مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون B۲ کاربردمشتق**

مرکز مشاوره تحصیلی
راه روشن

---

۱) تابع $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}$ در $x=a$ دارای نقطه بحرانی و مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) $x=0$ ۲) $x=1$ ۳) $x=\frac{1}{2}$ ۴) $x=-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1)-\sqrt[3]{x}}{(x-1)^2}$$

حال مخرج مشترک می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{x-1-3x}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(x-1)^2}=\frac{-1-2x}{3\sqrt[3]{x^2}(x-1)^2}=0 \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} & \text{ق ق} \\ x=0 & \text{ق ق} \\ x=1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تابع در $x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ نقطه بحرانی دارد ولی $x=1$ در دامنه تابع نیست و نمی‌تواند بحرانی باشد. از طرفی تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست، چون مخرج تابع مشتق آن صفر می‌شود. بنابراین در $x=-\frac{1}{2}$ دارای نقطه بحرانی بوده و مشتق‌پذیر هم هست.

۲) مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $y=\frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) $\{0,1\}$ ۲) $\{-1,0\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{-1,0,1\}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنهٔ تعریف هستند که در آن‌ها مشتق تابع برابر صفر است یا وجود ندارد.

دامنهٔ تعریف این تابع، مجموعه اعداد حقیقی یعنی $D_f=(-\infty,+\infty)$ است. $y=\frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$y'=\frac{1}{3}x^{\frac{11}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^4-1) \Rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(\frac{x^4-1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\text{صورت}=0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^2+1=0 \Rightarrow \text{غ .ق .ق} \end{cases}$$

$$\text{مخرج}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$$

در $x=\pm 1$ مشتق صفر است و در $x=0$ مشتق وجود ندارد. پس مجموعه طول نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{-1,0,1\}$

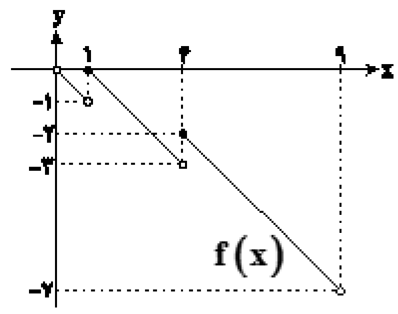
۳) تابع $f(x) = [\sqrt{x}] - x$ در بازه$(0,9)$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲، صفر **۲)** ۱، ۱ **۳)** صفر، ۲ **۴)** ۲، ۱

پاسخ: گزینه ۱

می‌توان تابع را در بازه مذکور به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; 0 < x < 1 \\ 1 - x & ; 1 \le x < 4 \\ 2 - x & ; 4 \le x < 9 \end{cases}$$



نمودار دارای ۲ ماکزیمم نسبی در $x = 4$ و $x = 1$ و فاقد مینیمم نسبی است.

۴) اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ باشد، به‌ازای چند مقدار صحیح k، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

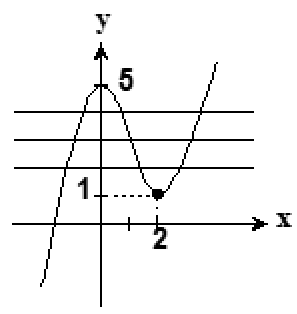
گزینه «۳»

خط $y = k$ باید بین ماکزیمم و مینیمم نسبی قرار گیرد. پس لازم است عرض نقاط اکسترمم $f(x)$را به‌دست بیاوریم. $f(x)$ مشتق‌پذیر است. مشتق تابع $f(x)$ را به‌دست آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال عرض نقاط اکسترمم را با جایگذاری در معادله اصلی $f(x)$ به دست می آوریم :

$$f(0) = 5 \, , \, f(2) = 1 \xrightarrow{\text{نمودار}}$$



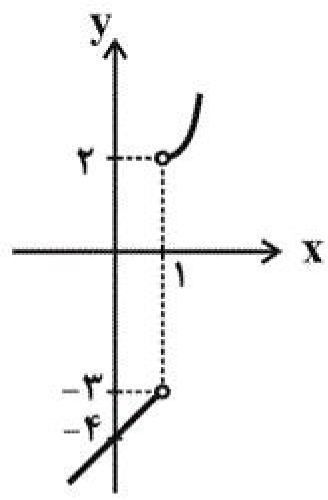
همانطور که می‌بینید به‌ازای سه مقدار صحیح $(k = 2,3,4)$، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است.

