n$  جمله عمومی دنباله حسابی و  $d$  قدرنسبت دنباله باشد، داریم:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3 \Rightarrow t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 3$$

$$\Rightarrow 3t_1 + 3d = 3 \Rightarrow t_1 + d = 1 \Rightarrow t_1 = 1 - d \quad (*)$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$t_4 = 2/5 t_3 \Rightarrow t_1 + 3d = \frac{2}{5}(t_1 + 2d)$$

$$\Rightarrow t_1 + 3d = \frac{2}{5}t_1 + 2d$$

$$\xrightarrow{(*)} 1 - d + 3d = \frac{2}{5}(1 - d) + 2d \Rightarrow 1 + 2d = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}d + 2d$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow d = -3 \xrightarrow{(*)} t_1 = 4$$

$$t_{10} = t_1 + 9d = 4 - 27 = -23$$

۷) بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $\gamma$  واسطه هندسی قرار می‌دهیم، به طوری که تشکیل یک دنباله هندسی با جملات مثبت می‌دهند. اگر دومین واسطه هندسی  $2$  و ششمین واسطه هندسی  $32$  باشد، جمله چهارم این دنباله کدام است؟ ( $a$  جمله اول دنباله است).

(۱) ۱۶

(۲) ۸

(۳) ۴

(۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

با فرض اینکه  $a$  جمله اول دنباله باشد، داریم:

$a, \dots, b$   
 $\gamma$  واسطه هندسی

$$\left. \begin{aligned} \text{جمله سوم} = \text{دومین واسطه هندسی} &\Rightarrow a_3 = aq^2 = 2 \\ \text{جمله هفتم} = \text{ششمین واسطه هندسی} &\Rightarrow a_7 = aq^6 = 32 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{aq^6}{aq^2} = q^4 = 16 \xrightarrow[\text{جملات دنباله مثبت‌اند}]{q>0} q = 2$$

$$a_3 = aq^2 = 2 \xrightarrow{q=2} a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a_4 = aq^3 = \frac{1}{4}(2)^3 = 2$$

۸) زوایای داخلی یک چهارضلعی محدب تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اگر بزرگ‌ترین زاویه آن  $120^\circ$  درجه باشد، قدر نسبت دنباله کدام است؟

(۱)  $10^\circ$

(۲)  $15^\circ$

(۳)  $20^\circ$

(۴)  $30^\circ$

پاسخ: گزینه ۳

چهار زاویه چهارضلعی محدب را به صورت  $a, a+d, a+2d, a+3d$  در نظر می‌گیریم. بزرگ‌ترین زاویه آن  $120^\circ$  و مجموع زوایای آن  $360^\circ$  است، بنابراین:

$$\begin{cases} a+3d=120^\circ \\ a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=360^\circ \\ \Rightarrow 4a+6d=360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3d=120^\circ \\ 2a+3d=180^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=60^\circ, d=20^\circ$$

۹) در یک دنباله هندسی، مجموع جملات ششم، هفتم و هشتم برابر با ۶۷۲ است. اگر جمله دهم این دنباله ۸ برابر جمله هفتم باشد، جمله چهارم آن کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۲۴

(۳) ۴۸

(۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

$$a_1 q^6 + a_1 q^7 + a_1 q^8 = 672 \Rightarrow a_1 q^6 (1 + q + q^2) = 672$$

$$a_1 q^6 = 8 a_1 q^7 \Rightarrow q^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

$$a_1 q^6 (1 + q + q^2) = 672 \xrightarrow{q=2} a_1 \times 2^6 (1 + 2 + 4) = 224 a_1 = 672$$

$$\Rightarrow a_1 = 3$$

$$\text{جمله چهارم: } a_1 q^3 = 3 \times 2^3 = 24$$

۱۰) حاصلضرب سه جمله اول یک دنباله هندسی برابر ۲۷- است. اگر مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۵ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۵

(۳) -۵

(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

سه جمله دنباله را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:  $\frac{a}{r}, a, ar$

حاصلضرب سه جمله اول برابر با ۲۷- است:

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -27$$

$$\Rightarrow a^3 = -27 = (-3)^3 \Rightarrow a = -3 \quad (*)$$

مجموع جملات دوم و سوم برابر با ۱۵ است، بنابراین:

$$a + ar = 15 \Rightarrow a(1+r) = 15 \xrightarrow{(*)} -3(1+r) = 15$$

$$\Rightarrow 1+r = -5 \Rightarrow r = -6$$

۱۱) اگر در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$  داشته باشیم:  $t_3 = 166$  و  $t_5 = 150$ ، آنگاه اولین جمله منفی این دنباله کدام است؟

