(۱) بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{x^۳-۲}{x^۲+۱}$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) ندارد، ۲-
۲) $\frac{۶}{۵}$، ۲-
۳) بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار ندارد.
۴) $\frac{۶}{۵}$، ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \frac{۳x^۲(x^۲+۱)-۲x(x^۳-۲)}{(x^۲+۱)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۳x^۴+۳x^۲-۲x^۴+۴x=۰ \Rightarrow x^۴+۳x^۲+۴x=۰$$

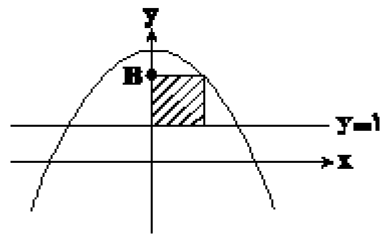
$$\Rightarrow x(x^۳+۳x+۴)=۰ \Rightarrow x(x+۱)(x^۲-x+۴)=۰$$

با توجه به آن که دلتای عبارت $x^۲-x+۴$ منفی است، پس ریشه ندارد. بنابراین مشتق فقط به ازای $x=۰$ و $x=-۱$ صفر می‌شود (طول نقاط بحرانی تابع). حال مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و دو سر بازه حساب می‌کنیم:

$$f(۰)=-۲\ ,\ f(-۱)=\frac{-۳}{۲}\ ,\ f(۲)=\frac{۶}{۵}\ ,\ f(-۲)=-۲$$

با توجه به مقادیر بالا، کمترین مقدار تابع ۲- است که در $x=۰$ رخ می‌دهد. از طرفی حداکثر مقادیر بالا در $x=۲$ رخ می‌دهد که در بازه قرار ندارد، پس تابع بیشترین مقدار ندارد.

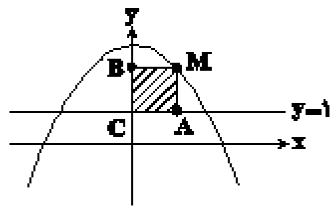
۲) مطابق شکل زیر، دو ضلع مستطیل هاشورخورده روی خطوط $y=۱$ و $x=۰$ و یک رأس مستطیل روی سهمی $y=۷-x^۲$ است. اگر مساحت این مستطیل ماکزیمم مقدار ممکن باشد، عرض نقطهٔ B کدام است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴/۵
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»



رأس مستطیل را که روی سهمی قرار دارد، M می‌نامیم:

پس مختصات نقطهٔ M به‌صورت $(x, ۷-x^۲)$ است و نقطهٔ B برابر با عرض نقطهٔ M است.

$$S = CA \times CB = x \times (۷ - x^۲ - ۱),\ x > ۰$$

$$\Rightarrow S = x(۶ - x^۲) = ۶x - x^۳ \Rightarrow S' = ۶ - ۳x^۲ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow y_B = ۷ - (\sqrt{۲})^۲ = ۵$$

۳) مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x-۱|\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) $\{۱, -۱, \frac{۳}{۵}\}$
۲) $\{۱, -\frac{۳}{۵}\}$
۳) $\{-۱, \frac{۳}{۵}\}$
۴) $\{۱, -۱, -\frac{۳}{۵}\}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با توجه به ضابطهٔ تابع، مشخص است که $x=۱$ و $x=-۱$ نقاط بحرانی تابع f هستند. برای بررسی دقیق‌تر باید ضابطهٔ تابع را بازنویسی کنیم و از آن مشتق بگیریم:

$$f(x) = \pm(x-۱)\sqrt[۳]{(x-۱)(x+۱)} = \pm(x-۱)^{\frac{۴}{۳}}(x+۱)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \pm\left(\frac{۴}{۳}(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}(x+۱)^{\frac{۱}{۳}} + \frac{۱}{۳}(x-۱)^{\frac{۴}{۳}}(x+۱)^{\frac{-۲}{۳}}\right)$$

$$= \pm\frac{۱}{۳}(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}(x+۱)^{\frac{-۲}{۳}}\left(۴(x+۱)+(x-۱)\right) = \pm\frac{(۵x+۳)\sqrt[۳]{x-۱}}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}$$

بنابراین تابع در $x=-۱$ مشتق ندارد و مشتق آن در $x=۱$ و $x=-\frac{۳}{۵}$ صفر می‌شود، پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی آن عبارتند از $\{۱, -۱, -\frac{۳}{۵}\}$.