⑤ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲+۲ & ;x>۱\\ m & ;x=۱\\ x-۴ & ;x<۱\end{cases}$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $-۳\le m\le ۲$
۲) $-۴<m<۲$
۳) $m\le -۳$ یا $m\ge ۲$
۴) $m<-۳$ یا $m>۲$

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع f بدون در نظر گرفتن نقطه $(۱,m)$ به‌صورت زیر است:



حال اگر نقطه $(۱,m)$ بالاتر از نقطه $(۱,۲)$ باشد، تابع ماکزیمم نسبی و اگر پایین‌تر از نقطه $(۱,-۳)$ باشد، مینیمم نسبی دارد. اما اگر نقطه $(۱,m)$ بین این دو نقطه یا روی یکی از آن‌ها باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$\Rightarrow -۳\le m\le ۲$

⑥ اگر شیب خط گذرنده از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+a^۲}$ برابر ۶ باشد، a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ $(a\ne ۰)$

۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$
۲) $\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$
۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$
۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینه ۱

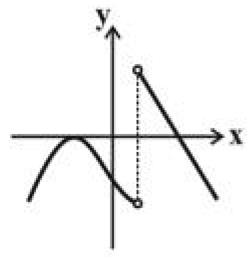
$f'(x)=\frac{a^۲-x^۲}{(x^۲+a^۲)^۲}$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} & -\infty & & -|a| & & |a| & & +\infty \\ f' & & - & & + & & - & \\ f & & \searrow & \min\ -\frac{۱}{۲|a|} & \nearrow & \max\ \frac{۱}{۲|a|} & \searrow & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\max:\left(|a|,\frac{۱}{۲|a|}\right)\\ \min:\left(-|a|,-\frac{۱}{۲|a|}\right)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{\frac{۱}{۲|a|}+\frac{۱}{۲|a|}}{|a|+|a|}=\frac{۱}{۲a^۲}=۶$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

۷ شکل مقابل نمودار مشتق تابع f را نشان می‌دهد ($D_f = R$). نمودار تابع f دارای:



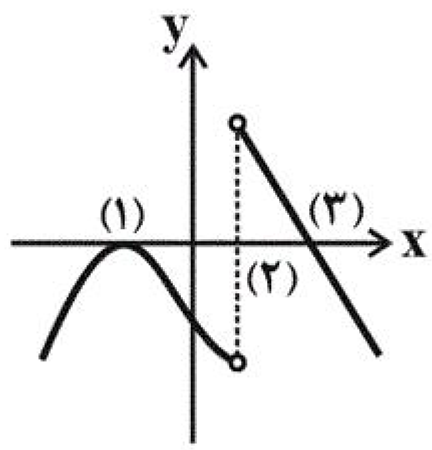
۱) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

۲) یک مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

۳) یک مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

۴) دو مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

پاسخ: گزینه ۲



در نقطه (۱) مشتق تابع صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم نیست.

در نقطه (۲) مشتق به یک باره از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه مینیمم نسبی و همین‌طور گوشه‌ای است.

در نقطه (۳) مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.

۸) اگر مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x(x^{۲} - ۳) + k$ در بازه $[۰,۳]$ قرینه هم باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۸

۲) ۸-

۳) ۱۰

۴) ۱۰-

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[۰,۳]$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^{۳} - ۳x + k \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۳$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^{۲} - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

فقط $x = ۱$ در این بازه قرار دارد.

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه حساب می‌کنیم:

$f(۰) = k$ و $f(۱) = k - ۲$ ، $f(۳) = ۱۸ + k$

پس ماکزیمم و مینیمم مطلق f در این بازه به‌ترتیب $k + ۱۸$ و $k - ۲$ هستند.

$$\xrightarrow{\text{قرینه همدیگرند.}} k - ۲ + k + ۱۸ = ۰ \Rightarrow k = -۸$$

۹) اگر نقطه $A\left(-۱,\frac{۱}{۲}\right)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۳}$ باشد، طول و نوع نقطه اکسترمم نسبی دیگر تابع f کدام است؟

۱) ۱، ماکزیمم
۲) ۱، مینیمم
۳) ۳، ماکزیمم
۴) ۳، مینیمم

پاسخ: گزینه ۴

$$f'(x)=\frac{a(x^۲+۳)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۳)^۲}$$

چون $x=-۱$، طول نقطه اکسترمم نسبی f است، پس 'f در این نقطه صفر است.

