۱) به ازای چند مقدار صحیح a، تابع $f(x) = \begin{cases} |۱-x| & ;x>۰ \\ a & ;x=۱ \\ (x-۱)^۳-۲ & ;x<۱ \end{cases}$ فقط یک اکسترمم نسبی دارد؟

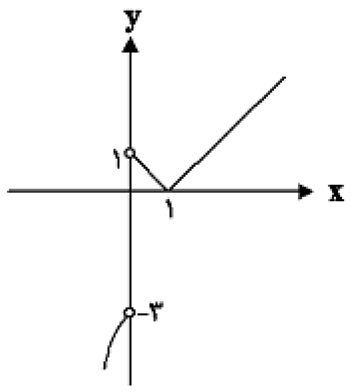
**۱)** ۵ **۲)** ۴

**۳)** ۳ **۴)** بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با توجه به نمودار تابع، مشخص است که تابع در $x = ۱$ دارای min نسبی است و برای اینکه دیگر اکسترمم نداشته باشیم باید $-۳ \le f(۰) < ۱$ باشد:




$\Rightarrow a \in [-۳,۱)$

این بازه شامل ۴ عدد صحیح است.

۲) کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲$ و نقطه ثابت $(۰ , ۱۱)$ کدام است؟

**۱)** ۴ **۲)** ۵

**۳)** $۴\sqrt{۲}$ **۴)** ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

فاصله نقطه به مختصات $M(x , y)$ از نقطه ثابت $(۰ , ۱۱)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \sqrt{(x-۰)^۲ + (y-۱۱)^۲} \Rightarrow d = \sqrt{x^۲ + (y-۱۱)^۲}$$

از رابطه کمکی $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲$، $x^۲$ را برحسب y یافته و در رابطه قرار داده و نسبت به y، مشتق می‌گیریم:

$$x^۲ = ۲(y+۲) \Rightarrow d = \sqrt{۲(y+۲) + (y-۱۱)^۲}$$

$$d'(y) = \frac{۲+۲(y-۱۱)}{۲\sqrt{۲(y+۲)+(y-۱۱)^۲}} = ۰ \Rightarrow y = ۱۰$$

$$\Rightarrow d_{min} = \sqrt{۲(۱۰+۲) + (۱۰-۱۱)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۳) نمودار تابع $f(x) = ۳\sqrt[۳]{x^۲} - \frac{۹}{\sqrt[۳]{x}}$ در کدام بازه زیر صعودی است؟

**۱)** $(-۲,-۱)$ **۲)** $(-۴,-۳)$ **۳)** $(-۱,۱)$ **۴)** $(۲,۳)$

---

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f(x) = ۳x^{\frac{۲}{۳}} - ۹x^{-\frac{۱}{۳}} \rightarrow f'(x) = ۲x^{-\frac{۱}{۳}} + ۳x^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{-\frac{۱}{۳}}(۲ + ۳x^{-۱}) \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}(۲ + \frac{۳}{x})$$

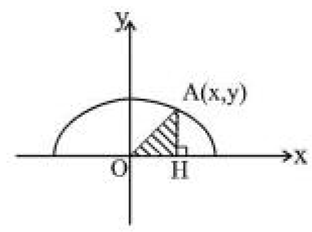
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{۲x+۳}{x\sqrt[۳]{x}}$$

جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

| x | | $-\frac{۳}{۴}$ | | ۰ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′ | − | | + | | + |
| f | ↘ | | ↗ | | ↗ |

البته حواستان باشد تابع حول ۰ = x بی‌نهایت می‌شود و اطراف آن، یکنوایی‌اش تغییر می‌کند.

④ در شکل زیر، اگر نقطهٔ $A(x,y)$ واقع بر نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، حداکثر مساحت مثلث قائم الزاویهٔ OAH کدام است؟




۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۴

$$S_{\overset{\Delta}{OAH}}=\frac{۱}{۲}xy \xrightarrow{y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱-x^۲}} S(x)=\frac{۱}{۳}x\sqrt{۱-x^۲}$$

روش اول:

$$S'(x)=\frac{۱}{۳}\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{۳\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-۲x^۲}{۳\sqrt{۱-x^۲}}$$

بیشترین مساحت مثلث، در نقطهٔ بحرانی تابع $S(x)$ رخ می‌دهد.