④ فاصله دو نقطه اکسترمم نسبی متوالی نمودار تابع $f(x) = ۱+x^۲+\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

دامنه تابع f بازه $[-۱,۱]$ است و مشتق آن به صورت زیر است:

$$f'(x) = ۲x - \frac{۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}} = x(۲ - \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}})$$

ریشه‌های ساده f'، طول نقاط اکسترمم هستند، پس داریم:

$$f'(x) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ \sqrt{۱-x^۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

حال جدول تغییرات رفتار تابع به صورت زیر است:

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
f'		+	0	−	0	+	0	−	
f	2	↗	max	↘	min	↗	max	↘	2

پس نقاط $A(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۹}{۴})$ و $C(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۹}{۴})$ ماکزیمم‌های نسبی هستند و نقطه $B(۰,۲)$ نیز مینیمم نسبی نمودار تابع است.

فاصله‌های AB و BC برابراند و داریم:

$$AB = BC = \sqrt{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۴})^۲} = \sqrt{\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$$

⑤ نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه $(-۱ , ۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲} , \frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴} , \frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴} , ۰ , \frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲} , ۰ , \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$y = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}} \quad , \quad x \in (-۱ , ۱)$$

$$y' = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰ \Rightarrow y' = \frac{۲}{۳}(۲\sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}) = ۰$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲}{۳}(\frac{۲\sqrt[۳]{x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y' = ۰ \Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۰ \\ y' \to \infty \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

با حل معادله $۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۰$، خواهیم داشت:

$$۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow ۸x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

بنابراین نقاط $\frac{\sqrt{۲}}{۴} , ۰ , -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$، طول‌های نقاط بحرانی تابع هستند.

۶) عدد a را در کدام فاصله در نظر بگیریم تا تابع $x > ۱$ ؛ $f(x) = \frac{ax-۲}{x+a-۳}$ اکیداً صعودی باشد؟

۱) $(-\infty , ۱]$ ۲) $(-\infty , ۰]$

۳) $[۲ , +\infty)$ ۴) $(۲ , +\infty)$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

اولاً تابع باید خط مجانب قائمی در سمت چپ بازه $(۱ , +\infty)$ داشته باشد، تا y' در این بازه تغییر علامت ندهد، پس باید ریشه مخرج در این بازه قرار نداشته باشد:

$x = ۳ - a$:مجانب قائم $\Rightarrow ۳ - a \leq ۱ \Rightarrow a \geq ۲ \quad (۱)$

ثانیاً تابع در این بازه صعودی اکید است، لذا $y' > ۰$، پس:

$$y' = \frac{a(a-۳)+۲}{(x+a-۳)^{۲}} > ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۳a + ۲ > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < ۱ \quad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، $a > ۲$ به‌دست می‌آید.

توجه کنید اگر $a = ۲$ باشد به تابع ثابت تبدیل می‌شود و نمی‌تواند اکیداً صعودی باشد.

۷) اگر نقاط بحرانی تابع $f(x) = ax^۲(x - ۳)^۴$ سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$f'(x) = ۲ax(x - ۳)^۴ + ۴ax^۲(x - ۳)^۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲ax(x - ۳)^۳(x - ۳ + ۲x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$

پس نقاط $A(۰ , ۰)$، $B(۳ , ۰)$ و $C(۱ , ۱۶a)$ سه رأس مثلث هستند و برای قائم‌الزاویه‌بودن، از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$BC^۲ + AC^۲ = AB^۲$$

$$\begin{cases} BC = \sqrt{۴ + ۲۵۶a^۲} \\ AC = \sqrt{۱ + ۲۵۶a^۲} \\ AB = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴ + ۲۵۶a^۲ + ۱ + ۲۵۶a^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow a^۲ = \frac{۴}{۵۱۲} = \frac{۱}{۱۲۸} \xrightarrow{a > ۰} a = \frac{۱}{۸\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$$

⑧ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]\sin\pi x$ روی بازه‌ی $[-1 , 2]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴

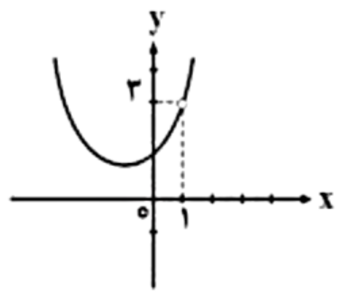
گزینهٔ «۴»

تابع را ضابطه‌بندی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin\pi x & , \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \le x < 1 \\ \sin\pi x & , \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

تابع در بازه‌ی $[0 , 1[$، به یک خط افقی $y = 0$ تبدیل می‌شود و بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(0 , 1)$ دارد.