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow ۴a-۲a+۲b=۰\Rightarrow a+b=۰ \quad (۱)$$

$$f(-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{-a+b}{۱+۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -a+b=۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} b=۱, a=-۱$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-(x^۲+۳)-۲x(-x+۱)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{x^۲-۲x-۳}{(x^۲+۳)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ ۳$$

'f را تعیین علامت می‌کنیم:

x		−۱		۳	
f'	+	۰	−	۰	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس طول نقطه اکسترمم نسبی دیگر f، $x=۳$ و نوع آن مینیمم است.

۱۰) نمودار تابع $f(x)=\frac{mx^۳}{۳}+\frac{(m+۱)x^۲}{۲}+mx+m$ اکیداً صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $R-\left(-\frac{۱}{۳},۱\right)$
۲) $\left[-\frac{۱}{۳},۱\right]$
۳) $[۱,+\infty)$
۴) $(-\infty,۱)$

پاسخ: گزینه ۳

تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)$ اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر $f'(x)\geq ۰$ باشد، به شرط آنکه نقاطی که در آن 'f صفر است، تشکیل پاره‌خط ندهند.

$$f'(x)=mx^۲+(m+۱)x+m\geq ۰$$

برای اینکه نامساوی فوق همواره صحیح باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m>۰ \quad (۱) \\ \Delta\leq ۰\Rightarrow (m+۱)^۲-۴m^۲\leq ۰\Rightarrow -۳m^۲+۲m+۱\leq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-۱)(۳m+۱)\geq ۰\Rightarrow \begin{cases} m\geq ۱ \\ m\leq -\frac{۱}{۳} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} m\in[۱,+\infty)$$

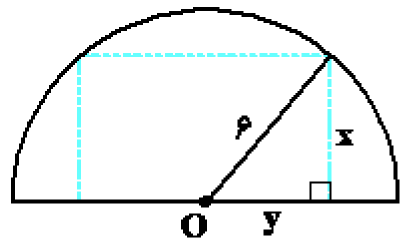
۱۱) بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

شکل مسئله به‌صورت زیر است:



راه حل اول: عرض مستطیل x و طول آن ۲y است پس:

$$S = ۲xy$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس رابطهٔ بین x و y به صورت زیر است:

$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$

تابع مساحت مستطیل را برحسب x بازنویسی می‌کنیم و از آن مشتق گرفته و نقطهٔ بحرانی آن را می‌یابیم:

$$S(x) = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲} \Rightarrow S'(x) = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{(-۲x)\times ۲x}{۲\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

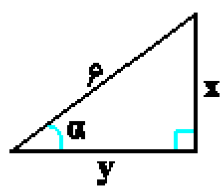
$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} = \frac{۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶-x^۲}} \Rightarrow \sqrt{۳۶ - x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$

پس به ازای $x = ۳\sqrt{۲}$ مستطیل بیش‌ترین مساحت را دارد.

$$S(۳\sqrt{۲}) = ۶\sqrt{۲} \times \sqrt{۱۸} = ۶\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

راه حل دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر x و y را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α بدست می‌آوریم:



$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = ۲xy = ۲ \times ۶\sin\alpha \times ۶\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$$

مساحت وقتی بیش‌ترین مقدار را دارد که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد.

۱۲) در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x| - 2x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) 3 ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) 4

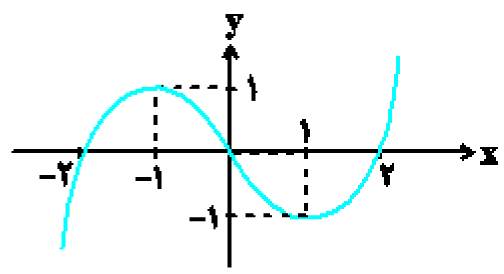
پاسخ: گزینه ۱

گزینه۱

تابع را با توجه به ریشهٔ قدرمطلق ($x = 0$) به دو ضابطه تفکیک کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x = x(x-2) & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 - 2x = -x(x+2) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

در تابع درجهٔ ۲، نقطهٔ رأس، وسط ریشه‌هاست.



پس با توجه به شکل $x = -1$ طول ماکزیمم نسبی و $x = 1$ طول می‌نیمم نسبی است.