$$S'(x)=۰ \Rightarrow ۱-۲x^۲=۰ \xrightarrow{x>۰} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{max}=S(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۶}$$

روش دوم: ماکزیمم مقدار $S(x)$، زمانی رخ می‌دهد که برابری $x^۲=۱-x^۲$ برقرار باشد.

$$\xrightarrow{x>۰} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{max}=S(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۶}$$

نکته: اگر مجموع مقادیر a و b، همواره مقدار ثابتی باشد، حاصلضرب آن‌ها زمانی بیشینه می‌شود که a و b مقادیر یکسانی داشته باشند. به عبارت دیگر:

$$a+b=T \xrightarrow{a=b=\frac{T}{۲}} (ab)_{max}=(\frac{T}{۲})^۲=\frac{T^۲}{۴}$$

در این سؤال، $x^۲+(۱-x^۲)=۱$ است، بنابراین بیشترین مقدار $S(x)$ در جواب معادلهٔ $x^۲=۱-x^۲$ حاصل می‌شود.

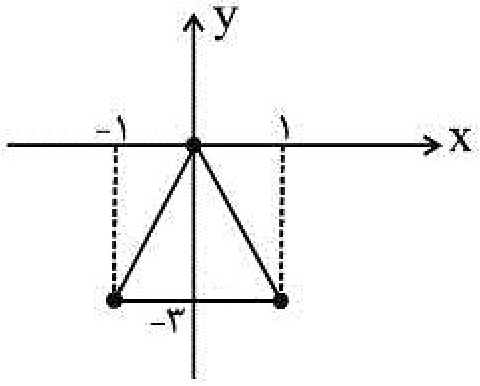
۵) مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4)$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x^2-4)+\sqrt[3]{x^2}(2x)=\frac{8(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست و از طرفی $x=\pm1$، جواب‌های معادله $f'(x)=0$ هستند. بنابراین نقاط $(-1,-3)$، $(0,0)$ و $(1,-3)$ نقاط بحرانی این تابع هستند (مطابق شکل زیر).




مساحت مثلث رسم شده در شکل، برابر $S=\frac{1}{2}(2\times3)=3$ است.

۶) تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2+kx-k}$ فقط یک نقطه بحرانی دارد. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع f، R است.

$$f'(x)=\frac{2x+k}{3\sqrt[3]{(x^2+kx-k)^2}}=0\Rightarrow x=\frac{-k}{2}$$

برای این‌که $x=\frac{-k}{2}$ تنها نقطه بحرانی تابع f باشد، دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد:

حالت اول: مخرج $f'$ ریشه نداشته باشد:

$$\Rightarrow k^2+4k<0\Rightarrow -4<k<0 \quad (1)$$

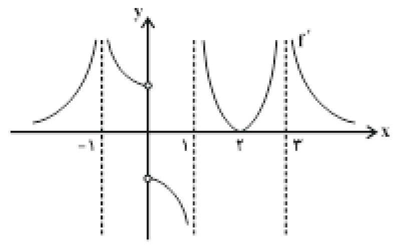
حالت دوم: مخرج ریشه مضاعف $-\frac{k}{2}$ داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta=k^2+4k=0\Rightarrow k=0,-4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} k\in[-4,0]$$

پس k، ۵ مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

۷ اگر نمودار تابع $f'$ به‌صورت زیر باشد، تابع پیوسته f چند ماکزیمم و مینیمم موضعی دارد؟



**۱)** بدون Max _ دو Min
**۲)** یک Max _ بدون Min
**۳)** یک Max _ یک Min
**۴)** یک Max _ دو Min

پاسخ: گزینه ۳

در توابع پیوسته و مشتق‌پذیر، نقاطی که علامت $f'$ در آن تغییر کند، اکسترمم موضعی‌اند. حال اگر از مثبت به منفی تغییر کند ماکزیمم و اگر از منفی به مثبت تغییر کند، مینیمم موضعی محسوب می‌شوند. بنابراین تابع f در $x = ۰$ ماکزیمم و در $x = ۱$ مینیمم موضعی دارد.