(۱) -۸

(۲) -۶

(۳) -۴

(۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

$$t_5 - t_3 = 2d$$

$$\Rightarrow 150 - 166 = 2d \Rightarrow d = -8$$

$$t_5 = 150 \Rightarrow 150 = t_1 + 4d \xrightarrow{d=-8} 150 = t_1 + 4(-8)$$

$$\Rightarrow t_1 = 182$$

باید اولین جمله‌ای را بیابیم که در آن  $t_n < 0$  باشد، پس:

$$t_1 + (n-1)d < 0$$

$$\Rightarrow 182 + (-8)(n-1) < 0 \Rightarrow 182 < 8(n-1)$$

$$\Rightarrow n-1 > \frac{182}{8} = 22.75 \Rightarrow n > 23.75$$

از آنجایی که شماره جملات، عددی طبیعی است، پس اولین جمله منفی، جمله بیست و چهارم است؛ لذا:

$$t_{24} = t_1 + 23d \rightarrow t_{24} = 182 + 23(-8) = -2$$

۱۲) اگر در یک دنباله خطی  $a_m = n$  و  $a_n = m$  باشد، حاصل  $a_{11} - a_9$  کدام است؟ ( $m \neq n$ )

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) -۲

(۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{n - m}{m - n} = -1$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1 + 10d \\ a_9 &= a_1 + 8d \end{aligned} \Rightarrow a_{11} - a_9 = 2d \Rightarrow a_{11} - a_9 = -2$$

۱۳) ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کرده‌ایم که سهم‌های دریافت شده تشکیل دنباله‌ای حسابی داده‌اند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر شده است. بیش‌ترین سهمی که به یک نفر می‌رسد کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۸

(۳) ۳۰

(۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100 \Rightarrow 5a_1 + 10d = 100$$

$$\Rightarrow a_1 + 2d = 20 \quad (*)$$

$$\frac{1}{3}(a_3 + a_4 + a_5) = a_1 + a_2 \Rightarrow \frac{1}{3}(3a_1 + 9d) = 2a_1 + d$$

$$\Rightarrow a_1 + 3d = 2a_1 + d \Rightarrow a_1 = 2d$$

$$\xrightarrow{(*)} 4d = 20 \Rightarrow d = 5, a_1 = 10 \Rightarrow 10, 15, 20, 25, 30$$



۱۴) اگر بین دو عدد ۲ و ۳۰،  $m$  واسطه حسابی قرار دهیم به طوری که بزرگ‌ترین واسطه، ۲ واحد بیش‌تر از ۴ برابر کوچک‌ترین واسطه باشد،  $m$  کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

می‌توان این دنباله حسابی را به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{2}_{a_1}, \underbrace{2+d}_{a_2}, \dots, \underbrace{2+(m-1)d}_{a_m}, \underbrace{2+md}_{a_{m+1}} = 30$$

$$a_{m+1} - a_1 = (m+1-1)d \Rightarrow 30 - 2 = (m+1)d \Rightarrow 28 = (m+1)d$$

از طرفی:

$$a_{m+1} - 4a_2 = 2 \Rightarrow (30 - d) - 4(2 + d) = 2$$

$$30 - d - 8 - 4d = 2 \Rightarrow 22 - 5d = 2 \Rightarrow 5d = 20 \Rightarrow d = 4$$

$$28 = (m+1)d \Rightarrow 28 = (m+1) \times 4 \Rightarrow m+1 = 7 \Rightarrow m = 6$$

۱۵) اگر دهمین جمله دنباله حسابی  $\dots, 0, -3$  با پنجمین جمله یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{3}{4}$  برابر باشد، نهمین جمله دنباله هندسی کدام است؟

۲۵۶ (۱)

۱۲۸ (۲)

۳۸۴ (۳)

۷۶۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\text{دنباله حسابی} \begin{cases} t_1 = -3 \\ d = 3 \\ t_{10} = t_1 + 9d = -3 + 27 = 24 \end{cases}$$

$$t_{10} = 24 \text{ هندسی} = t_5$$

$$\text{هندسی} \begin{cases} t_5 = 24 \\ t_1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow t_1 r^4 = 24$$

$$\frac{3}{4} \times r^4 = 24 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow t_9 = t_1 \times r^8 = \frac{3}{4} \times 16^2 = 384$$

۱۶) جملات سوم، هفتم و نهم از یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند. جمله چندم دنباله حسابی صفر است؟

۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۱ (۳)

۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

ویژگی جملات  
 $a_3, a_7, a_9$  متوالی دنباله هندسی  $\rightarrow a_7^2 = a_3 \cdot a_9$

$$\Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$

$$\Rightarrow 20d^2 + 2a_1d = 2d(10d + a_1) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = -10d$$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی دنباله حسابی: } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= -10d + (n-1)d = (n-11)d$$

واضح است که  $a_{11} = 0$  خواهد بود.