⑨ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^3+b}{x+c}$ را نشان می‌دهد. مینیمم مطلق تابع f کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$x = 1$ در دامنه نیست پس ریشهٔ مخرج است: $1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^3+b}{x-1} = 3 \Rightarrow a(1)^3 + b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^3-a}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{a\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = 3a = 3$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1 \; ; \; x \neq 1$$

رأس سهمی به معادلهٔ $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ f(\frac{-b}{2a}) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

(۱۰) به ازای کدام مقدار a، منحنی تابع $f(x) = ax^3 - 6x^2 + x + 1$ نقطهٔ بحرانی دارد، اما فاقد اکسترمم نسبی است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) ۱۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 12x + 1$$

باید $f'(x)$ ریشه داشته باشد، اما تغییر علامت ندهد، یعنی مشتق ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + 1 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه مضاعف}} 144 - 4(3a) = 0$$

$$12a = 144 \Rightarrow a = 12$$

(۱۱) تابع $f(x) = |mx^2 - 2mx + 3|$ تنها یک نقطه بحرانی دارد. حدود m کدام است؟

۱) $-1 < m < 3$ ۲) $0 < m \le 3$

۳) $0 \le m \le 3$ ۴) $-3 < m < 1$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای اینکه نمودار تابع f فقط یک نقطه بحرانی داشته باشد، لازم است سهمی $y = mx^2 - 2mx + 3$ حداکثر یک نقطه برخورد با محور xها داشته باشد. پس Δی آن باید نامثبت باشد:

$$\Delta = 4m^2 - 12m = 4m(m - 3) \le 0$$

اما به ازای $m = 0$، تابع f یک تابع ثابت خواهد شد و بی‌شمار نقطه بحرانی خواهد داشت، $m = 0$ غیر قابل قبول است.

(۱۲) اگر نقطه $A(2,1)$ یکی از اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، عرض از مبدأ خط واصل اکسترمم‌های این تابع کدام است؟

۱) -3 ۲) صفر ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

نقطه $A(2,1)$ روی تابع $f(x)$ قرار دارد. پس باید در معادله آن صدق کند:

$$A(2,1) \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ d = 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

نقاط $A(2,1)$ و $B(0,5)$ روی خط واصل اکسترمم‌های این تابع قرار دارند. روشن است که عرض از مبدأ این خط برابر ۵ می‌باشد.

۱۳) نسبت ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{۴ - x} + \sqrt{x}$ به مینیمم مطلق آن کدام است؟

۱) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دامنه تابع بازه $[۰,۴]$ است و تابع غیر از نقاط ابتدا و انتهای بازه، در دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(۰) = f(۴) = ۲ \quad (۱)$$

حال نقاط بحرانی درون بازه $(۰,۴)$ را می‌یابیم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۱}{۲\sqrt{۴-x}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} \sqrt{x} = \sqrt{۴ - x} \Rightarrow x = ۴ - x \Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow f(۲) = ۲\sqrt{۲} \quad (۲)$$

بنابراین ماکزیمم مطلق برابر $۲\sqrt{۲}$ و مینیمم مطلق برابر ۲ است.

$$\Rightarrow \frac{f_{max}}{f_{min}} = \sqrt{۲}$$

۱۴) مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}(x^۲ - ۱)$ کدام است؟

۱) $\{\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}\}$

۲) $\{\frac{۱}{۲}, ۰, -\frac{۱}{۲}\}$

۳) $\{۰, \frac{۱}{۲}\}$

۴) $\{-\frac{۱}{۲}, ۰\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(x) = x^{\frac{۲}{۳}}(x^۲ - ۱) = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

از $f'(x) = ۰$ داریم:

$$\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$$

از طرفی $f'(x)$ در $x = ۰$ تعریف نشده است، بنابراین مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع عبارت است از: $\{-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\}$

⑮ اگر $A(۲, \frac{۲۰}{۳})$ نقطه مینیمم تابع $f(x) = ax^۳ + \frac{b}{x^۲}$ باشد، b کدام است؟

۱) ۱۶　　۲) ۸　　۳) $\frac{۸}{۳}$　　۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(۲) = \frac{۲۰}{۳} \Rightarrow ۸a + \frac{b}{۴} = \frac{۲۰}{۳}$$