۸ مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + ۱ + \sqrt{x^۲ + ۲x}$ کدام است؟

**۱)** صفر **۲)** $-۳$ **۳)** $-۱$ **۴)** $-۲$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$x^۲ + ۲x \ge ۰ \Rightarrow x \le -۲$ یا $x \ge ۰$

$\Rightarrow D_f = (-\infty, -۲] \cup [۰, +\infty)$

$f'(x) = ۱ + \frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x}} = ۰$

با توجه به دامنه تابع و اینکه معادله $f'(x) = ۰$ جواب ندارد، مقدار مینیمم مطلق تابع از بین $f(-۲)$ و $f(۰)$ باید انتخاب شود؛ زیرا برای $x \le -۲$ تابع اکیداً نزولی و برای $x \ge ۰$ اکیداً صعودی است، داریم:

$f(-۲) = -۱ \quad , \quad f(۰) = ۱$

بنابراین می‌نیمم مطلق تابع، $-۱$ است.

۹) تابع $y = [\sqrt{x}] - x$ در بازه(۰,۹) به ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ([ ]: نماد جزء صحیح)

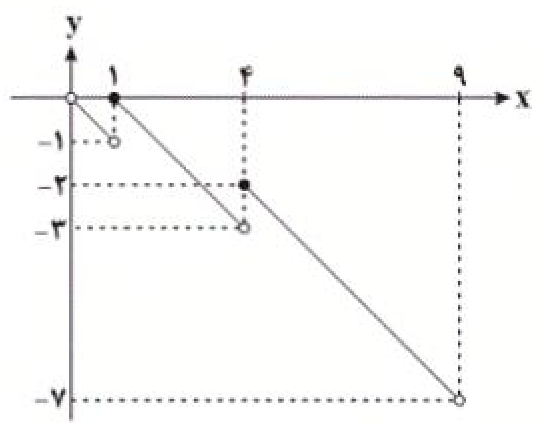
**۱)** ۲، صفر **۲)** ۱، ۱ **۳)** صفر، ۲ **۴)** ۲، ۱

پاسخ: گزینه ۱

برای رسم تابع، آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} -x & 0 < x < 1 \\ 1 - x & 1 \le x < 4 \\ 2 - x & 4 \le x < 9 \end{cases}$$

نمودار دارای ۲ ماکزیمم نسبی در $x = 4$ و $x = 1$ بوده و فاقد مینیمم نسبی است.



۱۰ تابع $f(x) = |x|(x^{۲} - x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

**۱)** ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** اکسترمم نسبی ندارد.

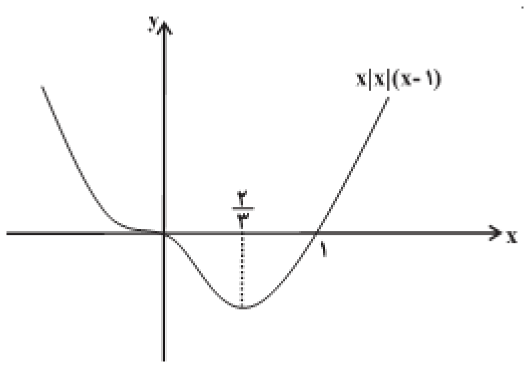
پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} x(x^{۲} - x) & ; \ x \geq ۰ \\ -x(x^{۲} - x) & ; \ x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} - ۲x & ; \ x \geq ۰ \\ -۳x^{۲} + ۲x & ; \ x < ۰ \end{cases}$$

| $x$ | | ۰ | | $\frac{۲}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(۳x-۲)$ | | ۰ | $-$ | ۰ | $+$ |
| $-x(۳x-۲)$ | $-$ | ۰ | | | |
| $f'$ | $-$ | ۰ | $-$ | ۰ | $+$ |
| | $\searrow$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

تابع فقط در $x = \frac{۲}{۳}$ یک مینیمم دارد. نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۱) تابع $[x]+[-x]$ در $f(x)=[x]+[-x]$ در $x=\sqrt{۲}$ کدام ویژگی‌ها را داراست؟ ([ ]: جزء صحیح)

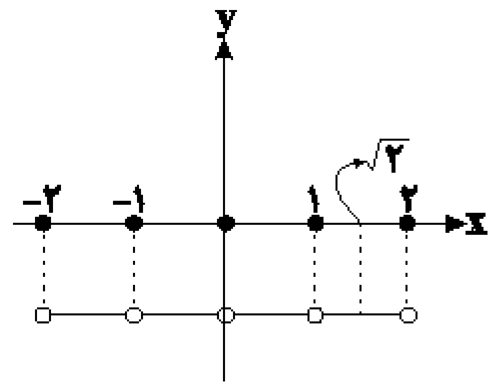
**۱)** فقط مینیمم نسبی دارد.
**۲)** فقط مینیمم نسبی و مطلق دارد.
**۳)** فقط مینیمم مطلق دارد.
**۴)** مینیمم نسبی و مطلق و ماکزیمم نسبی دارد.