$f(-1) = 1 \qquad f(1) = -1$

$\max(-1, 1) \qquad \min(1, -1)$

فاصلهٔ ماکزیمم و مینیمم= $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

۱۳) اگر تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ فقط در بازه $(1, 3)$ نزولی باشد، آنگاه طول نقطه بحرانی تابع $g(x) = x^2 - (a+b)x + 1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

$x = 1$ و $x = 3$ باید ریشه‌های تابع مشتق باشند: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \,(\mathrm{I}) \\ f'(3) = 27 + 6a + b = 0 \,(\mathrm{II}) \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}, \mathrm{II}} a = -6 , b = 9$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 3x + 1$$

حال طول نقطه بحرانی تابع $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

طول نقطه بحرانی $g'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

۱۴) مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^{۲} - ۱)\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\{-۱,۱\}$ ۲) $\{-۴,۰,۱\}$ ۳) $\{-۲,۰,۲\}$ ۴) $\{-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲}\}$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = (x^{۲} - ۱)\sqrt[۳]{x^{۲}} \Rightarrow f'(x) = (۲x)\sqrt[۳]{x^{۲}} + \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x^{۲} - ۱)$$

$$f'(x) = \frac{۶x^{۲}+۲x^{۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۸x^{۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۸x^{۲} - ۲ = ۰ \Rightarrow ۸x^{۲} = ۲ \Rightarrow x^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$$

در ضمن در $x = ۰$ مشتق وجود ندارد.

پس مجموعه نقاط بحرانی تابع برابر $\{-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲}\}$ است.

۱۵) به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^{۲}-۳x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی است؟

۱) $(-۳,۰)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $R - [-۳,۰]$ ۴) $R - [۰,۳]$

پاسخ: گزینه ۳

تابع f، تابع کسری است و در دامنه خودش پیوسته و مشتق‌پذیر است.

پس وقتی اکسترمم نسبی دارد یعنی حتماً ریشه ساده f' هم دارد، بنابراین:

$$f'(x) = \frac{(۲x-۳)(x+a)-(۱)(x^{۲}-۳x)}{(x+a)^{۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} + ۲ax - ۳x - ۳a - x^{۲} + ۳x = ۰$$

باید دلتای آن مثبت باشد تا ریشه ساده داشته باشد. $\Rightarrow x^{۲} + ۲ax - ۳a = ۰ \Rightarrow$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow (۲a)^{۲} - ۴(۱)(-۳a) > ۰$$

$$۴a^{۲} + ۴(۳a) > ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۳a > ۰ \Rightarrow a(a + ۳) > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \\ \text{یا} \\ a < -۳ \end{cases} \Rightarrow$$ در نتیجه مجموع مقادیر a به صورت $R - [-۳,۰]$ خواهد بود.

۱۶) مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۴}-۴\sqrt[۳]{x}$ در بازه $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۴(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}=\begin{cases} x=۰\\ x=۱\end{cases}$$

x	-۱	۰	۱	۲
$y=f(x)$	۵	۰	-۳	$-۲\sqrt[۳]{۲}$

$$\Rightarrow \max=۵\ ,\ \min=-۳$$
$$\Rightarrow \max+\min=۵-۳=۲$$

۱۷) معادله خطی که نقاط اکسترمم تابع $y=\frac{ax}{x^۲+۱}$ را به هم وصل می‌کند، $y=۴x+b$ است. b کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مختصات نقاط اکسترمم نسبی تابع را به دست می‌آوریم:

$$y'=a\left(\frac{(۱)(x^۲+۱)-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}\right)=a\left(\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}\right)$$

$$y'=۰\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow \underbrace{A(۱,\tfrac{a}{۲}),B(-۱,-\tfrac{a}{۲})}_{\text{نقاط اکسترمم}}$$

حال با توجه به نقاط A و B و خط $y=۴x+b$ داریم:

$$m_{AB}=\frac{-\frac{a}{۲}-\frac{a}{۲}}{-۲}=\frac{a}{۲}=۴\Rightarrow a=۸$$

$$A\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.,B\left|\begin{matrix}-۱\\-۴\end{matrix}\right.\Rightarrow y-۴=۴(x-۱)\Rightarrow y=۴x\Rightarrow b=۰$$

۱۸) تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲+x+۳}$ در بازه $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) -۳ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$D_f=R$$