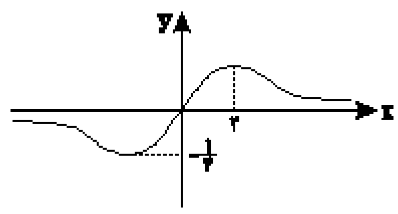
$$f'(۲) = ۰ \Rightarrow f'(x) = ۳ax^۲ - \frac{۲b}{x^۳} \Rightarrow f'(۲) = ۱۲a - \frac{b}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۲a = \frac{b}{۴} \Rightarrow b = ۴۸a$$

$$۸a + \frac{b}{۴} = \frac{۲۰}{۳} \Rightarrow ۸a + ۱۲a = \frac{۲۰}{۳} \Rightarrow ۲۰a = \frac{۲۰}{۳}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = ۱۶$$

⑯ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax}{x^۲+b}$ به شکل مقابل باشد، حاصل ab کدام است؟



۱) ۴
۲) -۴
۳) -۲
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(x) = \frac{ax}{x^۲+b} \Rightarrow f'(x) = \frac{(a)(x^۲+b)-(ax)(۲x)}{(x^۲+b)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ax^۲ + ab - ۲ax^۲ = ۰ \Rightarrow ax^۲ - ab = ۰ \xrightarrow{a \neq ۰}$$

$$x^۲ = b \Rightarrow x = \pm\sqrt{b}$$

با توجه به آن‌که طول نقطه بحرانی برابر است با $x = ۲$ داریم:

$$\sqrt{b} = ۲ \Rightarrow b = ۴$$

با توجه به آن‌که $x = \pm۲$ طول نقاط بحرانی است، از نمودار می‌فهمیم که $(-۲, -\frac{۱}{۴})$ در تابع صدق می‌کند:

$$f(-۲) = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{۱}{۴} = \frac{-۲a}{۴+۴} \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow ab = ۴$$

۱۷) نمودار تابع $f(x) = ۳x^۴ + ۴x^۳ - ۱۲x^۲$ در کدام طول بر محور x مماس است؟

۱) ۲-

۲) صفر

۳) ۱

۴) نمودار تابع بر محور x مماس نیست.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f'(x) = ۱۲x^۳ + ۱۲x^۲ - ۲۴x = ۰ \Rightarrow ۱۲x(x^۲ + x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = +۱ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow$

	−2		0		1	
−		+		−		+

نقاط $(-۲, -۳۲)$، $(۰, ۰)$ و $(۱, -۵)$ اکسترمم نسبی هستند. چون در $x = ۰$ مقدار تابع و مشتق برابر صفر می‌شود، پس در $x = ۰$ بر محور مماس است.

۱۸) حداکثر محیط مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر $۳\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۶

۲) $۳(۲ + \sqrt{۲})$

۳) $۳(۱ + \sqrt{۲})$

۴) $۳ + ۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اضلاع مثلث را x و y درنظر می‌گیریم:

$$P = x + y + ۳\sqrt{۲}$$

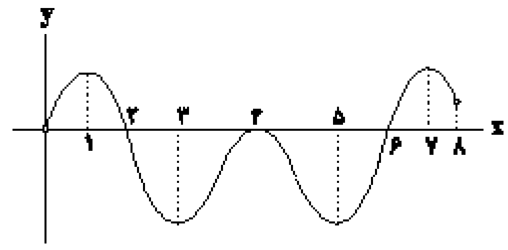
$$x^۲ + y^۲ = ۱۸ \Rightarrow y = \sqrt{۱۸ - x^۲}$$

$$P = x + \sqrt{۱۸ - x^۲} + ۳\sqrt{۲} \Rightarrow P' = ۱ - \frac{۲x}{۲\sqrt{۱۸ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{x}{\sqrt{۱۸ - x^۲}} \Rightarrow \sqrt{۱۸ - x^۲} = x \Rightarrow ۱۸ - x^۲ = x^۲ \xrightarrow{x>۰}$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow P = ۳ + ۳ + ۳\sqrt{۲} = ۳(۲ + \sqrt{۲})$$

۱۹) نمودار مشتق تابع f به‌صورت زیر است. این تابع چند Max نسبی دارد؟



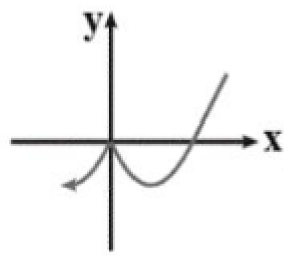
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