۱۷) در یک دنباله هندسی  $a_7 = 3^{x-2}$  و  $a_{11} = 9^y$  و  $a_{15} = 27$ ، چه رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  برقرار است؟

$$4y = x - 1 \quad (1)$$

$$4y = 1 - x \quad (2)$$

$$x = -4y - 1 \quad (3)$$

$$x = 4y - 1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

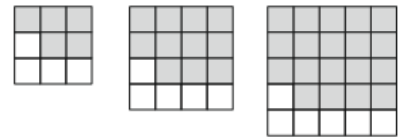
در یک دنباله هندسی، داریم:  $(a_n)^2 = (a_{n-k})(a_{n+k})$

$$\text{بنابراین: } (a_{11})^2 = (a_{11+4})(a_{11-4}) \Rightarrow (a_{11})^2 = (a_{15})(a_7)$$

$$\Rightarrow (9^y)^2 = 3^{x-2} \times 27 \Rightarrow (3^{2y})^2 = 3^{x-2} \times 3^3$$

$$\Rightarrow 3^{4y} = 3^{x-2+3} \Rightarrow 4y = x - 2 + 3 \Rightarrow 4y = x + 1 \Rightarrow x = 4y - 1$$

۱۸) در شکل چن‌دم، تفاضل مربع‌های کوچک رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر با ۳۵۸ است؟



(۱)

(۲)

(۳)

(۱) هفدهم

(۲) هجدهم

(۳) نوزدهم

(۴) بیستم

پاسخ: گزینه ۲

در مرحله  $n$ ام، یک مربع  $n+۲$  در  $n+۲$  داریم. یعنی مجموعاً  $(n+۲)^۲$  تا مربع که  $n+۳$  مربع آن رنگ‌نشده است، پس:

$n+۳$  : تعداد مربع‌های رنگ‌نشده مرحله  $n$ ام

$$(n+۲)^۲ - (n+۳) = n^۲ + ۳n + ۱$$

پس تفاضل مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر است با:

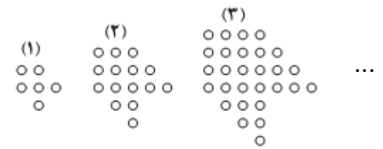
$$(n^۲ + ۳n + ۱) - (n+۳) = n^۲ + ۲n - ۲$$

$n^۲ + ۲n - ۲$  را برابر با ۳۵۸ قرار می‌دهیم:

$$n^۲ + ۲n - ۲ = ۳۵۸ \Rightarrow n^۲ + ۲n + ۱ = ۱۹^۲$$

$$\Rightarrow (n+۱)^۲ = ۱۹ \Rightarrow n+۱ = ۱۹ \Rightarrow n = ۱۸$$

۱۹) با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره‌ها در شکل سیزدهم کدام است؟



(۱) ۳۷۸

(۲) ۳۸۲

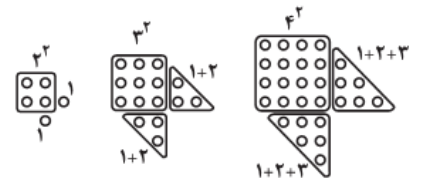
(۳) ۳۸۶

(۴) ۳۹۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر به الگوی داده شده به صورت زیر نگاه کنیم، جمله عمومی آن را می‌توانیم به سادگی بنویسیم:



یعنی شکل  $n$ ام از یک مربع  $n+1$  در  $n+1$  و از دو مثلث که تعداد دایره‌های هر کدام برابر با جمع اعداد از ۱ تا  $n$  است، تشکیل شده است. بنابراین جمع تعداد دایره‌های دو مثلث برابر است با:

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$$

پس تعداد کل دایره‌های شکل  $n$ ام برابر است با:

$$a_n = (n+1)^2 + n^2 + n \Rightarrow a_n = 2n^2 + 3n + 1$$

$$\Rightarrow a_{13} = 2(13)^2 + 3(13) + 1 = 338 + 40 = 378$$

۲۰) کمترین مقدار جملات دنباله  $a_n = n^2 - 5n + 1$  کدام است؟

(۱) -۵

(۲) ۱

(۳) ۵

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$a_n = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$$

کمترین مقدار، زمانی اتفاق می‌افتد که عبارت  $\left(n - \frac{5}{2}\right)^2$  کمترین مقدار ممکن باشد. به ازای  $n=2$  و  $n=3$ ، کمترین مقدار جملات این دنباله یعنی -۵ به دست می‌آید.