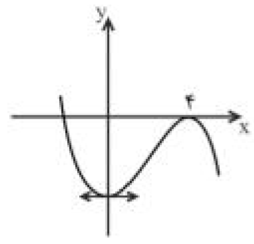
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(۴x-۳)(x^۲+x+۳)-(۲x+۱)(۲x^۲-۳x)}{(x^۲+x+۳)^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۴x^۳+۴x^۲+۱۲x-۳x^۲-۳x-۹-۴x^۳+۶x^۲-۲x^۲+۳x}{(x^۲+x+۳)^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۵x^۲+۱۲x-۹}{(x^۲+x+۳)^۲}\Rightarrow f'(x)>۰\Rightarrow ۵x^۲+۱۲x-۹>۰$$

با حل نامعادله بالا جواب آن به شکل $(-\infty,-۳)\cup(\frac{۳}{۵},+\infty)$ به‌دست می‌آید که با توجه به‌صورت سؤال $(a,+\infty)\subseteq(\frac{۳}{۵},+\infty)$ است. بنابراین حداقل مقدار a برابر با $\frac{۳}{۵}$ به‌دست می‌آید.

۱۹) شکل مقابل نمودار تابع به معادله $y = ax^3 + bx^2 - 16$ است. a کدام است؟



۱) -1
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{-1}{2}$
۴) $\frac{-2}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار طول‌های نقاط اکسترمم $x = 0$ و $x = 4$ هستند لذا در معادله $y' = 0$ صدق می‌کنند: $y' = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow y'(4) = 0$

$$\Rightarrow 48a + 8b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0 \qquad (1)$$

از طرفی نقطه $(4\ ,\ 0)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند.

$$0 = 64a + 16b - 16 \Rightarrow 4a + b = 1 \qquad (2)$$

از حل دو معادله (۱) و (۲)، $a = \frac{-1}{2}$ خواهد بود.

۲۰) فاصله دو خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $y = x^3 - 3x$ در دو نقطه ماکزیمم و می‌نیمم آن کدام است؟

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

کافی است طول‌های اکسترمم را یافته و از آن‌جا عرض نقاط اکسترمم را بیابیم:

$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1\ ,\ x = -1$$

$$y(1) = 1 - 3 = -2\ ,\ y(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$d = y_{Max} - y_{Min}$$

$$d = 2 - (-2) = 4$$

۲۱) اگر $f(x) = -x^2 + 2x$ و $g(x) = x\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ باشد، بیشترین مقدار تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{5}{4}$
۴) $\frac{31}{4}$

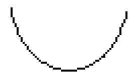
پاسخ: گزینه ۱

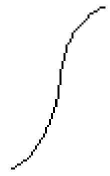
مشتق تابع $g(x)$ با دامنه $x > 0$ برابر است با $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ و همواره $g'(x) > 0$، پس تابع $g(x)$ اکیداً صعودی است و بنابراین برای پیدا کردن ماکسیمم مطلق تابع $(gof)(x)$ کافی است ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ را پیدا کنیم، ماکسیمم تابع $f(x)$ به ازای ریشه مشتق یعنی $x = 1$ بدست می‌آید.

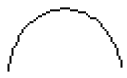
$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

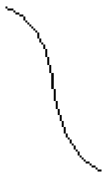
$$\max\{(gof)(x)\} = g(f(1)) = g(1) = 0$$

۲۲) نمودار تابع $y = x^{۴} - x^{۲} - ۱$ در حوالی نقطه تلاقی با محور عرض‌ها کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۳

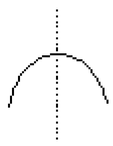
در نقطه تلاقی با محور عرض‌ها، طول نقطه، $x = ۰$ است. با مشتق‌گیری داریم:

$y' = ۴x^{۳} - ۲x = ۲x(۲x^{۲} - ۱) \Rightarrow y'(۰) = ۰ \Rightarrow$ $x = ۰$ نقطه بحرانی است.

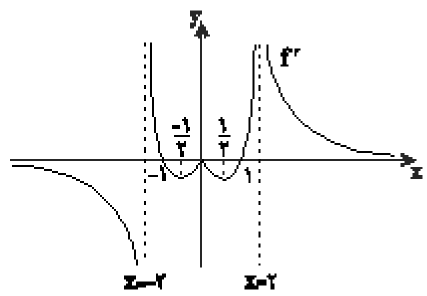
از طرفی با تعیین علامت تابع مشتق در حوالی نقطه $x = ۰$ داریم:

x		$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		۰		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
$۲x$	−		−	۰	+		+
$۲x^{۲}-۱$	+	۰	−		−	۰	+
y'	−	۰	+	۰	−	۰	+

در نتیجه، از آن‌جایی که در این نقطه، علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر کرده، لذا این نقطه ماکزیمم نسبی محسوب می‌شود.