---

پاسخ: گزینه ۴

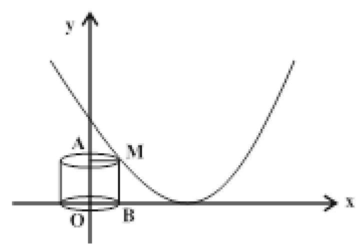
نمودار تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & , x\in Z \\ -۱ & , x\notin Z \end{cases}$$




با توجه به شکل تابع f در $x=\sqrt{۲}$ می‌نیمم مطلق دارد. همچنین چون نمودار در حوالی این نقطه روی یک خط راست قرار دارد، پس در $x=\sqrt{۲}$ هم می‌نیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی دارد.

۱۲) با توجه به شکل زیر، روی منحنی $f(x)=(x-۴)^{۲}$ نقطه‌ی M را مشخص می‌کنیم. مستطیل OAMB را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ی ایجاد شده کدام است؟




**۱)** $۸\pi$
**۲)** $۱۶\pi$
**۳)** $۳۲\pi$
**۴)** $۶۴\pi$

---

پاسخ: گزینه ۲

نقطه‌ی M به مختصات $M(x,(x-۴)^{۲})$ را در نظر می‌گیریم:

حجم استوانه $V=\pi r^{۲}h \Rightarrow V=\pi x^{۲}(۴-x)^{۲}$

$V=\pi(۴x-x^{۲})^{۲} \Rightarrow V'=۲\pi(۴x-x^{۲})(۴-۲x)=۰$

جواب‌های $V'=۰$ برابر ۰ و ۴ و ۲ است که ۰ و ۴ قابل قبول نیست. (در این حالت حجم صفر می‌شود)

$V=\pi x^{۲}(۴-x)^{۲} \xrightarrow{x=۲} V=۱۶\pi$

۱۳) حاصل‌ضرب عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x - |x^2 - 4|$ کدام است؟

۱) ۱۶-

۲) ۲۰

۳) ۲۰-

۴) ۸۰

پاسخ: گزینه ۴

تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 + 4 & ; \quad x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ 2x + x^2 - 4 & ; \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & ; \quad x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ 2 + 2x & ; \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند، پس مشتق وجود ندارد و این نقاط بحرانی‌اند. همچنین داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ غ ق ق} \\ 2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی تابع به‌صورت $(2, 4)$ و $(-2, -4)$ و $(-1, -5)$ خواهد بود که حاصل‌ضرب عرض آن‌ها ۸۰ است.

۱۴) کدام‌یک از توابع زیر فاقد می‌نیمم نسبی است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

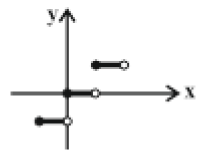
۱) $f(x) = [x]$ ۲) $g(x) = x + [x]$

۳) $h(x) = [x] + [-x]$ ۴) $k(x) = x - [x]$

پاسخ: گزینه ۲

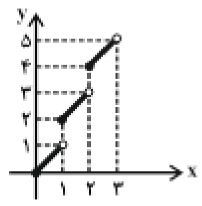
به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $f(x) = [x]$



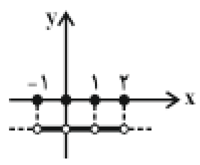

در نقاط غیرصحیح می‌نیمم نسبی دارد.

۲) $g(x) = x + [x]$



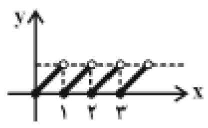

فاقد اکسترمم نسبی است.

۳) $h(x) = [x] + [-x]$




این تابع در نقاط با طول غیرصحیح دارای می‌نیمم نسبی است.