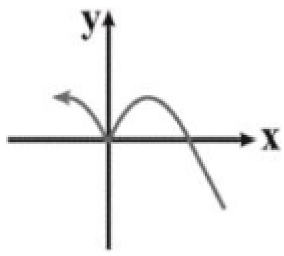
پاسخ: گزینه ۱

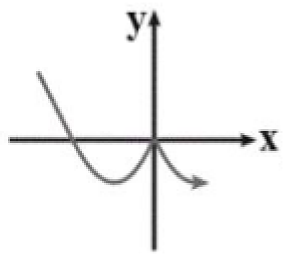
گزینه «۱»

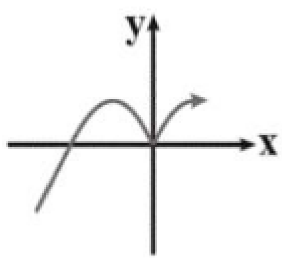
در نقطه Max نسبی در توابع مشتق‌پذیر حتماً $f'=0$ است و نیز در قبل از آن نقطه $f'>0$ و در بعد از آن $f'<0$ است، که فقط در x=۲ این اتفاق می‌افتد.

۲۰) نمودار تابع $y = 3\sqrt[3]{x^5} - 15\sqrt[3]{x^2}$ شبیه کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

کافی است اکسترمم‌های نسبی تابع را بیابیم.

$$y' = 3\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right) - 15\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{10}{\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-10}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\begin{cases} 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

x		۰		۲	
f′	+		−		+
	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس باید در x = ۰، ماکزیمم نسبی و در x = ۲، مینیمم نسبی داشته باشد.

۲۱) برد تابع $y = \frac{۵}{۳x^۴ - ۴x^۳ + ۳}$ کدام است؟(عبارت مخرج کسر ریشه ندارد.)

۱) $(۰, \frac{۵}{۲})$ ۲) $[۰, \frac{۵}{۲}]$ ۳) $(۰, \frac{۵}{۲}]$ ۴) $[۰, \frac{۵}{۲})$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

در این تابع چون صورت کسر عدد ثابتی است، پس کافی است برد مخرج کسر محاسبه شود؛ سپس برد تابع y را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳ + ۳ \Rightarrow f'(x) = ۱۲x^۳ - ۱۲x^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۲x^۲(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x		0		1	
f′	−	0	−	0	+
f	↘		↘	min	↗

کم‌ترین مقدار تابع f به‌ازای $x = ۱$ به‌دست می‌آید، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(۱) = ۲$$

حال داریم:

$$f(x) \geq ۲ \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{معکوس}} ۰ < \frac{۱}{f(x)} \leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۵} ۰ < \frac{۵}{۳x^۴ - ۴x^۳ + ۳} \leq \frac{۵}{۲}$$

برد تابع y: $(۰, \frac{۵}{۲}]$

۲۲) اگر $A(۱,۲)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + cx$ باشد، طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$، مینیمم ۲) $-\frac{۵}{۳}$، مینیمم ۳) $\frac{۵}{۳}$، ماکزیمم ۴) $-\frac{۵}{۳}$، ماکزیمم

پاسخ: گزینه ۱

نقطه $A(۱,۲)$، اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + cx$ است، پس:

$$\begin{cases} f(۱) = ۱ + b + c = ۲ \Rightarrow b + c = ۱ \quad (۱) \\ f'(۱) = ۳x^۲ + ۲bx + c|_{x=۱} = ۳ + ۲b + c = ۰ \Rightarrow ۲b + c = -۳ \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} b = -۴, c = ۵$$

پس f' به صورت $f'(x) = ۳x^۲ - ۸x + ۵$ خواهد بود که صفرهای آن ۱ و $\frac{۵}{۳}$ است. داریم:

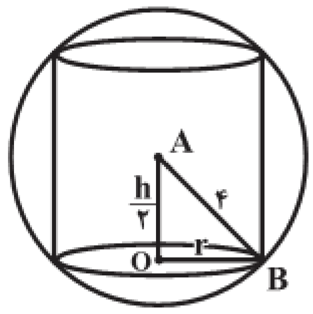
		۱		$\frac{۵}{۳}$	
f′	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

بنابراین طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر تابع f به ترتیب $x = \frac{۵}{۳}$ و مینیمم است.