۲۳) شکل زیر نمودار تابع f' (تابع مشتق تابع همواره پیوسته f) است. تابع f در کدام نقطه، دارای اکسترمم نسبی و مشتق‌ناپذیر است؟



۱) $x = ۲$

۲) $x = -۱$

۳) $x = ۰$

۴) $x = -۲$

پاسخ: گزینه ۴

در نقطه اکسترمم، مشتق تغییر علامت می‌دهد، پس در نمودار f'، در هر نقطه‌ای که f' از مثبت به منفی (یا بر عکس) تغییر علامت دهد، نقطه اکسترمم تابع f خواهد بود، لذا محل تلاقی تابع f' با محور xها (نقطه اکسترمم و مشتق‌پذیر تابع f) و مجانب قائم با شاخه‌های دو طرفه محور xها، در تابع f' نقطه اکسترمم و مشتق‌ناپذیر تابع f خواهد بود (تابع f، همواره پیوسته فرض شده است). با توجه به توضیحات بالا، تابع f در $x = -۲$، می‌نیمم و مشتق‌ناپذیر، در $x = -۱$ ماکزیمم و مشتق‌پذیر و در $x = ۱$ می‌نیمم و مشتق‌پذیر است.

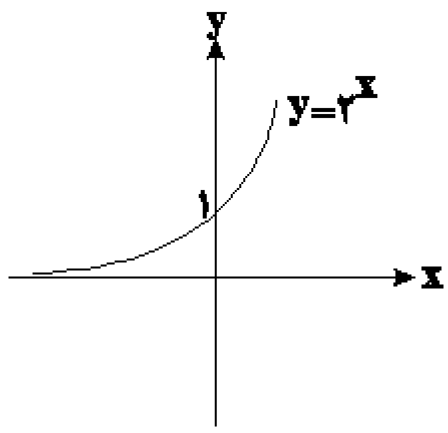
دقت کنید که در $x = ۰$ و $x = ۲$ مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، پس این نقاط، نقطه اکسترمم تابع f نخواهند بود.

۲۴) تابع $y = |2^x - 1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

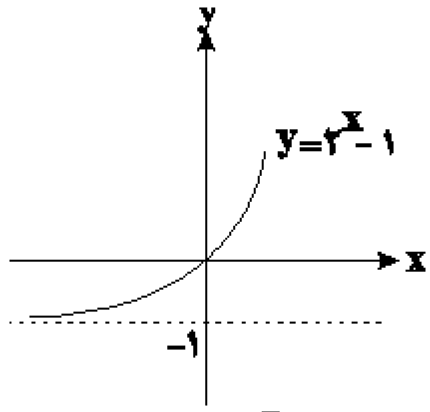
۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

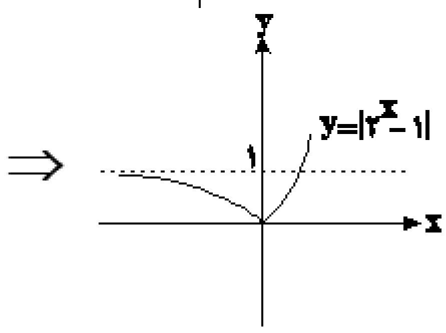
پاسخ: گزینه ۲

از رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم:



یک واحد به پایین:





با توجه به شکل، تابع فقط یک نقطه بحرانی در $x = 0$ دارد.

۲۵) طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x|x^{۲} - ۱|$, کدام است؟

۱) $-۱, \frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $-۱, -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $۱, \frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $۱, -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} - x & ; |x| \geq ۱ \\ x - x^{۳} & ; |x| < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} & ; |x| > ۱ \\ ۱ - ۳x^{۲} & ; |x| < ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^{۲} = ۱ \Rightarrow x^{۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

x		-۱		$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		۱	
f′	+	ت ن	−	۰	+	۰	−	ت ن	+
	↗	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗

$$\Rightarrow \max \Rightarrow x = -۱, \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$