۴) $k(x) = x - [x]$




این تابع در نقاط با طول صحیح دارای می‌نیمم نسبی است.

۱۵) نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲+kx+۴}{x^۲+۲x+۶}$ فقط یک اکسترمم نسبی دارد. آن‌گاه عرض نقطه‌ی اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

$$f'(x)=\frac{(۲x+k)(x^۲+۲x+۶)-(۲x+۲)(x^۲+kx+۴)}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

$$=\frac{(۲-k)x^۲+۴x+(۶k-۸)}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

تابع فقط دارای یک اکسترمم نسبی است، پس صورت می‌بایست فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد یعنی صورت باید درجه‌ی یک باشد، پس $(۲-k)=۰ \Rightarrow k=۲$ است.

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \frac{۴x+۴}{(x^۲+۲x+۶)^۲}=۰ \Rightarrow x=-۱$$

عرض نقطه‌ی اکسترمم : $f(-۱)=\frac{۱-۲+۴}{۱-۲+۶}=\frac{۳}{۵}$

توجه: اگر $\Delta=۰$ شود، آنگاه در ریشه‌ی صورت f تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم نخواهد داشت.

۱۶) به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی $۲x^۳-۳x^۲+m=۰$ دارای سه جواب متمایز است؟

۱) $۰<m<۱$ ۲) $۱<m<۲$

۳) $۲<m<۳$ ۴) $۳<m<۴$

پاسخ: گزینه ۱

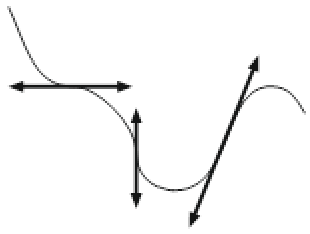
برای این که یک تابع درجه‌ی سوم، سه ریشه‌ی متمایز داشته باشد، اولاً باید دارای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد و ثانیاً حاصل ضرب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن منفی باشد.

فرض کنیم: $f(x)=۲x^۳-۳x^۲+m$ در این صورت خواهیم داشت:

$$f'(x)=۶x^۲-۶x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow f(۰)=m \\ x=۱ \Rightarrow f(۱)=m-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow m(m-۱)<۰ \Rightarrow ۰<m<۱$$

۱۷) شکل زیر مربوط به تابع f است، نمودار f‘ از لحاظ اکسترمم موضعی چگونه است؟



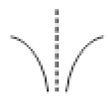
**۱)** دو Max، یک Min
**۲)** یک Max، دو Min
**۳)** دو Max، فاقدMin
**۴)** یک Max، یک Min

---

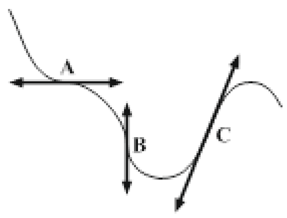
پاسخ: گزینه ۳

دقت کنید که اکسترمم نسبی f‘ همان نقاط عطف f را مشخص می‌کند. نمودارf، سه نقطه‌ی عطف دارد. در نقطه‌ی A چون تقعر f از روبه‌بالا به رو به پایین تغییر می کند، پس f‘ ابتدا صعودی و سپس نزولی است. پس این نقطه ماکزیمم نسبی نمودار f‘ است. به‌همین صورت نقطه‌ی C نیز ماکزیمم

نسبی برای‘f است. اما در نقطه‌ی B چون مماس قائم است، شکل f‘ در همسایگی این  نقطه به‌صورت



می‌شود. پس در کل f‘ دو ماکزیمم نسبی دارد.



۱۸) بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{x^۳-۲}{x^۲+۱}$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

**۱)** ندارد، ۲-
**۲)** $\frac{۶}{۵}$، ۲-
**۳)** بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار ندارد.
**۴)** $\frac{۶}{۵}$، ندارد.