۲۳) استوانه‌ای به شعاع r، درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده‌است. به ازای کدام مقدار r، حجم استوانه بیش‌ترین مقدار خود را دارد؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲



ارتفاع استوانه را h در نظر می‌گیریم. مطابق شکل داریم:

$$\overset{\Delta}{OAB}: r^۲ + \left(\frac{h}{۲}\right)^۲ = ۴^۲ \Rightarrow r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = ۱۶ \Rightarrow r^۲ = ۱۶ - \frac{h^۲}{۴} \quad (۱)$$

$$V = \pi r^۲ \times h \xrightarrow{(۱)} V_{(h)} = \pi \times h \times \left(۱۶ - \frac{h^۲}{۴}\right) = \frac{-\pi h^۳}{۴} + ۱۶\pi h$$

$$\Rightarrow V'_{(h)} = \frac{-۳\pi h^۲}{۴} + ۱۶\pi$$

$$V'_{(h)} = ۰ \Rightarrow \frac{-۳\pi h^۲}{۴} + ۱۶\pi = ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۴}h^۲ = ۱۶ \xrightarrow{h>۰} h = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

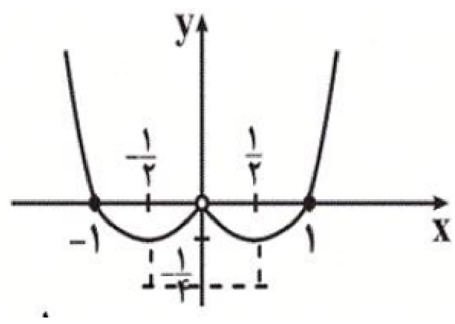
$$\xrightarrow{(۱)} r^۲ = ۱۶ - \frac{h^۲}{۴} = ۱۶ - \frac{۶۴}{۱۲} = \frac{۱۲۸}{۱۲} = \frac{۳۲}{۳} \Rightarrow r = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$$

۲۴) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - |x| & x \neq ۰ \\ a & x = ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ مینیمم نسبی داشته باشد ولی مینیمم مطلق نداشته باشد، آن‌گاه محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $a > ۰$ ۳) $-\frac{۱}{۲} \leq a < ۰$ ۴) $-\frac{۱}{۴} < a < ۰$

پاسخ: گزینه ۴

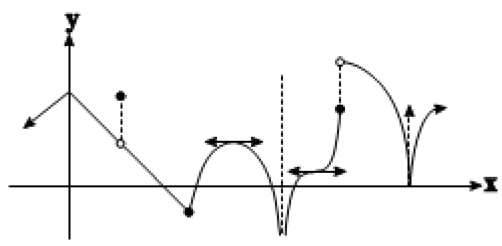
گزینهٔ «۴»



$$y = \begin{cases} x^۲ - x & x > ۰ \\ a & x = ۰ \\ x^۲ + x & x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به شکل بالا، اگر $-\frac{۱}{۴} < a < ۰$ باشد $x = ۰$ می‌نیمم نسبی است ولی می‌نیمم مطلق نیست.

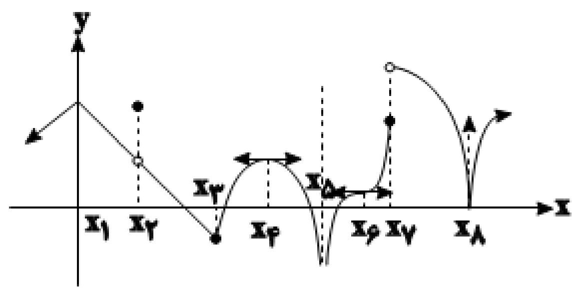
۲۵ شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x+2)$ را نمایش می‌دهد. تعداد نقاط بحرانی تابع $y = f(x)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم نقاط بحرانی یک تابع، نقاطی از دامنه تابع هستند که مشتق تابع در آن‌ها یا صفر است یا موجود نیست. از طرفی انتقال افقی تأثیری بر روی تعداد نقاط بحرانی تابع ندارد، پس کافی است نقاط بحرانی همین نمودار داده‌شده را بیابیم.



x_1, x_3: نقطه گوشه‌ای $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

x_2, x_7: ناپیوسته $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

x_4, x_6: دارای خط مماس افقی $\Leftarrow$ f' در آن‌ها برابر صفر است.

x_8: دارای خط مماس قائم $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

ضمناً دقت کنید که x_5 متعلق به دامنه و بحرانی نیست. پس تعداد نقاط بحرانی ۷ است:

$x_8, x_7, x_6, x_4, x_3, x_2, x_1$