۲۱) اگر واسطه حسابی ۱۱ و ۵- برابر  $x$  و واسطه هندسی ۳ و  $y$  برابر ۱۲ باشد، به طوری که  $y$ ،  $c$ ،  $b$ ،  $a$ ،  $x$  تشکیل دنباله هندسی بدهند، مقدار  $b$  کدام است؟

(۱) -۱۲

(۲) ۱۲

(۳)  $\pm ۱۲$

(۴)  $\pm ۲۴$

پاسخ: گزینه ۲

$$x = \frac{-5+11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$y \times 3 = 12^2 \Rightarrow y = \frac{12^2}{3} = 48$$

$$3, a, b, c, 48 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ و } a_5 = 48$$

$$q^5 = \frac{a_5 q^5}{a_1} = \frac{48}{3} \Rightarrow q^5 = 16 \Rightarrow q^5 = 4^2 \Rightarrow q = 4$$

$$b = a_3 = a_1 q^2 = 3 \times 4 = 12$$

۲۲) اگر در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله دوم -۹ و مجموع ۲ جمله سوم -۸ باشد، آن گاه مجموع سه جمله اول کدام است؟

(۱) ۹

(۲) -۹

(۳) -۱۱

(۴) -۷

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{سه جمله دوم: } \overbrace{a_2 + a_3 + a_4}^{2a_3} = -9 \Rightarrow 3a_3 = -9$$

$$\Rightarrow a_3 = -3 \Rightarrow a_1 + 4d = -3 \quad (1)$$

$$\text{دو جمله سوم: } a_5 + a_6 = -8 \Rightarrow a_1 + 4d + a_1 + 5d = -8$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 9d = -8 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{a_1 + a_2 + a_3}^{2a_2} = 3a_2 = 3(5 + (-2)) = 9$$

۲۳) در یک دنباله حسابی با ۲۰ جمله، اگر  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 370$  و  $a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 410$  باشد، آنگاه حاصل  $a_1 + a_7 + a_{15} - 3a_{10}$  کدام است؟

(۱) ۲۸

(۲) -۲۸

(۳) ۲۱

(۴) -۲۱

پاسخ: گزینه ۲

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 370 \quad (1)$$

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 410 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = 410 - 370$$

$$\Rightarrow \overbrace{d + d + \dots + d}^{10 \text{ تا}} = 40 \Rightarrow 10d = 40 \Rightarrow d = 4$$

$$\Rightarrow a_1 + a_7 + a_{15} - 3a_{10} = a_1 + a_1 + 6d + a_1 + 14d - 3(a_1 + 9d)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 20d - 3a_1 - 27d = -7d \stackrel{d=4}{=} -7(4) = -28$$

۲۴) اگر جمله عمومی جملات مشترک دو دنباله  $a_n = 3, 7, 11, 15, \dots$  و  $b_n = 1, 4, 7, 10, \dots$  به صورت  $c_n = an + b$  باشد،  $a - 2b$  کدام است؟

(۱) ۲۲

(۲) ۱۲

(۳) ۲

(۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۱

اولین جمله مشترک دو دنباله ۷ است و دومین جمله مشترک به اندازه ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنباله پیش می‌رود ( $[d, d'] = 12$   $d' = 3$   $d = 4$ ) پس دومین جمله مشترک برابر است با  $7 + 12 = 19$  و این دنباله، یک دنباله حسابی است، پس:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_4 = 19 \end{cases} \Rightarrow d'' = 19 - 7 = 12 \Rightarrow c_n = a_1 + (n-1)d''$$

$$c_n = 7 + (n-1) \times 12 \Rightarrow c_n = 12n - 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a - 2b = 12 + 10 = 22$$

۲۵) در دنباله هندسی...  $\frac{1}{r}$ ،  $\frac{3}{r}$ ، واسطه حسابی جملات ششم و هفتم کدام است؟

(۱)  $\frac{20}{243}$

(۲)  $\frac{10}{81}$

(۳)  $\frac{40}{729}$

(۴)  $\frac{5}{27}$

پاسخ: گزینه ۱

جمله اول دنباله  $\frac{3}{r}$  است و قدرنسبت آن از تقسیم جمله دوم به جمله اول به دست می‌آید:

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{3}{r}} = \frac{1}{3}$$

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = \frac{3}{r} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_5 = \frac{3}{r} \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{3 \times 1^5}{r^2 \times 3^5} = \frac{1^3}{r^2} = \frac{8}{81} \\ t_7 = \frac{3}{r} \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{3 \times 1^7}{r^2 \times 3^7} = \frac{1^4}{r^2} = \frac{16}{243} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{t_5 + t_7}{2} = \frac{\frac{8}{81} + \frac{16}{243}}{2} = \frac{\frac{40}{243}}{2} = \frac{20}{243}$$