---

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \frac{۳x^۲(x^۲+۱)-۲x(x^۳-۲)}{(x^۲+۱)^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۳x^۴+۳x^۲-۲x^۴+۴x=۰ \Rightarrow x^۴+۳x^۲+۴x=۰$$

$$\Rightarrow x(x^۳+۳x+۴)=۰ \Rightarrow x(x+۱)(x^۲-x+۴)=۰$$

با توجه به آن که دلتای عبارت $x^۲-x+۴$ منفی است، پس ریشه ندارد. بنابراین مشتق فقط به ازای $x=۰$ و $x=-۱$ صفر می‌شود (طول نقاط بحرانی تابع). حال مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و دو سر بازه حساب می‌کنیم:

$$f(۰)=-۲\ ,\ f(-۱)=\frac{-۳}{۲}\ ,\ f(۲)=\frac{۶}{۵}\ ,\ f(-۲)=-۲$$

با توجه به مقادیر بالا، کمترین مقدار تابع ۲- است که در $x=۰$ رخ می‌دهد. از طرفی حداکثر مقادیر بالا در $x=۲$ رخ می‌دهد که در بازه قرار ندارد، پس تابع بیشترین مقدار ندارد.

۱۹) خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۴-x^۳-۳x^۲; x\in(-۱,۳)$ با کم‌ترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

**۱)** ۳-
**۲)** $-\frac{۱}{۲}$
**۳)** ۲
**۴)** ۴

---

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$f'(x)=۴x^۳-۳x^۲-۶x$$

شیب خط مماس همان مشتق تابع است. پس برای کم‌ترین شیب باید مینیمم $f'(x)$ را پیدا کنیم.

$$f''(x)=۱۲x^۲-۶x-۶$$

$$=۶(۲x^۲-x-۱)$$

$$=۶(۲x+۱)(x-۱)$$

| x | | $-\frac{1}{2}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'' | + | | − | | + |
| f' | ↗ | max | ↘ | min | ↗ |

پس برای $x\in(-۱,۳)$، در $x=۱$، کم‌ترین شیب ممکن به‌دست می‌آید:

$$f'(۱)=۴-۳-۶=-۵$$

$$f(۱)=۱-۱-۳=-۳$$

معادله خط مماس: $y-(-۳)=-۵(x-۱)$

$$\Rightarrow y=-۵x+۲$$

$\Rightarrow$ عرض از مبدا $= 2$

۲۰) عدده a را در کدام فاصله در نظر بگیریم تا تابع $x>1$; $f(x)=\frac{ax-2}{x+a-3}$ اکیداً صعودی باشد؟

۱) $(-\infty , 1]$
۲) $(-\infty , 0]$
۳) $[2 , +\infty)$
۴) $(2 , +\infty)$

---

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

اولاً تابع باید خط مجانب قائمی در سمت چپ بازه $(1 , +\infty)$ داشته باشد، تا $y'$ در این بازه تغییر علامت ندهد، پس باید ریشه مخرج در این بازه قرار نداشته باشد:

$x=3-a$ :مجانب قائم $\Rightarrow 3-a\le 1 \Rightarrow a\ge 2 \quad (1)$

ثانیاً تابع در این بازه صعودی اکید است، لذا $y'>0$، پس:

$$y'=\frac{a(a-3)+2}{(x+a-3)^2}>0$$

$$\Rightarrow a^2-3a+2>0 \Rightarrow a>2 \text{ یا } a<1 \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، $a>2$ به‌دست می‌آید.

توجه کنید اگر $a=2$ باشد به تابع ثابت تبدیل می‌شود و نمی‌تواند اکیداً صعودی باشد.

۲۱) سه نقطه به طول‌های $x_1=-\frac{1}{2}$، $x_2=\frac{1}{2}$ و $x_3=\frac{3}{2}$ در تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ به ترتیب چه نقاطی هستند؟ ([ ]: جزء صحیح)

۱) ماکزیمم نسبی، ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی
۲) می‌نیمم نسبی، می‌نیمم نسبی و ماکزیمم نسبی
۳) می‌نیمم نسبی، ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی
۴) ماکزیمم نسبی، می‌نیمم نسبی و ماکزیمم نسبی

---

پاسخ: گزینه ۱

۱۶۱. **گزینهٔ «۱»**

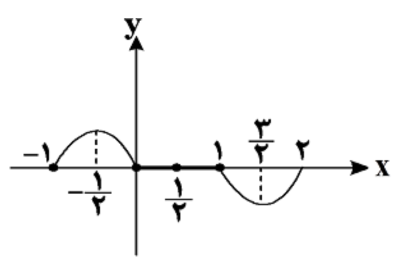
نمودار را در بازهٔ $[-1, 2]$ رسم می‌کنیم:

$-1\le x<0 \Rightarrow y=-\sin\pi x$

$0\le x<1 \Rightarrow y=0$

$1\le x<2 \Rightarrow y=\sin\pi x$

$x=2 \Rightarrow y=0$




با توجه به نمودار، داریم:

$x=-\frac{1}{2}$: ماکزیمم نسبی

$x=\frac{1}{2}$: هم ماکزیمم نسبی و هم می‌نیمم نسبی

$x=\frac{3}{2}$: می‌نیمم نسبی

۲۲) تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]\sin\pi x$ روی بازه‌ی $[-۱ , ۲]$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) بی‌شمار

---

پاسخ: گزینه ۴

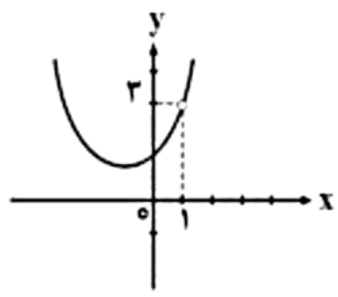
گزینهٔ «۴»

تابع را ضابطه‌بندی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin\pi x & , \quad -۱ \le x < ۰ \\ ۰ & , \quad ۰ \le x < ۱ \\ \sin\pi x & , \quad ۱ \le x < ۲ \\ ۰ & , \quad x = ۲ \end{cases}$$

تابع در بازه‌ی $[۰ , ۱[$، به یک خط افقی $y = ۰$ تبدیل می‌شود و بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(۰ , ۱)$ دارد.

۲۳) شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^۳+b}{x+c}$ را نشان می‌دهد. مینیمم مطلق تابع f کدام است؟




۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

---

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$x = ۱$ در دامنه نیست پس ریشهٔ مخرج است: $۱ + c = ۰ \Rightarrow c = -۱$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{ax^۳+b}{x-۱} = ۳ \Rightarrow a(۱)^۳ + b = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \Rightarrow b = -a$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{ax^۳-a}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{a\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{x-۱}} = ۳a = ۳$$

$$\Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$f(x) = \frac{x^۳-۱}{x-۱} = x^۲ + x + ۱ \; ; \; x \ne ۱$$

رأس سهمی به معادلهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ :

$$S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{۲a} = -\frac{۱}{۲} \\ f(\frac{-b}{۲a}) = f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۴} \end{array} \right.$$

۲۴) به ازای کدام مقدار a، منحنی تابع $f(x) = ax^3 - 6x^2 + x + 1$ نقطهٔ بحرانی دارد، اما فاقد اکسترمم نسبی است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) ۱۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 12x + 1$$

باید $f'(x)$ ریشه داشته باشد، اما تغییر علامت ندهد، یعنی مشتق ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + 1 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه مضاعف}} 144 - 4(3a) = 0$$

$$12a = 144 \Rightarrow a = 12$$

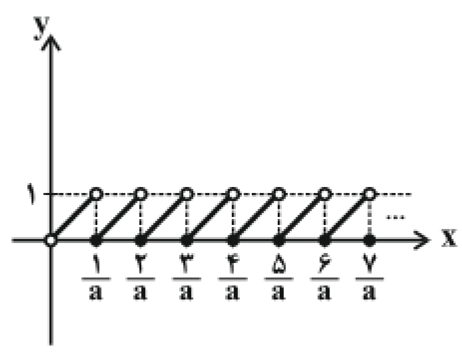
۲۵) تابع $f(x) = ax - [ax]$ در بازه $(0,a)$، ۵ نقطه بحرانی دارد. بیشترین مقدار a کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\sqrt{6}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

نمودار تابع f از انقباض یا انبساط افقی نمودار تابع $y = x - [x]$ با ضریب a به‌دست می‌آید؛ پس نمودار آن به‌صورت زیر می‌باشد:




با توجه به نمودار بالا، اگر تابع f در بازه $(0,a)$، ۵ نقطه بحرانی داشته باشد، باید $\frac{5}{a} < a \le \frac{6}{a}$ باشد:

$$\xrightarrow{a>0} 5 < a^2 < 6 \Rightarrow \sqrt{5} < a \le \sqrt{6}$$

پس بیشترین مقدار a برابر $\sqrt{6}$ است.